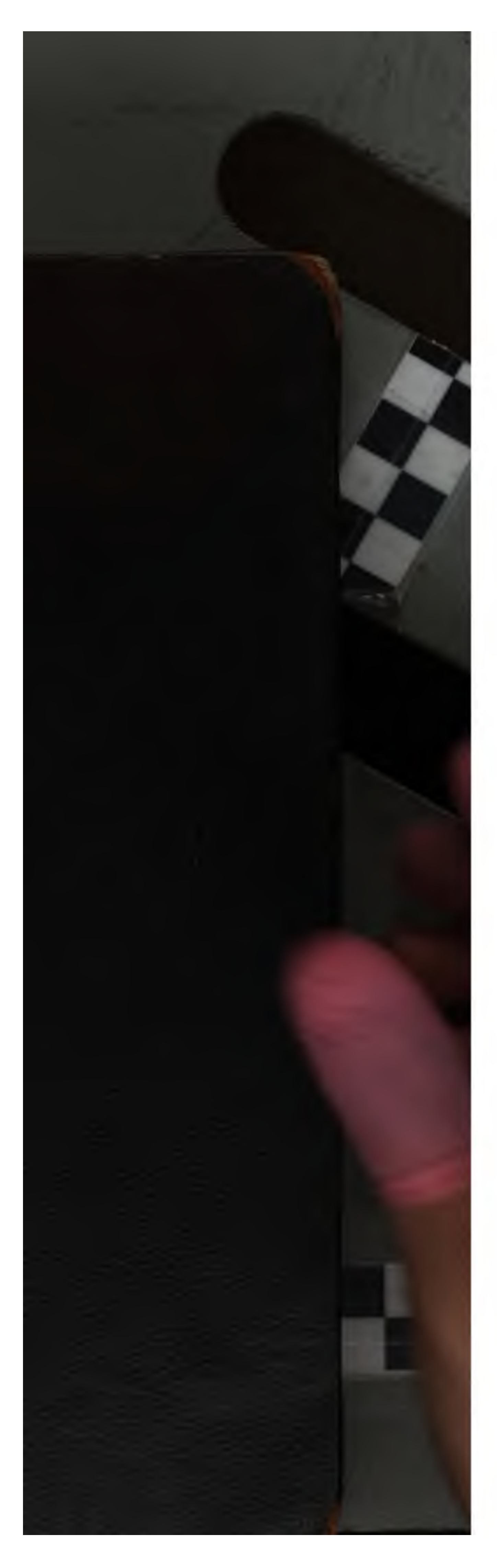










Xenia Austriaca.

Festschrift der österreichischen Mittelschulen

zur

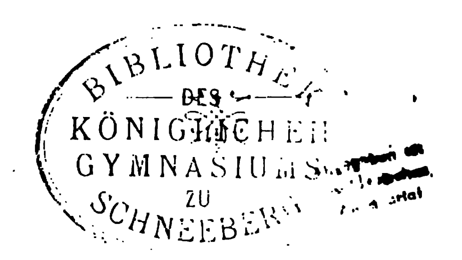
42. Versammlung

deutscher Philologen und Schulmänner

in Wien.

Zweiter Band:

Abtheilung V—VIII.



Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn

1893.

Gewidmet dem Andenken

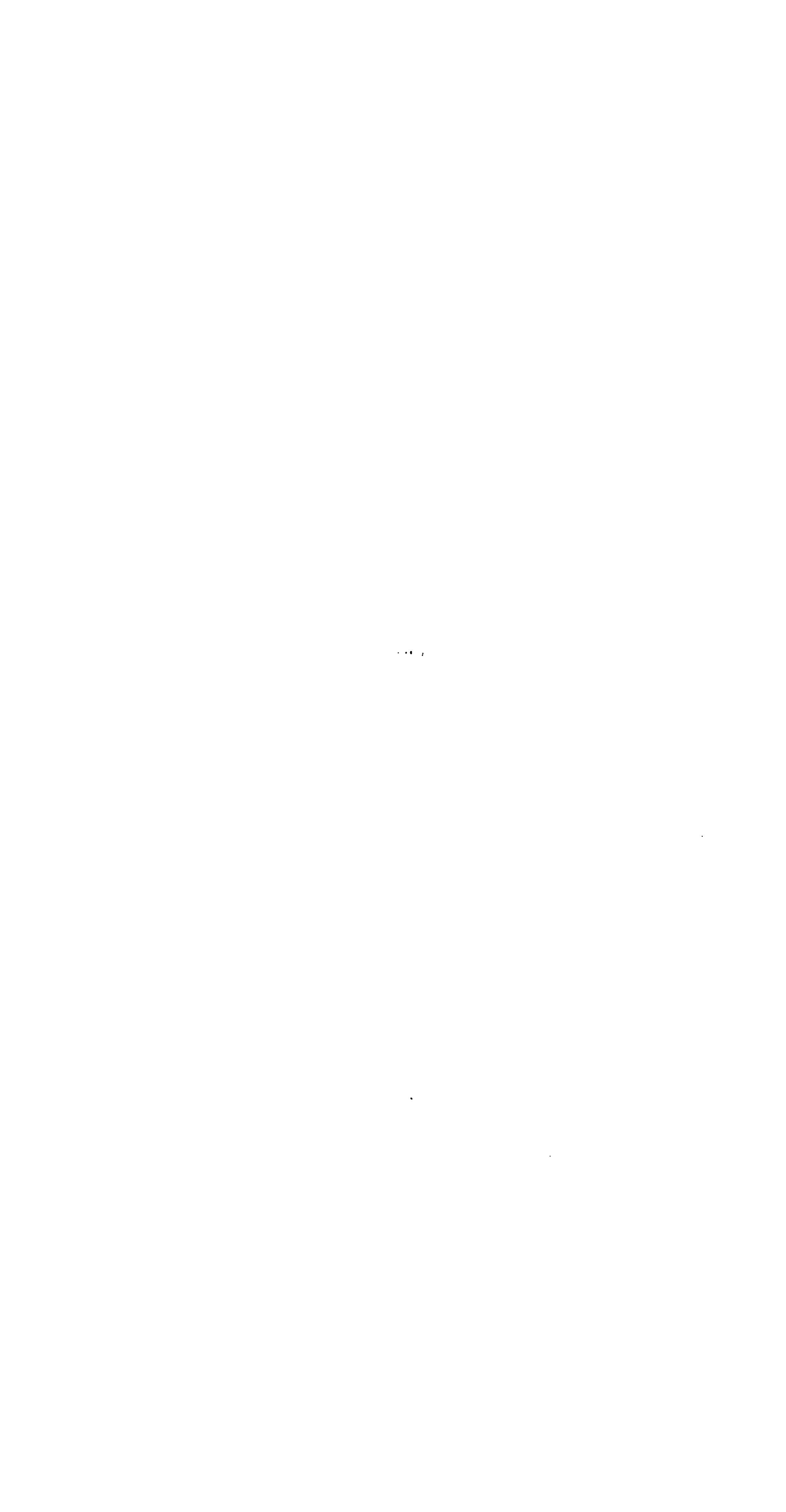
an die

Schöpfer der österreichischen Mittelschule

Leo Grafen Thun-Hohenstein

Franz Exner und **Hermann Bonitz.**





Als die Einladung Wiens, die Theilnehmer an der 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in seinen Mauern zu empfangen, von der zu Pfingsten 1891 in München tagenden 41. Versammlung angenommen worden war, begrüßte die Lehrerschaft der österreichischen Mittelschulen freudig den Anlass, durch eine den Mitgliedern der Versammlung zu überreichende Festschrift ihre aufrichtige Theilnahme an dem idealen Streben jener altehrwürdigen Wanderversammlung zu bekunden.

Einem an die Mittelschulen Österreichs gerichteten Aufruf, sich durch Beisteuer einer wissenschaftlichen Abhandlung, die zugleich den Programmaufsatz der betreffenden Mittelschule für das Jahr 1893 bilden könnte, an der Festschrift zu betheiligen, leisteten sofort mehr als hundert Mittelschulen bereitwilligst Folge, obwohl der frühe Einsendungstermin der für die Festschrift bestimmten Aufsätze, die der Einheitlichkeit halber alle an einem Orte gedruckt werden mussten, sowie andere Umstände die Theilnahme mancher Anstalt erschwerten.

Die überraschend große Zahl der angemeldeten Abhandlungen machte, da die Festschrift nicht einmal der Hälfte derselben Raum bieten konnte, es nöthig, unter den Anmeldungen eine Auswahl zu treffen, und so liegen 41, verschiedenen Gebieten wissenschaftlicher Forschung entnommene Aufsätze in dieser Publication gesammelt vor und mögen den Beweis erbringen, dass an den Mittelschulen aller Kronländer Österreichs jenes heilige Feuer der Wissenschaft gehütet und gepflegt wird, das. an den Hochschulen entzündet, diese mit jenen verbindet.

In unsere Sammlung konnten die Abhandlungen einzelner Mittelschulen nicht aufgenommen werden, die durch ihren größeren äußeren Umfang Anspruch auf gesonderte Publication hatten. Da aber diese Anstalten den der Festschrift zugrunde liegenden Gedanken zum gemeinsamen Ausdruck bringen wollten, seien sie an dieser Stelle genannt.

Die k. k. Theresianische Akademie in Wien bietet den Theilnehmern des Philologentages eine Festgabe, deren Beiträge theils von einem Mitgliede des Erziehungskörpers der genannten Anstalt, theils von Lehrern des mit der Akademie verbundenen Gymnasiums geliefert wurden: 1. „Grundzüge der Organisation der k. k. Theresianischen Akademie in Wien“ von Heinrich Rack. 2. „Studien zu den Annalen des Tacitus“ von Franz Zöchbauer. 3. „Das Titelwesen bei den spätlateinischen Epistolographen“ von August Engelbrecht.

Das k. k. Gymnasium der Benedictiner in Seitenstetten in Niederösterreich widmet zu gleichem Zwecke das Werk: „Die Sinnbilder und Beiworte Mariens in der deutschen Literatur und lateinischen Hymnenpoesie des Mittelalters“ von Dr. Anselm Salzer.

Als die Philologen und Schulmänner Deutschlands 1858 das erstemal in Österreich tagten, haben sie das höhere Unterrichtswesen Österreichs in seinen Anfängen gesehen. Das große Princip, auf welchem die Reform der Gymnasien und Realschulen aufgebaut war, dass die wissenschaftliche Durchbildung der Lehrer unerlässliche Voraussetzung für die fruchtbare Ausübung ihres Amtes sein müsse, hatte seine ersten Früchte getragen. Es hat der angestrengten Arbeit eines Menschenalters bedurft, dieses Princip bis zu seinen vollen Consequenzen zu verwirklichen.

Möge die bescheidene Gabe unserer Festschrift vor dem Urtheile so bewährter Vertreter der Wissenschaft und Schule, wie sie in Wien die Pfingstwoche dieses Jahres vereinigt, bestehen und für das ernste Streben der österreichischen Lehrerwelt zeugen. Dann wird sie nicht unwürdig erscheinen, die Widmung an die drei unvergesslichen Männer, Leo Grafen Thun-Hohenstein, Franz Exner und Hermann Bonitz zu tragen, welche die Organisation der österreichischen Mittelschulen und mit ihr die Einrichtung der Programmbeilagen geschaffen haben, auf dass sich durch sie die Lehrerwelt wissenschaftlich bethätige und bewähre.

Inhalts-Verzeichnis.

I. Abtheilung: Classische Philologie und Archaeologie.

II. Abtheilung: Deutsche Sprache und Literatur.

III. Abtheilung: Moderne Philologie.

IV. Abtheilung: Geschichte und Kunstgeschichte.

Seite

V. Abtheilung: Mathematik und darstellende Geometrie.

VI. Abtheilung: Physik und Chemie.

VII. Abtheilung: Naturgeschichte.

VIII. Abtheilung: Philosophie und Pädagogik.

V. Abtheilung.

Mathematik und darstellende Geometrie.



V. Abtheilung.

Mathematik und darstellende Geometrie.



I.

Der Mensch äußert bloß eine der vielen Seiten seines Schaffensdranges, indem er nach Vervollkommnung der Gedankenvermittlung strebt. Von dem Muster einer guten Gedankenvermittlung verlangen wir Klarheit, Bündigkeit, leichte Erlernbarkeit und Schönheit. An der Ausgestaltung der Sprache, der wichtigsten Gedankenvermittlerin, haben ungezählte Geschlechter gearbeitet. Der unermesslichen Fülle unserer Vorstellungen hat die Sprache einen ebenbürtigen Reichthum entgegenzusetzen gesucht. Wie im wirtschaftlichen Leben hat sich auch hier die Theilung der Arbeit als nothwendiges und förderndes Mittel eingestellt. Jeder Beruf, jede Wissenschaft haben zum Ausbaue der Sprache Werkmeister und Bausteine abgegeben; und an diesem Wettbewerbe war die Mathematik hervorragend, wenn auch nicht immer glücklich, betheiligt. In der Bündigkeit ihrer Zeichen- und Lautsprache jedoch steht sie unerreicht da.

Schon die alten Völker suchten die Sätze und Wahrheiten der Mathematik in einfache, durchsichtige Formen zu gießen; aber erst der neueren Zeit, vor allem einem Vieta, verdanken wir die großen Anregungen, die zu der gegenwärtig so überaus bündigen Sprache der Mathematik geführt haben.

Form und Inhalt einer Sache hängen auf das engste zusammen. Stillstand der Form ist Stillstand, ja Rückgang der Kunst und Wissenschaft. Das Streben, die Sprache der Mathematik zu vervollkommnen, fällt also mit den gleichgearteten Bestrebungen im Gebiete dieser Wissenschaft zusammen. Wollen wir nun den Entwicklungsgang verfolgen, den die Sprache der

Mathematik genommen, so brauchen wir bloß die leitenden Gedanken, die die wissenschaftliche Thätigkeit bestimmt haben, hervorzuziehen.

Nun hat sich die Absicht, ein wissenschaftliches Gebäude aufzuführen, stets darin geäußert, die Nebenordnung der Begriffe ihrer Unterordnung nach Möglichkeit zu opfern. Durch immer weitergehendes Abstrahieren hat man immer mehr Begriffe unter möglichst wenige höhere Begriffe gebracht und so eine ausgedehnte Unterordnung herbeigeführt. Einem solchen Streben waren und sind in der Mathematik so gut wie keine Schranken gesetzt. Denn da hier alle Verfahrungsarten, also das Vervielfachen und Theilen in gleichem Maße, wie das Wurzelziehen und Logarithmieren, auf dem Zu- und Abzählen von Einheiten beruhen, so ist zunächst eine Zweitheilung des gesammten Stoffes durchführbar. Aber selbst diese Nebenordnung bildet noch nicht das Endglied der möglichen Vereinfachungen. Denn da sich das Zu- und Abzählen unter den höheren Begriff der Veränderung der Anzahl bringen lassen, ist hier ein Standpunkt denkbar, wo ausschließliche Unterordnung herrscht. In dieser Richtung ist die Thätigkeit der Mathematik noch nicht abgeschlossen, und wer der wissenschaftlichen Behandlung des Gegenstandes und der ihr parallel gehenden Gestaltung des Ausdruckes eine ausschließliche Rolle zuweist, findet das Feld wohl ausgezeichnet bestellt, aber darauf noch nicht alles gethan. Allein eine solch einseitige Verfolgung eines hohen Zieles führt nie zu diesem Ziele h i n, sondern nur davon a b.

Dies beweist am besten die heutige Sprache der Mathematik, die einer zu einseitigen Bevorzugung der Wissenschaftlichkeit ihr Dasein dankt. Denn sehen wir unbefangen nach, wie die Mathematik ihre Gedanken vermittelt, so finden wir, dass ihre Sprache mit Ausnahme der Bündigkeit keine der Eigenschaften besitzt, die wir von einer guten Gedankenvermittlung fordern. Sie ist nicht gemeinverständlich und nicht ungezwungen, daher auch nicht schön, besonders aber ist sie nicht leicht erlernbar. Ja sie dürfte unter allen Sprachen die am schwersten zu erlernende sein. Die einfachsten Gedanken zwängt sie in eine so fremde und wunderliche Form, dass wir in dem Bemühen uns diese eigen zu machen, ihren Inhalt nur zu leicht vernachlässigen.

Und doch ist diese Sprache trotz ihres unnatürlichen Wesens, trotz der Vielsinnigkeit fast aller ihrer technischen Wörter und

Zeichen, trotz der weitverzweigten Sinnverwandtschaft ihrer Ausdrücke, für jeden, der sie gründlich kennen gelernt hat, klar und unzweideutig.

II.

Die starke Bevorzugung der Unterordnung auf Kosten der Nebenordnung spiegelt sich insbesondere in dem Gedanken:

Zahlformen, die dieselbe Zahl darstellen, sind unter allen Umständen gleichwertig, d. h. sie sind gleichwertig, welche Werte immer auch die einzelnen Theile der Form aufweisen. So z. B. sollen die beiden Formen $a + b - c$ und $a + (b - c)$ auch dann dieselbe Zahl bedeuten, wenn $b < c$ ist; die Gleichungen $x + y = 3$ und $x^2 + y^2 = 9$ auch dann gelten, wenn eines der beiden einfachen links vom Gleichheitszeichen stehenden Zeichen einen größeren Wert vorstellt als eines der Zeichen $x + y$ oder $x^2 + y^2$.

Eine natürliche Folge dieser Feststellung ist, dass man die Antworten auf unmögliche Forderungen übereinstimmend mit jenen auf ähnlich geartete, mögliche Forderungen gestaltet hat. So z. B. beantwortet man die Frage: Wann wird, von diesem bestimmten Zeitpunkte gerechnet, die nächste Sonnenfinsternis beginnen? im möglichen Falle dahin, dass sie nach a Zeiteinheiten, im unmöglichen Falle aber, dass sie etwa in *minus* (weniger) a Zeiteinheiten eintreten wird. Die erstere Antwort ist vollkommen klar; die letztere aber sagt, wie eine Prüfung des Rechenvorganges zeigen kann: Ziehe von der Zeit, die vor dem Anfangspunkte der Zählung verflossen ist, a Zeiteinheiten ab, so erfährst du den Zeitpunkt für den Eintritt der Sonnenfinsternis. Diese Antwort lässt sich mit der streng wörtlich genommenen Frage nicht in Einklang bringen; denn wir fragen nach der Eintrittszeit der nächstkünftigen Sonnenfinsternis und finden jene einer vergangenen Sonnenfinsternis. Der Widerspruch lässt sich hier nur so rechtfertigen und beseitigen, dass man den Ausdruck „künftig“ auch in der Bedeutung von „vergangen“ nimmt. Will man die Antwort im unmöglichen Falle gelten lassen, dann müssen wir die gestellte Frage auch in dem Sinne der Frage: Wann hat die letzte Sonnenfinsternis begonnen? nehmen. Damit haben wir auch zwei nebengeordnete Fälle einem einzigen

[illegible] der Anzahl.
[illegible] zu. 10 zum
[illegible] mal als Factor
[illegible] nacheinander
[illegible] Quotienten 1
[illegible] Zahl
[illegible] Ausdruckes
[illegible] Zeichenverbindung
[illegible] noch jedes
[illegible] multipliciert
[illegible] einfacher

Zeichen ausgedrückt, dass die Übereinstimmung zwischen der unendlichen Reihe für e und der Summe der Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ erst dann bestände, wenn man alle Glieder der ersteren Reihe mit Ausnahme jener von der Form $\frac{a}{b} x^{2n+1}$ als abzuziehende Glieder nähme.

Aus diesen Beispielen, die sich durch weiter unten angeführte, wo die Bündigkeit der Sprache der Mathematik beleuchtet wird, sowie durch andere Beispiele leicht vermehren lassen, ersehen wir wohl, dass sich die Mathematik unverständlich ausdrückt; wir erkennen aber nicht den Grund davon. Dieser ist nun in der Absicht zu suchen, möglichst viele Fälle unter eine Form zu bringen. Sehr belehrend ist in dieser Richtung die Verwendung des Wortes Zahl. Dieses hat seit jeher bezeichnet und bezeichnet noch immer die gezählte Vielheit. Man nennt jedoch auch die Einheit und die Null Zahlen, ohne dass sie es wären. Es ist dies nicht anders als mit dem Worte Vieleck, das auch das Dreieck und Viereck mitbezeichnet, ohne dass diese zu den Vielecken gerechnet werden. Die Frage: wie viel? hat mit allen denkbaren Fragen das gemein, dass sie bejahende und verneinende Antworten zulässt. So wie die Antwort „farblos“ auf die Frage: Was für eine Farbe? keine Farbe bezeichnet, so ist die Antwort eins oder null auf die Frage wie viel? keine Zahlangabe. Außer den drei Begriffen: gezählte Vielheit, Einheit und Null bezeichnet man mit dem Worte Zahl noch eine Mehrheit von Zahlangaben; z. B. nennt man 7 Jahre 4 Monate 20 Tage oder 17 *m* 5 *dm* 9 *cm* eine Zahl, während doch hier jedesmal drei Zahlen als Ergebnisse dreier verschiedener Zählvorgänge auftreten. Danach erscheint auch eine Redeweise, wie $1\frac{1}{2}$ ist eine kleinere Zahl als 2, berechtigt und verständlich. Richtig aber müsste es hier heißen: 1 Einheit und 1 halbe Einheit sind weniger als 2 Einheiten derselben Gattung.

Ähnlich wie mit dem Worte Zahl verhält es sich mit vielen andern technischen Ausdrücken der Mathematik. Um nur einige anzuführen, seien erwähnt die Wörter addieren, subtrahieren, multiplicieren, dividieren, Summe, Differenz, Potenz, Wurzel. Alle diese Wörter und noch andere werden vom Mathematiker in mehrfacher Bedeutung angewendet.

[illegible] Verhältnissen.

[illegible]

[illegible] Sätzen der Mathe- [illegible] Satzzusammenhange verschieden [illegible] Mathematik [illegible] ist es nämlich. [illegible] Bedeutungen eines Ausdruckes [illegible] Einschränkungen gemacht [illegible] selbstverständlich, dass in vielen Fällen die [illegible] genug bestimmt sein [illegible] B. der Schluss [illegible] auch der abso- [illegible] eine [illegible] aber [illegible] eine [illegible] eine [illegible] wo [illegible]

benannte Anzahl nebst einem oder auch mehreren Rechenvorgängen, z. B. $-\frac{3}{4}$, $4\sqrt{-1}$, $\sqrt{-x^3}$. Mit allen diesen Bedeutungen wird gerechnet und geschlossen. Schon in der elementaren Algebra hat das Zeichen $a+b$ außer dem Satzzusammenhange eine achtfache, im Satzzusammenhange aber eine drei- bis vierfache Bedeutung. Für sich allein stehend kann es folgendes bedeuten: 1. Zähle b Einheiten zu a hinzu; 2. das Ergebnis dieses Zusammenzählens, also die Summenzahl. Diese wird zwar hie und da mit $(a+b)$ bezeichnet, aber nöthig und üblich ist die Einklammerung nicht. 3. Ziehe die durch b dargestellten Einheiten von a ab, indem b etwa für -7 steht; 4. das Ergebnis davon, also die Differenz; 5. ziehe die durch a dargestellte Anzahl Einheiten von b ab, indem a etwa für (-5) steht; 6. das Ergebnis davon; 7. ziehe die in a enthaltenen Einheiten ab und vom Reste die in b enthaltenen, wenn etwa $a = -7$ und $b = -5$ ist; 8. ziehe die Summe der durch a und b gegebenen Einheiten ab. Hiebei ist nur noch nicht ausdrücklich gesagt, wovon a und darauf b oder ihre Summe wegzunehmen ist.

Von den acht Bedeutungen des Zeichens $x+y$ treten in der Gleichung $x+y=5$ nur drei auf; denn sie kann stehen für $2+3=5$, für $7+(-2)=5$ und für $(-3)+8=5$, oder allgemein für die Gleichungen:

$$x_1+y_1=5$$
$$x_2-y_2=5$$
$$y_3-x_3=5,$$

wobei die Buchstaben bloß Zahlen im engeren Sinne vorstellen.

Nicht anders ist es mit der Gleichung $x^2+y^2=9$. Auch sie steht an Stelle dreier verschiedener Gleichungen, wenn man dem Zeichen x^2+y^2 in Übereinstimmung mit dem voranstehenden Falle die Bedeutung einer Summe beilegt und die einer Differenz, wo einmal das erste, das anderemal das zweite Glied der Subtrahend ist. Sehr geläufig ist uns die analytische Bedeutung der dreifachen Gleichung $x+y=5$. Sie stellt nämlich die in drei verschiedenen Winkelflächen gelegenen Theile einer und derselben Geraden vor. Die strenge Folgerichtigkeit müsste auch mit den drei verschiedenen durch $x^2+y^2=9$ dargestellten Linien zweiter Ordnung, d. i. mit einem Kreise und zwei einander zugeordneten Hyperbeln rechnen. Doch pflegt man unter $x^2+y^2=a$ bloß die Gleichung eines Kreises zu verstehen und den beiden gleichseitigen Hyperbeln eigene Gleichungsformen zuzuweisen.

nächst mit 1892 negativen Einheiten der ersteren Art und dann mit 1108 Einheiten der zweiten Art zu thun. Diese letzteren sind nämlich von den vor dem Anfange unserer Zeitrechnung abgelaufenen Jahren wegzunehmen. Sollten aus einem Behälter, der 60 *l* Wasser enthält, 20 *l* ausgeschöpft werden, so sind diese 20 *l* negative Einheiten der ersten Art; sollten aber 70 *l* ausgeschöpft werden, so stehen wir vor einem unmöglichen Falle, nicht aber vor negativen Einheiten der zweiten Art. Es ist nicht unwichtig zu wissen, dass das Wort positiv bloß e i n e Bedeutung hat, nämlich die des Hinzuzählens. Von dem Positiven muss das Absolute strenge geschieden werden. Das Positive und Negative führen Veränderungen herbei, das Absolute dagegen nicht.

Die großen Meinungsverschiedenheiten über den Begriff des Negativen mögen es rechtfertigen, wenn der engere Inhalt des Wortes negativ noch an der Hand eines andern Beispieles besprochen wird. Statt Zeiteinheiten legen wir der Zählung Längeneinheiten einer und derselben Linie zugrunde. Die Linie, deren beliebiger Punkt *N* der Anfangspunkt der Zählung sei, nennen wir Zahlenlinie; sie mag nun gerade oder krumm sein. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir das letztere an. Sie stelle die Bahn des Mittelpunktes *C* eines Wandelsternes vor, welcher sich in der Nähe von *N* von links nach rechts bewege. Dann sind alle rechts vom Punkte *N* gelegenen Wegeinheiten hinzu- [illegible]

gehend diese Anzahl abzählt. Bildet also irgend eine Mittellage und nicht die Uranfangslage des Punktes M den Ausgang der Zählung, so wird man gegen rechts hinzuzählen, in der entgegengesetzten Richtung aber abzählen. Hier hat das Zu- und Abzählen einen vollkommen strengen Sinn und negative Ergebnisse werden uns stets sagen: Zähle von M ausgehend die Einheiten des Ergebnisses von den bis M durchlaufenen Wegeinheiten ab. Geht man dagegen von der Uranfangslage des Punktes C aus, so hat weder das Hinzuzählen noch das Abziehen des Ergebnisses einen Sinn, und es kann daher weder von einem positiven noch von einem negativen Ergebnisse die Rede sein. Dieses gilt offenbar für alle Fälle, wo die Zählung nicht bei einem beliebigen Punkte beginnt, dem schon eine gewisse Zählung vorangeht, sondern bei ihrem Ursprunge, über den hinaus nichts mehr zu denken ist. Der Satz: 4 fl. Schulden sind weniger als 0 fl. Vermögen, hat also bloß dann einen Sinn, wenn man den Anfangspunkt der Zählung in Gedanken zurückverlegt. An Stelle der 0 fl. finden wir dann ein gewisses Vermögen und an Stelle der 4 fl. Schulden ein um 4 fl. kleineres Vermögen.

Die Erlernung der Sprache der Mathematik wird auch dadurch erschwert, dass vielen einzelnen Begriffen mehrere Zeichen entsprechen. Eine Sprache, die den einzelnen Begriffen zwei oder mehrere Zeichen zuweist, ist zwar reicher als eine andere, wo jedem Begriffe nur ein Zeichen entspricht; ihre Aneignung aber wird in dem Maße schwieriger, als die Zahl der Zeichen bei gleichbleibender Anzahl von Begriffen steigt. Die Mathematik ist nun in dem Falle, dass ihre Sprache im Laufe der Jahrhunderte sehr bereichert wurde, während die Zahl ihrer Begriffe fast dieselbe geblieben ist. Zur Bereicherung der mathematischen Ausdrucksweise hat vor allem die schon oben erwähnte Festsetzung geführt, dass jede algebraische Formel und Gleichung unter allen Umständen zu gelten habe. So bedeuten die Ausdrücke $a + b - c$, $a + (b - c)$, $a - (c - b)$, $b + (a - c)$, $b - (c - a)$ dieselbe Zahl, obwohl die Möglichkeit von $b - c$ und $a - c$ jene von $c - b$ und $c - a$ oder auch umgekehrt ausschließt. Dadurch sind wir auch zu den Ausdrücken: „Addiere eine negative Zahl“ und „subtrahiere eine negative Zahl“ gekommen, die mit den gemeinverständlichen Ausdrücken „subtrahiere eine Zahl“ und „addiere eine Zahl“ gleichbedeutend sind. Hieher gehören auch Ausdrücke wie: Erhebe eine Zahl

zum Exponenten, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, -5, $-\frac{2}{3}$, ziehe aus einer Zahl die $\frac{1}{2}$te, $\frac{3}{5}$te, $-\frac{2}{3}$te Wurzel u. a. m.

Zur Bereicherung des Ausdruckes hat auch das Streben beigetragen, jeden Gedanken in ein möglichst einfaches Gewand zu kleiden. So z. B. sagt man statt: Nimm das x-fache der Zahl a vom y-fachen dieser Zahl weg, nimm das $(y-x)$-fache der Zahl a. Die Forderung: Multipliciere mit minus x, sagt genau dasselbe wie der etwas breitere, dafür aber gemeinverständliche Ausdruck: Bestimme das x-fache und ziehe es darauf ab. Ein dritter Umstand, der zu einer erheblichen Bereicherung der Sprache der Mathematik mitgewirkt hat, ist in der Absicht zu suchen, den technischen Ausdruck soviel als möglich einheitlich zu gestalten.

Mit allen so gewonnenen Ausdrücken ist das Gebiet der mathematischen Begriffe unangetastet geblieben; es hat dabei keine Veränderung, also auch keine Erweiterung erfahren.

Wie mit vielen neueren Wendungen überhaupt, ist auch mit der Congruenz der Zahlen kein neuer Begriff eingeführt worden. Die Zahl a ist congruent zu r in Bezug auf den Modul b, sagt genau dasselbe, was einfacher und schöner mit dem Satze: „Der Unterschied zwischen a und r ist ein Vielfaches von b" ausgedrückt wird.

V.

Ein vierter Umstand, der die Erlernung der Sprache der Mathematik sehr erschwert, ist ihre schon wiederholt berührte, außerordentliche Bündigkeit. Was drücken wir nicht alles mit dem einfachen Zeichen $0{\cdot}56 : 0{\cdot}84$ aus? Wir verlangen damit, dass man 56 Hundertel in 84 gleiche Theile zerlege und 100 solcher Theile zusammenzähle. Wir verlangen auch damit, dass aus den 56 Hunderteln Gruppen von 84 Hunderteln oder gleiche Bruchtheile einer solchen Gruppe gebildet werden. Das Zeichen $0{\cdot}56 : 0{\cdot}84$ bedeutet auch noch das jedesmalige Ergebnis dieser Zählvorgänge.

Die bündige Form des mathematischen Ausdruckes zeigt sich auch im angewandten Rechnen. Wir schreiben die Formel für die Berechnung der Fläche eines Rechteckes mit wenigen dürren Zeichen hin: $fl = gh$. Wie vieles ist in diese Formel vom

verständigen Rechner hineinzulegen! Er hat zunächst die der Zählung zugrunde zu legende Flächeneinheit festzusetzen; dann hat er die Bedeutung von g und h als Längenzahlen und als Längen aufzugeben, ferner sich unter g die Flächeneinheiten einer Reihe und unter h die Anzahl dieser Reihen vorzustellen. Die Flächeneinheiten können dabei dem Riemen- oder dem Quadratmaße angehören. Gegenwärtig jedoch, wo das Riemenmaß[1]) nicht mehr angewendet wird, zählt g keine Riemeneinheiten mehr, sondern immer nur Quadratflächen. Bei Anwendung der Formel $fl = gh$ wird daher auch vorausgesetzt, dass g und h als gleichbenannte Längenzahlen gegeben sind.

Wo möglich noch mehr ist in die Formel $h = \frac{fl}{g}$ hineinzudenken. Buchstäblich genommen, hat diese Formel so wenig einen klaren Sinn als die Gleichung $fl = gh$. Diesen trägt man auch nicht in eine solche Formel hinein, wenn man sich unter fl, g und h abstracte Anzahlen vorstellt. Abstracte Anzahlen sind ohne einen anschaulichen Untergrund ein Unding. Nicht die gedachten Anzahlen lassen sich ändern, sondern immer nur das, wovon sie abgezogen sind; Begriffe lassen sich nicht theilen, nicht vermehren oder vermindern. Die Vermehrung und Verminderung kann bloß an den gezählten Dingen selbst vorgenommen werden. Der Rechner nimmt, wenn auch oft unbewusst, die Veränderungen immer nur an den Gegenständen vor, deren Anzahl ihn beschäftigt. Ein Rechnen mit abstracten Anzahlen gibt es nicht; jedes Rechnen muss eine wirkliche Unterlage haben. Sollen wir nun fl durch g theilen, so müssen wir uns unter fl eine Anzahl von Dingen vorstellen, die in g gleich große Gruppen zu zerlegen sind. Die Zahl g zählt dann diese Gruppen. Wollen wir jedoch fl durch g messen, dann müssen beiden Anzahlen gleichartige oder gleiche Einheiten zugrunde liegen. In dem Falle, wo man mit dem Zeichen $\frac{fl}{g}$ die Aufforderung zur Theilung ausdrücken will, hat man sich die Fläche des Rechteckes in g gleich große und gleich breite Streifen zerlegt zu denken. Die Zahl g zählt jetzt nicht mehr Längeneinheiten,

---

[1]) Ist bei einem Rechtecke $g = 20\ m$ und $h = 25\ cm$, so ist $fl = 20$ Riemenmeter mal $25 = 500$ Riemenmeter $= 5\ m^2$. Dabei ist 1 Riemenmeter ein Rechteck von 1 m Länge und 1 cm Höhe und $100\ Rm = 1\ m^2$.

[illegible] Streifen, deren jeder eine gewisse Anzahl Flächeneinheiten enthält. Diese Anzahl gibt uns auch, wie die Anschauung lehrt, die Anzahl Längeneinheiten von h an.

Verbindet man dagegen mit dem Zeichen $\frac{f}{g}$ den Begriff der Messung, so hat man sich unter g den Inhalt eines Flächenstreifens zu denken, und das Ergebnis der Messung sagt uns, wie viele solcher Streifen von bekannter Höhe oder Breite vorhanden sind. Damit ist auch die Anzahl und Art der Längeneinheiten der Höhe des Rechteckes und somit diese Höhe selbst bestimmt.

In dem besonderen Falle, wo $h = g = a$ ist, schreiben wir $f = a \cdot a$. Hier tritt das Zeichen a in zweifacher Bedeutung auf. Das erste a bedeutet die Anzahl Flächeneinheiten einer Reihe und das zweite die Anzahl Reihen. Zur Berechnung der Seite a aus dem Flächeninhalte bedienen wir uns der Gleichung $a = \sqrt{f}$. Auch in diesem Zeichen können wir, wie im entsprechenden Falle beim Rechtecke, die Bedeutungen einer Theilung und Messung hineinlegen. Jedesmal sind hier durch [illegible] so viele Reihen oder Gruppen zu bilden, als eine einzelne Reihe oder Gruppe Flächeneinheiten enthält. Bei beiden Rechnungsweisen, die der Forderung: „Ziehe aus [illegible] die Quadratwurzel" entsprechen, zählt a sowohl die Flächeneinheiten einer Reihe als auch die Reihen selbst, nie aber die Längeneinheiten einer Seite. Doch lehrt die Anschauung, daß auch die Anzahl dieser Längeneinheiten gleich a ist. [illegible] mit dem Inhalte einer Reihe ist also auch die Seite bestimmt. [illegible] die Fläche eines Quadrates [illegible] in einer Reihe 8 Viertel m^2 [illegible] einen halben Meter lang [illegible] 8 halbe oder 4 ganze Meter lang sein.

[illegible]

auch ihre großen Nachtheile. Insbesondere ist das letzte Beispiel sehr belehrend. Die gewohnheitsmäßig flüchtige Verwendung eines Zeichens wie $\sqrt{a^2}$, hat uns seinen reichen Inhalt nicht erschließen gelernt. Man pflegt die hier so klar gestellte Forderung, gleichwie das Ziehen der Wurzeln, überhaupt, mit Hilfe des Potenzierens zu erklären; während doch die Thätigkeit des Wurzelziehens, d. i. das dabei stattfindende Zählen, aus sich selbst heraus deutlich gemacht werden müsste. Wie wenig wir gewohnt sind, mit der Forderung, die das Zeichen $\sqrt{a^2}$ ausspricht, an den entsprechenden Zählvorgang zu denken, zeigen schon die Forderungen: Ziehe die Quadratwurzel aus 36 Litern, aus 49 *cm*, aus 100 fl. Man ist geneigt, solche Forderungen als Versehen hinzustellen, oder sie einer völligen Unkenntnis des wahren Sachverhaltes zuzuschreiben. Der Fachmann nimmt, wie beim Rechtecke auch bei der Berechnung der Seite eines Quadrates aus dessen Fläche, seine Zuflucht zu den abstracten Zahlen und behauptet, dass sich nur aus solchen, nicht aber aus benannten Zahlen die Quadratwurzel ziehen lasse. Sollte dieses Wurzelziehen nicht auch wie alle Zählungen auf der Wirklichkeit fußen? Und wenn nicht, sind dann nicht abstracte, d. h. von der Wirklichkeit abgezogene Einheiten ein Widerspruch im Beisatze? Man hat denn doch erst nach verschiedenen anschaulichen Zählvorgängen von der besonderen Beschaffenheit der gezählten Einheiten absehen gelernt; erst nachdem man erkannt hatte, dass die Zählvorgänge von der besonderen Beschaffenheit der Einheiten unabhängig sind. Wann immer auch, einmal musste diese Abstraction erfolgt sein, und soll die Sprache der Mathematik den kommenden Geschlechtern verständlich bleiben, dann müssen wir ihnen auch den Weg offenbaren, den die Abstraction gewandelt ist.

Ihren Höhepunkt erreicht die Bündigkeit der Sprache der Mathematik in den höheren Gleichungen. In einer solchen $n$ten Grades kann das Zeichen x der Unbekannten, neben n Zahlwerten noch verschiedene andere Begriffe mitdarstellen. Der Buchstabe x kann nämlich bedeuten: 1. Eine ganze oder gebrochene Zahl; 2. eine ganze oder gebrochene Zahl mit der Beifügung abzuziehend; 3. die Vorschrift für einen endlosen Zählvorgang; 4. die Forderung, eine Anzahl abzuziehen und, ohne dass dies geschehen konnte, die Wurzel aus dem unbestimm-

baren Reste zu ziehen; 5. verschiedene Verbindungen und Wiederholungen der angegebenen Bedeutungen.

Dieser reiche Inhalt ist eine natürliche Folge des Grundsatzes, den Hankel Permanenz der formalen Gesetze nennt. Zur Beleuchtung dessen nehmen wir die Multiplication zweier Binome vor.

Obwohl die Möglichkeit der Forderungen $a-b$ und $c-d$ die Unmöglichkeit von $b-a$ und $d-c$ bedingt, setzt man dennoch allgemein: $(a-b)(c-d)=(b-a)(d-c)$, da hier beim gliedweisen Ausmultiplicieren beidemale dieselben Theilzahlen in derselben Beziehung also auch dasselbe Ergebnis erhalten wird. Im unmöglichen Falle führen wir die Rechnung so durch, wie im möglichen. Folgerichtig haben wir die Zeichen $(ab-bc-$ $-ad+bd)$, $(a-b)(c-d)$ und $(b-a)(d-c)$ als gleichwertige Zahlzeichen anzusehen. Dasselbe gilt auch für die Zahlausdrücke $(a^2-2ab+b^2)$, $(a-b)^2$ und $(b-a)^2$. Setzt man nun $(a-b)=c$, so ist $b-a=-c$; und es ist das Zeichen $a^2-2ab+b^2$, das in allen Fällen eine mögliche Forderung bedeutet, gleichwertig mit c^2 und $-c^2$. Die durch das letzte Zeichen ausgesprochene Forderung ist in dem Falle, wo c eine reine Zahl vorstellt, ebenso unmöglich zu erfüllen, wie die durch die Zeichen $\sqrt{-3}$, 10^0, $c^x\sqrt{-1}$ ausgedrückten Zählungen. Trotzdem setzt man $(-7)^2=49$ und allgemein $(-c)^2=c^2$, um nur dem oben genannten Grundsatze treu zu bleiben. Umgekehrt muss man $\sqrt{x^2}=\pm x$ setzen.

Im innigen Zusammenhange mit dem Grundsatze der Permanenz der formalen Gesetze steht auch der Satz, dass jeder Gleichung $n$ten Grades n-Wurzeln, also jeder Gleichung zweiten Grades zwei Wurzeln entsprechen. Ohne diesen Grundsatz hätte nicht eine j e d e Gleichung $n$ten Grades n-Wurzeln, sondern nur e i n z e l n e Gleichungen. Die Wirkung dieses Grundsatzes zeigt sich schon sehr ausgesprochen bei quadratischen Gleichungen. In der Gleichung $(x-4)^2=9$ steht $x-4$ auch an Stelle von $4-x$, woraus sich für x die zwei Worte 7 und 1 ergeben. In der Gleichung $(y+1)^2=9$ bedeutet $y+1$ oder $1+y$ auch die unmögliche Forderung $(1-4)$; $(1-4)^2$ hat keinen Sinn, wohl aber $(4-1)^2$, dem es, dem obigen Grundsatz zuliebe, gleichgesetzt wird.

VI.

Zum Schlusse noch ein Wort über die Ausdrücke „negatives, imaginäres und complexes Ergebnis." Nimmt man in den Gleichungen $x + y = 9$, $x^2 + y^2 = 9$, $(x - m)^2 + (y - n)^2 = 9$ die Zahlen x, x^2 und $(x - m)^2$ größer als 9 an, so haben wir in allen drei Fällen links vom Gleichheitszeichen eine Differenz stehen. Die Zeichen y, y^2 und $(y - n)^2$ müssen eine Anzahl abzuziehender Einheiten vorstellen, sollen die gegebenen Gleichungen überhaupt einen Sinn haben. Genau dieses und nichts anderes sagen auch die Zeichen $-a$, $\pm\sqrt{-b}$ und $n \pm \sqrt{-c}$, womit man die resultierenden Werte von y darzustellen pflegt. Die üblichen geometrischen Deutungen der Zeichen $\pm\sqrt{-b}$ und $n \pm \sqrt{-c}$ sind so gut wie willkürlich und stehen im Widerspruch mit den Forderungen des logischen Denkens. Denn dieses geht nicht von den Zeichen zu den Begriffen, sondern umgekehrt von den Begriffen zu den Zeichen. Erst der Begriff, dann das Zeichen. Dieses ist bloß ein Mittel der Verständigung und steht in der Regel ohne jede innigere Beziehung zu seinem Begriffe. Es könnte hier vielleicht gesagt werden, dass die Zeichen $\pm\sqrt{-b}$ und $n \pm \sqrt{-c}$ aus Theilzeichen zusammengesetzt sind, deren Bedeutung uns vollkommen geläufig ist, und dass diese Bedeutungen Merkmale der aufzustellenden Begriffe seien. Wäre das der Fall, dann allerdings dürfte gegen die Berechtigung der üblichen geometrischen Deutungen nichts eingewendet werden. Nun aber liegen die Thatsachen anders; Beweis dafür, dass man erst lange nach Einführung des Zeichens $\sqrt{-1}$ auf seine geometrische Deutung verfallen ist. Durch diese Deutung ist die Mathematik um eine willkürliche Festsetzung reicher geworden; nachdem aber diese einmal gemacht war, konnte sie auch systemmäßig verwertet werden.

VII.

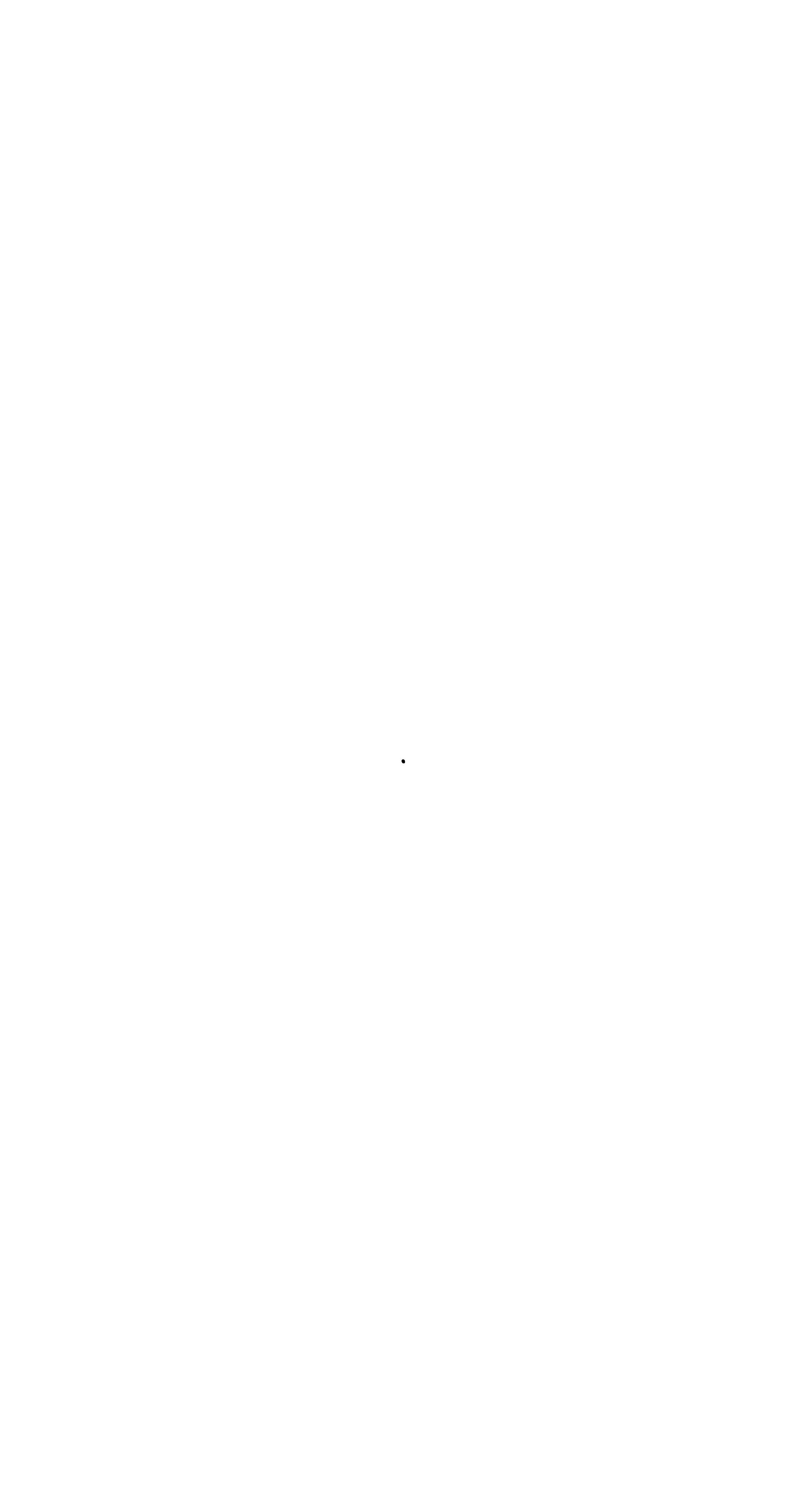
Wer die nöthigen Fachkenntnisse mitbringt, kann die vorstehenden Ausführungen leicht bedeutend vermehren. Sie sollen auf die wahren Schwierigkeiten hinleiten, die das Studium der Mathematik jedem Anfänger bereitet. Diese Schwierigkeiten liegen nicht, wie man allgemein annimmt, nur im Stoffe, sondern mehr noch in seiner eigenartigen Form. Den Satz $a-(b-c)=a-$ $-b+c$ wendet schon der zehnjährige Volksschüler nach einiger Übung mit Sicherheit an, ohne seine abstracte Form zu kennen;[1]) dem Mathematikbeflissenen aber macht er in dieser ihm neuen Form viel zu schaffen. Die einfachen und großen Gedanken, die die verschiedenen Zweige der angewandten Mathematik geschaffen haben, erfasst er leicht. In diesen großen Gedanken liegt ein hoher, bildender Wert. Gerade umgekehrt aber ist es mit den weitausgesponnenen Einzelheiten der reinen Mathematik. Sie bieten ihm wenig Stoff zum Denken, beleben nicht sein sittliches Gefühl, wirken nicht auf seine Gesinnung und bringen ihn auch nicht in innige Berührung mit den geläuterten Bestrebungen der Wirklichkeit; dafür aber ist ihre Aneignung sehr mühevoll

Der Schüler wird in die Mathematik meist schon in einem Alter eingeführt, wo ihm noch die prüfende Einsicht fehlt. Jedes Abweichen vom richtigen Wege rächt sich daher dort am fühlbarsten, wo die Wissenschaft nur darum vom Schüler gelernt wird, um einst wieder von ihm in der Schule gelehrt zu werden. Wie alles, was zu einseitig betrieben wird, einem baldigen Verfalle anheimfällt, so auch die Mathematik und ihre Darstellung in Laut und Schrift. Die Sprache der Mathematik muss gleich den neueren Sprachen als lebendiges, organisches Gebilde übermittelt werden. Der Mathematiker war lange genug der eifrigste Grammatiker. Der Unterricht in den lebenden Sprachen hat mit den Anschauungen der alten Sprachlehrer gebrochen; auch der Unterricht in der Mathematik hat neue Wege zu suchen. So wenig man schon logisch schließen kann, wenn man nur die abstracten Grundsätze der Einerleiheit, des Widerspruches und des aus-

[1]) $273 - 99 = 273 - (100 - 1) = 273 - 100 + 1.$

geschlossenen Dritten fließend auswendig weiß; so wenig lernt man mit Zahlen denken, wenn man immer ein dürres Regelwerk vorschiebt. Was der Schüler, um nur einen Fall anzuführen, bei den Rechenübungen mit Schlüssen ohne jedes Regelwerk gelernt hat, verlernt er bei der Anwendung der Regel, dass ein äußeres Glied einer Proportion bestimmt wird, indem man das Product der inneren Glieder durch das andere äußere Glied dividiert.

Die Mathematik hat wie alle Wissenschaften den letzten Zielen und höchsten Zwecken der Menschheit zu dienen. Dies wird sie um so besser thun, wenn man ihre Sprache, dieses Muster von Bündigkeit und Übersichtlichkeit, durch ihre lebendige Anwendung beherrschen gelernt hat. Dann erst wird die Beherrschung der Sprache der Mathematik mit der Beherrschung des Stoffes zusammenfallen; dann erst wird man mit Nutzen an der Weiterbildung dieser Sprache arbeiten.



II.

Zur Reform

des

analytisch-geometrischen Unterrichtes in den Mittelschulen.

Von

Hans Wittek,

Professor am Landes-Real- und Obergymnasium in Baden.

Mit einer Tafel.



Während der letzten 15 Jahre ist die Aufmerksamkeit der Lehrer der Mathematik an den österreichischen Mittelschulen in hohem Grade besonders der Ausgestaltung des Unterrichtes der analytischen Geometrie gewidmet gewesen.[1]) Durch die Reform des höheren Schulwesens in Preußen ist die analytische Geometrie als obligater Lehrgegenstand in Prima der

---

[1]) Die mir vorliegenden Arbeiten sind:

a) Abhandlungen in der Zeitschrift für das Realschulwesen (Wien):

Bd. IX, Dr. Franz Hočevar: Über die Anwendung von exacten Methoden auf die analytische Geometrie;

Bd. XI, Heinrich Drasch: Über die irrthümliche Auslegung einer Formel etc.;

" " Ludwig Ruszinszki: Zur Frage der irrthümlichen Auslegung etc.;

Bd. XII, Johann Morawetz: Die Sinnesgleichung der Geraden;

" " Eduard Grohmann: Unbestimmtheiten in den Anfangsgründen der a. G.;

" " Dr. Joh. Obermann: Über den Umfang der a. G. an Mittelschulen.

b) Gymnasialprogramme:

Dr. A. Wretschko: Bemerkungen über die Behandlung der a. G., Brünn, 1. d. Gymnasium 1887.

Heinrich Drasch: Vorschläge zu einer Reform der Behandlung der a. G. an der Mittelschule, Steyr, Oberrealsch. 1886/87 und 1887/88.

Wenzel Hofmann: Kritische Bemerkungen zu einigen Fragen der a. G. Wien, I. O. R. 1890.

Otto Adam: Beiträge zur a. G. in der Mittelschule, Wien, VI. Oberrealsch. 1890.

c) Lehrbücher:

Dr. A. Wretschko: Elemente der a. G., Brünn 1880 (Winiker).

Dr. R. Sonndorfer und Hermann Anton: Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen, I., 3, 3. Aufl. Wien 1885 (Braumüller).

Gymnasien eingeführt worden.[1]) Es erscheint zeitgemäß, die Resultate dieser Bestrebungen zusammenzufassen und der praktischen Ausführung näher zu bringen.

Als ich den Plan fasste, mich dieser Aufgabe zu unterziehen, wollte ich die unten angeführten, anregenden und viele interessante Details bergenden Arbeiten, die auch nicht ohne Beziehung zu einander entstanden sind — einige von ihnen haben geradezu polemischen Charakter —, in ihrem inneren Zusammenhange besprechen und im Anschlusse daran, gewissermaßen als Resultat der Untersuchung, positive Vorschläge über eine neue Organisation des Unterrichtes der analytischen Geometrie in der Mittelschule erstatten.

Die Beschränktheit des mir für diese Publication zugewiesenen Raumes zwang mich, meine Arbeit bedeutend abzukürzen und mich auf die Veröffentlichung meiner positiven Vorschläge zu beschränken. Ich habe meiner Darstellung die Gestalt einer Lehrbuchskizze gegeben — eines Lehrbuches deshalb, weil ich für jeden Gedanken, welchen ich auszusprechen und auszuführen beabsichtige, im Lehrbuche am leichtesten die passende Stelle und die passende Form fand, und weil sich auch die Beurtheilung von Seite des Lesers in dieser Gestalt, unter Berücksichtigung aller zu beachtenden Momente leichter vollzieht —, einer Lehrbuchskizze aber deshalb, weil ich dadurch nicht gezwungen war, alle Theile mit der gleichen Ausführlichkeit zu behandeln; jene Theile, auf welche sich die Reformvorschläge beziehen, wurden, um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen, mit besonderer Ausführlichkeit durchgeführt, während für manchen anderen Theil eine mehr andeutungsweise Behandlung

---

Dr. Fr. Ritter v. Močnik: Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen, 19. Aufl. Wien 1887 (Gerold).

A. Wapienik: Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen, Wien 1888 (Graeser).

Dr. Franz Hočevar: Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien, 2. Aufl. 1891 (F. Tempsky).

d) Die Instructionen des k. k. österr. Ministeriums für Cultus und Unterricht für den Unterricht: *α*) an Realschulen (1881), *β*) an Gymnasien (1884).

[1]) Diese Einführung veranlasste neue schulmäßige Bearbeitungen der a. G., von denen mir vorliegen:

Dr. W. Erler: Einleitung in die a. G., Berlin 1893 (Ferd. Dümmler).

Dr. Max Simon: Leitfaden der a. G. der Ebene, Berlin 1892 (Weidmann).

eintrat. Auch konnte ich mit Rücksicht auf den Leserkreis, für welchen diese Arbeit bestimmt ist, (mit wenigen Ausnahmen) davon Umgang nehmen, meinen Ausführungen Figuren beizufügen. Die Constructionsaufgaben endlich sind nur durch Schlagworte angedeutet, da ich alle hiehergehörigen Constructionsaufgaben in meinem Lehr- und Übungsbuche,[1]) S. 64—76, ausführlich behandelt habe. Zur Erleichterung der Orientierung habe ich endlich ein ausführliches Inhaltsverzeichnis angefügt.

Die in der vorliegenden Lehrbuchskizze enthaltenen Reformvorschläge betreffen:

a) Den Umfang der analytischen Geometrie an der Mittelschule. Hiezu ist zu bemerken, dass die Lehrbuchskizze den Umfang des Lehrstoffes nach der oberen Grenze festsetzt, wie er selbst für Realschulen ausreicht. Der Unterricht beschränkt sich auf das rechtwinkelige Parallel-Coordinatensystem und das Polar-Coordinatensystem. Solange der planimetrische Unterricht in der 5. Classe nicht obligatorisch verpflichtet ist, die Begriffe der harmonischen Theilung, Pol, Polare in seinen Begriffskreis zu ziehen, solange halte ich es nicht für angezeigt, von diesen Begriffen in einem Lehrbuche der analytischen Geometrie zum Zwecke der Theorie der Kegelschnittslinien Gebrauch zu machen; wohl aber ist es noch möglich, die Begriffe Potenz, Potenzgerade, Potenzcentrum in den Unterricht einzubeziehen, auch wenn sie im vorangegangenen planimetrischen Unterrichte nicht entwickelt wurden, denn sie ergeben sich bei Gelegenheit von Betrachtungen, die auch zu anderen Zwecken dienen, und es wird durch dieselben keine nennenswerte Belastung des Unterrichtsstoffes erzeugt. Auf die Betrachtung der Durchmesser-, Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte, auf eine gemeinsame Ableitung der Gleichung für die Ellipse, Hyperbel und Parabel, auf eine Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades ist die Lehrbuchskizze nicht eingegangen; man kann sich begnügen, den Zusammenhang der Kegelschnittslinien durch Vermittlung ihrer Scheitelgleichungen zu erkennen.

b) Die Anordnung des Lehrstoffes. Nachdem der Schüler die Begriffe einer Function und einer veränderlichen Größe, sowie die geometrische Darstellung der Functionen erfasst hat,

[1]) Lehr- und Übungsbuch für den geometrischen Unterricht in den unteren Gymnasialclassen, 2. Abth. 3. Aufl. Wien 1885 (Pichlers Witwe & Sohn).

[illegible] studieren.

[illegible] Theile der analytischen Geo- [illegible] von der gewöhnlichen Behand- [illegible] vereinfachende Darstellungs- [illegible] will ich an dieser Stelle nur kurz [illegible] der Bewegung zur Erzeugung der [illegible] Meiner Ansicht[1]) nach [illegible] geometrischen [illegible] der Qualität (Rich- [illegible] entstehenden [illegible] schon [illegible] werden. [illegible]

so werden die in diesen Disciplinen liegenden, reichlichen Schwierigkeiten durch die ungewohnten und erst nach vieler Übung zur vollen Sicherheit gelangenden modernen Anschauungsweisen vermehrt, wodurch leicht eine Überbürdung der Schüler hervorgerufen werden kann. Im planimetrischen Unterrichte jedoch wird — wenigstens am zweistufigen Gymnasium (in Österreich), wo der Schüler bereits im Untergymnasium in einem ersten Kreise in Planimetrie unterrichtet wurde —, die Einführung dieser Anschauungsweisen nicht nur keine Schwierigkeiten bereiten, sie wird vielmehr ermöglichen, die Thatsachen der Geometrie in voller Allgemeinheit darzustellen und wird das Interesse des Schülers durch die neuartige Behandlung eines ihm schon geläufigen Lehrstoffes erhöhen. Trägt man aber Bedenken, im planimetrischen Unterrichte der 5. Classe vom Richtungsgegensatze in einer Geraden, von positiven und negativen Winkeln, Dreiecken, Parallelogrammen u. s. w. zu sprechen, so würde ich auch empfehlen, gewisse „Unbestimmtheiten einiger Formeln der analytischen Geometrie“ zu ignorieren und Aufgabenkreise, in welchen diese Unbestimmtheiten störend wirken, ganz zu vermeiden.

In den Lehrbüchern der analytischen Geometrie ist es Sitte geworden, die Gleichung der geraden Linie in verschiedenen Formen und in jeder sehr ausführlich zu besprechen — diese Formen werden als I., II., III., IV. Form sogar besonders bezeichnet und benannt. Diesem Vorgange möchte ich nicht das Wort reden; es genügt, die Form $y = ax + b$, als die einfachste, für alle Rechnungen bequemste genau zu erörtern und im Schüler die Erkenntnis wachzurufen, dass jede Gleichung, ohne Änderung ihrer geometrischen Bedeutung, mit beliebigen constanten Factoren multipliciert werden darf, dass also aus der gegebenen Gleichung einer Linie eine unbegrenzte Anzahl anderer Gleichungen abgeleitet werden kann, welche dieselbe Linie darstellen. Hiebei ist jedoch die Multiplication mit einem negativen Factor zu beachten, wenn der Bewegungssinn des erzeugenden Punktes der Linie in Betracht kommt. So viele Vorzüge die sogenannte Normalform der Geraden hat, so eignet sie sich doch nicht, die Grundlage der Betrachtungen im ersten Unterrichte zu bilden, da sie, wenn auch nur scheinbar, drei Constanten enthält, und weil p keine so einfache Bedeutung hat wie b, und endlich letzteres durch sein Zeichen sicher eindeutig bestimmt ist.

d) Die Bezeichnungen in der analytischen Geometrie. Es ist eine allgemein anerkannte Thatsache, dass das Verständnis der analytischen Geometrie durch eine geeignete Wahl der Bezeichnungen sehr gefördert werden kann; eine übertriebene Sorge um Deutlichkeit ist aber gerade auf dieser Unterrichtsstufe nicht am Platze. So kann ich z. B. nicht beistimmen, wenn die laufenden Coordinaten verschiedener, aber auf dasselbe Coordinatensystem bezogener Linien durch verschiedene Zeichen x, y; ξ, η; X, Y u. s. w. unterschieden werden; dagegen halte ich es für geboten, die laufenden Coordinaten eines geometrischen Gebildes, bezogen auf verschiedene Coordinatensysteme, durch solche verschiedene Zeichen (ohne Index) zu bezeichnen. Ein (oder mehrere) Index (Strich) soll stets die Coordinaten eines bestimmten bekannten oder unbekannten Punktes von jenen des laufenden Punktes unterscheiden.

Möge die vorliegende Lehrbuchskizze dazu beitragen, die in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie noch vorhandenen Unklarheiten zu beseitigen, und eine Vereinfachung dieses so wichtigen Unterrichtszweiges anbahnen.

I. Vorbegriffe aus der Geometrie und Arithmetik.

A. 1. In jeder Geraden unterscheidet man zwei entgegengesetzte Richtungen. In der Vorstellung der Geraden wird vom Gegensatz der Richtungen abstrahiert; eine nach Richtung bestimmte Gerade heißt Strahl. Jeder Punkt der Geraden theilt dieselbe in zwei Theile (Halbstrahlen) von entgegengesetzter Richtung (Strahl und Gegenstrahl).

Auch in jeder Strecke sind zwei entgegengesetzte Richtungen zu unterscheiden Anfangspunkt, Endpunkt der Strecke. Die Richtungen werden als positiv und negativ unterschieden. $AB = -BA$.

Sind [illegible] Punkte einer Geraden, so ist $AB + BA = 0$; [illegible] $CD = AD$ [illegible] welcher Reihenfolge auch A, B, [illegible] Bewegung eines Punktes.

2. Jeder Strahl theilt die Ebene in zwei Theile Halbebenen. [illegible] liegen. [illegible] am

linken Ufer die positive, jene am rechten Ufer die negative zu nennen. Jeder Punkt der $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ Halbebene hat vom Strahle einen $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ Abstand.

Wird die Ebene durch eine Gerade in zwei Theile getheilt, so ist es unentschieden, welcher Theil der Ebene positiv genannt werden soll. Die Abstände der Punkte von der Geraden haben daher kein bestimmtes Vorzeichen; sie sind nur der Größe nach (absolut) bestimmbar. Die Gerade ist ein zweideutiger Begriff.

3. Zwei sich schneidende Strahlen bilden einen Winkel; man unterscheidet den Anfangsschenkel und den Endschenkel. Man hat sich gewöhnt, die Größe eines Winkels durch Drehung des Strahles aus seiner Anfangslage in seine Endlage in dem der Drehung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne zu messen. Positiver Drehungssinn. Für die Bezeichnung des Winkels genügt die Angabe der beiden Schenkel $(S_1 S_2)$; es ist aber oft bequem, zur Bezeichnung auch den Scheitel zu verwenden $(\measuredangle\ S_1 O S_2)$.

Die Windfahne dreht sich im positiven Sinne, wenn sie der Reihe nach die Richtungen N, NW, W, SW, S u. s. f. angibt.

4. Der Winkel zweier Strahlen kann auf zwei Arten entstanden gedacht werden: im positiven und im negativen Drehungssinne. Ist der Winkel im positiven Drehungsinne $\begin{Bmatrix}\text{hohl}\\ \text{erhaben}\end{Bmatrix}$, so ist er im negativen Drehungssinne $\begin{Bmatrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{Bmatrix}$.

Ist $(S_1 S_2)$ im positiven, $(S_2 S_1)$ im negativen Drehungssinne gedacht, so ist $(S_1 S_2) + (S_2 S_1) = 0^0$; sind $(S_1 S_2)$ und $(S_2 S_1)$ beide im positiven Drehungssinne aufgefasst, so ist $(S_1 S_2) + (S_2 S_1) = 360^0$.

Da der Strahl bei seiner Drehung aus der Anfangslage S_1 in die Endlage S_2 auch mehrere volle Umdrehungen zurückgelegt haben kann, so ist der Begriff $(S_1 S_2)$ ein vieldeutiger. Bezeichnet α die Größe der Drehung, welche der Strahl bei einfachem Übergange von S_1 nach S_2 beschreibt, so ist allgemein: $(S_1 S_2) = n \cdot 360^0 + \alpha$.

Sind A, B, C, D . . . mehrere Strahlen der Ebene, welche den Punkt O gemeinsam haben, so ist bei durchwegs positiver Drehung allgemein:

$$(AB) + (BC) = (AC);\ (AB) + (BC) + (CA) = n \cdot 360^0;$$

$$(AB) + (BC) + (CD) = (AD) \text{ u. s. f., wobei } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wenn nicht das Gegentheil besonders verlangt ist, beschränkt man sich auf Winkel, welche kleiner als 360^0 sind und auf den positiven Drehungssinn; in diesem Falle ist dann $(S_1 S_2)$ ein eindeutiger Begriff. Man theilt die Winkel ihrer Größe nach in vier Gruppen (Quadranten): $0^0 < \alpha < 90^0$,

1. Quadr.; $90^0 < \alpha < 180^0$, 2. Quadr.; $180^0 < \alpha < 270^0$, 3. Quadr; $270^0 < \alpha < 360^0$, 4. Quadrant. Die Winkel 0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0 sind Grenzwinkel.

Zusatz. Es gibt mathematische Schriftsteller, welche die Winkel im 3. und 4. Quadranten mit negativem Drehungssinne auffassen; bei diesen sind Winkel im 3. Quadranten negativ stumpf, jene im 4. Quadranten negativ spitz.

5. Zwei sich schneidende Gerade bilden vier hohle Winkel, von denen je zwei gleich groß sind; in gleicher Weise bilden sie auch vier erhabene Winkel. Combiniert man die in den Geraden möglichen Richtungen und achtet man darauf, dass jeder Schenkel als Anfangsschenkel betrachtet werden kann, so erhält man bei positiver Drehungsrichtung 8 Winkel, von denen je zwei gleich groß sind. Ist α^0 die Größe des spitzen Winkels, so sind $180^0-\alpha^0$, $180^0+\alpha^0$, $360^0-\alpha^0$ die übrigen Größen (Fig. 1, *a*, *b*).

Zusatz. Wählt man nur hohle Winkel, aber mit positivem und mit negativem Drehungssinne, so haben die Winkel, welche durch zwei sich schneidende Gerade entstehen, die Größen α^0, $180^0-\alpha^0$, $-(180^0-\alpha^0)$, $-\alpha^0$.

Aufgabe. Wie viele Winkel entstehen, wenn ein Strahl durch eine Gerade geschnitten wird, und wenn der Strahl der Anfangsschenkel aller Winkel ist? Antw. Zwei, ein hohler und ein erhabener; α^0, $180^0+\alpha^0$. (Fig. 1, *c*.)

6. Zieht man durch den Punkt A der Ebene zum Strahle S dieser Ebene die Normale, so sind in dieser zwei Richtungen zu unterscheiden. Alle Punkte der Normale, welche am linken Ufer des Strahles liegen, bilden den positiven Theil der Normale; dieser positive Normalstrahl bildet mit S (als Anfangsschenkel) einen Winkel $= 90^0$.

Der negative Normalstrahl bildet mit S einen Winkel $= 270^0$ (-90^0).

7. Jede Gruppe von drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden, bildet ein Dreieck. Jede dieser drei Geraden enthält zwei Richtungen; es ist vortheilhaft, in diesen Geraden die positive Richtung so anzunehmen, dass jeder Punkt im Innern des Dreieckes am linken Ufer jeder Seite liegt; jeder Eckpunkt des Dreieckes hat von dem ihm gegenüberliegenden Strahle einen positiven Abstand.

Die Aufeinanderfolge der Ecken des Dreieckes entscheidet über den Sinn des Dreieckes. Im Dreiecke ABC liegt C am linken Ufer der Seite AB; die Seite AB (und ebenso jede folgende) ist in der Richtung des positiv angenommenen Strahles durchlaufen. Das Dreieck ist positiv. Im Dreiecke BAC liegt C am rechten Ufer der Seite BA; die Seite BA (ebenso AC,

CB) ist in der dem positiven Strahl entgegengesetzten Richtung durchlaufen. Das Dreieck ist negativ.

Das Dreieck ABC hat positive Seiten und positive Höhen; seine Fläche ist positiv. Das Dreieck BAC hat negative Seiten und positive Höhen; die Seiten sind nämlich den positiv angenommenen Strahlen entgegengesetzt gerichtet, die Eckpunkte aber liegen am linken Ufer der als positiv angenommenen Strahlen. Die Fläche des Dreieckes BAC ist negativ.

Die Winkel der Richtungen je zweier aufeinanderfolgender Seiten sind die Außenwinkel des Dreieckes; ihre Nebenwinkel sind die Winkel des Dreieckes. Werden im negativen Dreiecke die Dreieckswinkel im negativen Sinne gezählt, dann ist die Summe jedes Außenwinkels und des ihm anliegenden Dreieckswinkels 180°; werden die Dreieckswinkel positiv gezählt, so sind sie erhabene Winkel und obige Summe beträgt $360^0 + 180^0$. (Fig. 2.)

Erzeugung des Dreieckes durch drehende Bewegung des Strahles um drei Drehungspunkte.

Zusatz. Man kann im negativen Dreiecke auch die Seiten als positiv annehmen; dann sind die Höhen negativ; in diesem Falle wäre es bequem, die Außenwinkel und die Dreieckswinkel im negativen Sinne zu zählen. (Fig. 2, *c*.)

8. Jede Gruppe von n Geraden, von welchen sich nie mehr als zwei in einem Punkte schneiden, nennt man ein vollständiges n-seit; diese n Geraden haben $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnittspunkte, und durch je zwei Durchschnittspunkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, kann man je eine Diagonale legen. Seiten und Ecken des vollständigen Vielseits.

Jede Figur, welche n Ecken und n Seiten hat, heißt ein einfaches n-seit oder n-eck. Man unterscheidet drei Hauptarten einfacher Vielecke: α) die Vielecke mit lauter ausspringenden Ecken (hohlen Vieleckswinkeln); β) die Vielecke mit einspringenden Ecken; γ) die verschränkten Vielecke.

Jede der n Geraden des Vieleckes enthält zwei Richtungen; es ist vortheilhaft, das Vieleck durch Bewegung eines Punktes beschrieben zu denken und die positive Richtung in den Geraden (Strahlen) so zu wählen, dass jeder Punkt im Inneren der unter α) und β) genannten Vielecke am linken Ufer jedes der n Strahlen liegt. Positives Vieleck, negatives Vieleck. Das verschränkte Vieleck (γ) besteht aus mehreren Theilen, von welchen einige positiv, die anderen negativ sind; die algebraische Summe dieser Theile ist die Größe der Fläche des verschränkten Vieleckes.

Zusatz. In jeder linearen Figur lässt sich ein positiver und ein negativer Sinn unterscheiden. Sinn der Bewegung des die Figur erzeugenden Punktes.

Jedes Vieleck mit lauter ausspringenden Ecken kann durch n gleichgerichtete (positive) Drehungen eines Strahles um n verschiedene Drehungspunkte dargestellt werden. Der Strahl beschreibt eine volle Umdrehung, die Theildrehungen sind die Außenwinkel des Vieleckes. Erzeugung der anderen Arten Vielecke durch Drehung eines Strahles.

B. 1. Wenn zwei veränderliche Größen (Zahlen) miteinander so zusammenhängen, dass jedem willkürlich angenommenen Werte der einen Größe (Zahl) ein bestimmter, also nicht mehr willkürlicher Wert der anderen Größe (Zahl) entspricht, so ist letztere eine Function der ersteren Größe (Zahl). Man unterscheidet die willkürlich Veränderliche und die abhängig Veränderliche.

Der Preis einer Ware ist von der Quantität der Ware abhängig, er ist eine Function der Quantität. Jede Sehne des Kreises ist von ihrem Centralabstande abhängig, sie ist eine Function des Centralabstandes. Jeder Sinus ist von der Größe seines Argumentes (Winkels) abhängig, er ist eine Function des Argumentes. Der Weg bei einer gleichförmigen oder bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist eine Function der Zeit. Die Spannkraft des Wasserdampfes ist eine Function der Temperatur. Der Schüler bringe andere Beispiele.

2. Wenn man die veränderlichen Größen (Zahlen) durch eine Gleichung so verbinden kann, dass aus dieser Gleichung für jeden Wert der willkürlichen Veränderlichen der ihm entsprechende Wert der abhängigen Veränderlichen berechnet werden kann, so stellt diese Gleichung das Gesetz der Abhängigkeit oder die Art der Function dar. Diese Gleichung ist eine unbestimmte. Man hat sich gewöhnt, die willkürlich Veränderliche mit x, die abhängig Veränderliche mit y, unveränderliche Zahlen (Constanten) mit a, b, c... zu bezeichnen. Implicite Form, explicite Form der Gleichung (Function).

$$f(x, y) = 0, \quad y = f(x).$$

$y = ax$ stellt das Gesetz der Abhängigkeit zwischen Preis und Quantität einer Ware dar; a ist eine Constante, sie bedeutet den Preis der Quantitätseinheit. $y - ax = 0$ ist die implicite Form.

$y = cx$, $y = \frac{1}{2}bx^2$ stellt das Gesetz der Abhängigkeit zwischen Weg und Zeit bei der gleichförmigen (gleichförmig beschleunigten) Bewegung dar; c und b sind Constanten. Bedeutung der Constanten. Implicite Formen der [illegible] Gleichungen.

Zusatz. Es versteht sich von selbst, dass man aus der Gleichung auch [illegible] Werte der abhängigen Veränderlichen zugehörigen Wert der willkürlichen Veränderlichen berechnen kann. [illegible] Umkehrungs- [illegible] mehr- [illegible]

Beispiele. Für jeden bestimmten Betrag erhält man eine bestimmte Quantität der Ware. Zu jedem Sinus kann man das Argument bestimmen. Für jeden Weg einer Bewegung kann man die erforderliche Zeit berechnen, u. s. f.

3. Wenn man eine Reihe von zusammengehörigen Wertepaaren zweier Veränderlichen kennt, so kann man das Gesetz der Abhängigkeit auch bildlich darstellen und dadurch veranschaulichen. (Geometrisches Bild einer Function.)

α) Um $y = \sin x$ darzustellen, bestimme man auf einer horizontalen Geraden von O aus in gleichen Abständen (zu beiden Seiten von O) Punkte und bezeichne dieselben der Reihe nach mit 10, 20, 30 . . und in entgegengesetzter Richtung mit — 10, — 20, — 30 . . .; in jedem dieser Punkte errichte man die Normale und trage auf dieser den entsprechenden Wert $\sin 10^0$, $\sin 20^0$, . . . $\sin(-10^0)$, . . . als Strecke mit beliebiger Einheit auf, und zwar die positiven Werte nach aufwärts, die negativen nach abwärts. Verbindet man nun die Endpunkte der aufeinander folgenden Normalen, so erhält man einen Linienzug, welcher die wichtigsten Eigenschaften der Function $y = \sin x$ veranschaulicht. Sinuslinie. Z. B. die Zunahme des Sinus bis 90^0; die Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten; die Richtigkeit der Gleichungen: $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(360^0 + \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$; die größten und kleinsten Werte des Sinus u. a. m. Gewöhnlich wählt man die Einheit so, dass die Entfernung $0^0 - 180^0 = \pi$.

β) Man bestimme von O aus auf der Geraden G in gleichen Abständen 24 Punkte und bezeichne dieselben mit 1, 2 . . . 24; in O und in jedem folgenden Punkte errichte man Normalen und trage auf denselben der Reihe nach die Temperaturen (Barometerstände, relativen Feuchtigkeiten . . .) um Mittag (0 Uhr), 1 Uhr, 2 Uhr . . . 12 Uhr (Mitternacht), 13 Uhr (1 Uhr morgens) u. s. f. als Strecken auf. Hiedurch erhält man einen Linienzug, welcher das Gesetz der Abhängigkeit der Temperatur (Luftdruck oder relative Feuchtigkeit) von der Stunde des Tages veranschaulicht. Temperaturcurve. Discussion dieser Curve.

γ) Andere Beispiele: Geometrische Darstellung des Gesetzes der

$$\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{verkehrten}\end{matrix}\right\} \text{Proportionalität} \left\{\begin{matrix} y = ax, & y - ax = 0.\\ y = \dfrac{a}{x}, & xy - a = 0.\end{matrix}\right\}$$

Anmerkung. Für den Unterricht empfiehlt es sich, Wandtafeln, welche geometrische Bilder verschiedener Abhängigkeitsgesetze enthalten, zu verwenden.

4. Der Grundgedanke der analytischen Geometrie der Ebene ist folgender: Jedes zusammengehörige Zahlenpaar zweier Veränderlichen ist durch einen Punkt in der Ebene darstellbar, und umgekehrt hat jeder Punkt der Ebene ein Zahlenpaar, das durch die Lage des Punktes bestimmt ist. Jede Änderung in der Lage des Punktes ändert die Werte des ihn bestimmenden Zahlenpaares (seiner Coordinaten), und umgekehrt: jede Änderung in der Lage des Punktes ist eine Folge der Veränderung seiner

Coordinaten; der Punkt beschreibt bei seiner Bewegung einen Linienzug, welcher das Gesetz der Abhängigkeit der Veränderlichen, die Art der Function veranschaulicht. Es ergibt sich die doppelte Aufgabe: *a*) zu einem durch seine Gleichung gegebenen Abhängigkeitsgesetze zweier Veränderlichen das entsprechende geometrische Bild zu finden und die Eigenschaften desselben zu untersuchen, *b*) zu einer durch das geometrische Bild dargestellten Function zweier Veränderlichen die entsprechende Gleichung zu finden. Unter allen geometrischen Gebilden befolgen die Gerade und die Kegelschnittslinien die einfachsten Gesetze. Im Folgenden werden die Eigenschaften dieser geometrischen Gebilde nach den Methoden der analytischen Geometrie untersucht werden.

II. Die Coordinatensysteme.

1. Jeder Punkt P des Strahles X hat vom Punkte O dieses Strahles eine bestimmte positive oder negative Entfernung (OP). Misst man diese Entfernung mit (irgend) einer Einheit, so kann jeder Punkt des Strahles durch eine positive oder negative Zahl ausgedrückt werden; dieselbe kann eine ganze, gebrochene oder auch eine irrationale Zahl sein.

2. Die Bestimmung der Lage eines Punktes P in der Ebene geschieht gewöhnlich, indem man denselben auf einen Strahl X der Ebene, auf welchem ein fester Punkt O angenommen ist, projiciert. Diesen festen Strahl X nennt man Abscissenstrahl (Abscissenachse), den festen Punkt O nennt man Ursprung. Den Abstand des Punktes P vom Abscissenstrahl nennt man seine Ordinate ($P'P$), den Abstand der Projection P' des Punktes vom Ursprung nennt man die Abscisse (OP') des Punktes. Die Abscisse und die Ordinate heißen die Coordinaten des Punktes. Die Ordinate des Punktes ist positiv, wenn der Punkt am linken Ufer des Abscissenstrahles liegt; die Abscisse ist positiv, wenn die Strecke in der Richtung des Abscissenstrahles zu zählen ist. Beide Coordinaten können ganze, gebrochene oder irrationale Zahlen sein. Durch imaginäre oder complexe Zahlen wird kein Punkt der Ebene dargestellt.

Um vom Ursprung zum Punkte (P) zu gelangen, wird man im Abscissenstrahl X bis zu seiner Projection (P') und von da in normaler Richtung bis zum Punkte (P) selbst gehen. Der Streckenzug $OP'P$, welcher aus der Abscisse OP' und der Ordinate $P'P$ besteht, bestimmt die Lage des Punktes

eindeutig. Man hat sich gewöhnt, die Abscissen mit x, die Ordinaten mit y zu bezeichnen und unterscheidet die Coordinaten verschiedener Punkte durch Indices. Man schreibt: $A(x_1, y_1)$ und spricht: Punkt A bestimmt durch seine Coordinaten x_1 und y_1, wobei die Abscisse immer vorangesetzt wird. Der Ursprung hat die Coordinaten $0, 0$. $O(0, 0)$.

Zieht man durch den Ursprung zur Abscissenachse die Normale, so zerfällt die Ebene in vier Theile (Quadranten). Alle Punkte im {I., II., III., IV.} Quadranten haben {positive, negative, negative, positive} Abscissen und {positive, positive, negative, negative} Ordinaten.

Quadranten	Abscissen	Ordinaten
I.	positive	positive
II.	negative	positive
III.	negative	negative
IV.	positive	negative

Die Normale zur Abscissenachse wird Ordinatenachse genannt; beide Achsen bilden das **Coordinatensystem**. Da die Achsen zu einander normal sind, ist das System rechtwinkelig; da die Ordinate jedes Punktes zur Ordinatenachse parallel ist, heißt es ein **Parallel-Coordinatensystem**. (Mitunter werden auch schiefwinklige Parallelcoordinaten verwendet.)

Alle Punkte der Ordinatenachse, die am linken Ufer der Abscissenachse liegen, haben positive Abstände vom Ursprung; ihre Gesammtheit bildet den positiven Theil (Strahl) der Ordinatenachse.

Entscheidend für das Coordinatensystem ist die Lage und Richtung des Abscissenstrahles und die Lage des Ursprunges; die Annahme der Ordinatenachse ist eigentlich überflüssig, sie bietet jedoch manche Bequemlichkeit.

Anmerkung. Manche Schriftsteller nennen „Abscisse des Punktes" seinen Abstand von der Ordinatenachse. Diese Begriffsbestimmung ist von unserem Standpunkte nicht annehmbar, da ein Punkt im 1. Quadranten am rechten Ufer der Coordinatenachse liegt; die Bestimmung der Abscisse als Entfernung der Projection des Punktes vom Ursprung ist die für uns maßgebende, und die Entfernung des Punktes von der Ordinatenachse bedeutet das Entgegengesetzte seiner Abscisse.

Aufgabe 1. Den Punkt A (3, 2) der Ebene zu construieren.

Man zieht den Abscissenstrahl X und wählt auf demselben O; von O aus trägt man drei (beliebige) Einheiten in positiver Richtung auf und erhält A', in A' errichtet man die Normale und trägt auf dem positiven Normalstrahl von A' aus zwei Einheiten auf und erhält A. Die Einheit der Ordinaten ist mit jener der Abscissen identisch. (Bequem ist es, ein in Quadraten liniertes Blatt zu verwenden.)

Construiere: $B(3, 5)$, $C(3, -5)$, $D(-3, 5)$, $E(-3, -5)$, $F(0, 2)$, $G(0, -2)$, $H(3, 0)$, $I(-3, 0)$.

Zusatz. Die Abscissenachse wird zumeist horizontal, die positive Richtung rechts vom Beschauer gewählt; es ist für den Anfänger sehr vortheilhaft, die Abscissenachse auch in anderen Lagen und in anderer Richtung anzunehmen.

Aufgabe 2. Den Abstand zweier Punkte zu bestimmen.

a) Es sei $A\ (x_1, 0)$ und $B\ (x_2, 0)$.

Für die Strecke $\overline{AB}$ ist B der Endpunkt; es ist also $\overline{AB} = x_2 - x_1$ und $\overline{BA} = x_1 - x_2$. Der Abstand der beiden Punkte ist der Unterschied der Abscisse des Endpunktes und des Anfangspunktes. Abscissendifferenz.

b) Es sei $A\ (0, y_1)$, $B\ (0, y_2)$.

$\overline{AB} = y_2 - y_1$, $\overline{BA} = y_1 - y_2$. Ordinatendifferenz.

c) Es sei $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$.

$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Aus dieser Gleichung lässt sich nur der absolute Wert des Abstandes der zwei Punkte bestimmen. Die Strecke $\overline{AB}$ ist positiv, wenn sie ihrer Richtung nach mit der Richtung des Strahles übereinstimmt, dessen Theil sie ist. (Vergl. *I, A*, 7 über die Seiten des negativen Dreieckes.) Die Abscissendifferenz $x_2 - x_1$ ist die Projection der Strecke $\overline{AB}$ auf den Abscissenstrahl, wobei $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$.

Aufgabe 3. Die Coordinaten des Halbierungspunktes (M) einer Strecke zu bestimmen.

a) Es sei $A\ (x_1, 0)$, $B\ (x_2, 0)$; dann ist $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$.

b) Es sei $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_1, y_2)$; dann ist $M\left(x_1, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

c) Es sei $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$; dann ist $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Aufgabe 4. Die Fläche des Dreieckes ABC zu bestimmen, wenn $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$.

$$F = AA'C'C + CC'B'B - AA'B'B = AA'C'C + CC'B'B + BB'A'A.$$
$$F = \tfrac{1}{2}[(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)]$$
$$F = \tfrac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_1)(x_3 - x_1)]$$
$$F = \tfrac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Ist $F = 0$, so liegen die drei Punkte in einer Geraden.

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

ist die Bedingung dafür, dass drei Punkte in einer Geraden liegen.

2. Zur Bestimmung der Lage des Punktes A in der Ebene gegen den festen Strahl X mit dem festen Punkt O kann man auch gelangen, wenn man die Strecke $\overline{OA}$ und den Winkel XOA misst. Den festen Strahl X nennt man die Polarachse, O den Pol des Coordinatensystems. Polar-Coordinatensystem. Die Strecke $\overline{OA}$ heißt der Leitstrahl des Punktes A, der Winkel XOA der Polarwinkel (Anomalie); beide bilden die Polarcoordinaten des Punktes A. Man bezeichnet $\overline{OA}$ mit ϱ, $\measuredangle\, XOA$ mit φ; $A\ (\varrho, \varphi)$. Im Polar-Coordinatensystem haben

die Coordinaten positiven Sinn, die Polarwinkel werden von 0° bis 360° gezählt.

Wenn in einer Gleichung für ein bestimmtes φ ein negativer Wert des ϱ resultiert, so zeigt dieselbe an, dass auf dem Strahle (φ) kein Punkt der Function liegt, wohl aber auf dem Gegenstrahle, dessen φ um 180° größer (oder kleiner) ist.

3. Wenn der Pol und die Polarachse eines Polar-Coordinatensystems zugleich Ursprung und Abscissenstrahl eines rechtwinkeligen Parallel-Coordinatensystems sind, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$A\ (\varrho_1,\ \varphi_1) \text{ und zugleich } A\ (x_1,\ y_1).$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varrho_1 \cos \varphi_1 \\ y_1 &= \varrho_1 \sin \varphi_1 \end{aligned}\right\}; \quad \left\{\begin{aligned} &\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ &\sin \varphi_1 = \frac{y_1}{\varrho_1},\ \cos \varphi_1 = \frac{x_1}{\varrho_1},\ tg\,\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}. \end{aligned}\right.$$

ϱ_1 ist eine absolute Zahl. φ_1 bestimmt man am besten aus der Gleichung $tg\,\varphi_1$; der Quadrant des Winkels φ_1 ergibt sich durch gleichzeitige Berücksichtigung der Vorzeichen von x_1 und y_1, respective von $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$.

4. Man hat sich bei der geometrischen Darstellung der Functionen gewöhnt, die willkürlichen Veränderlichen als Abscissen (Polarwinkel), die abhängigen Veränderlichen als Ordinaten (Leitstrahlen) aufzutragen. Jedem zusammengehörigen Wertepaare der Veränderlichen entspricht ein Punkt der Ebene; der Inbegriff aller möglichen der Function entsprechenden Punkte bestimmt eine Linie als geometrisches Bild der Function. Diese Linie denkt man sich durch die Bewegung eines Punktes erzeugt und nennt diesen Punkt den laufenden Punkt, seine Coordinaten die laufenden Coordinaten; die laufenden Coordinaten werden stets mit x und y (ohne Index) bezeichnet (ϱ, φ). Um die zusammengehörigen Coordinaten eines bestimmten, also festen Punktes zu bezeichnen, versieht man x und y (ϱ, φ) mit Indices oder Strichen. Z. B. $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$ oder $A\ (x',\ y')$, $B\ (x'',\ y'')$. Entsprechen in einer mehrdeutigen Function einem bestimmten x mehrere y, so ist es vortheilhaft, mehrere Indices zu verwenden. Z. B. $A\ (x_1,\ y_{1,1})$, $B\ (x_1,\ y_{1,2})$ oder auch $A\ (x',\ y'_1)$, $B\ (x',\ y'_2)$. — $A\ (\varphi_1,\ \varrho_1)$; $A\ (\varphi_1,\ \varrho_{1,1})$, $B\ (\varphi_1,\ \varrho_{1,2})$.

III. Die geometrischen Örter.

A. 1. Der geometrische Ort (abgekürzt: g. O.) **des Punktes, dessen Ordinate der Abscisse proportional ist, ist eine durch den Ursprung gezogene Gerade.**

Es seien A, B, C,... Punkte, deren Ordinaten den Abscissen proportional sind, also: $A'A : B'B : C'C : \ldots = OA' : OB' : OC' \ldots$ oder $A'A : OA' = B'B : OB' = \ldots = a$; dann sind die Dreiecke AOA', BOB', $COC' \ldots$ einander ähnlich. Die Punkte O, A, B, C,... liegen auf einer geraden Linie.

2. Die Gleichung dieses g. O. ist $y = ax$, wobei die Constante a der Proportionalitätsfactor ist. Da $\frac{A'A}{OA'} = tg\ \alpha$ ist, so ist $a = tg\ \alpha$, und α der (hohle) Winkel, den die Gerade mit der Abscissenachse bildet. Man nennt a den **Richtungsfactor** der Geraden. Richtungswinkel der Geraden.

Gemäß I, A, 5, Aufg. bildet jede Gerade mit der Abscissenachse zwei Winkel: einen hohlen und einen erhabenen; misst der hohle α^0, so misst der erhabene $180^0 + \alpha^0$. Nun ist $\operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$. Durch die Gleichung $y = ax$ ist die Gerade eindeutig bestimmt, weil es nur eine Gerade gibt, welche mit dem Abscissenstrahle die Winkel α^0 und $180^0 + \alpha^0$ bildet; durch die Gleichung bleibt es jedoch unentschieden, ob der Punkt die Gerade in diesem oder im entgegengesetzten Sinne beschreibt. In Bezug auf die Strahlen, welche in der Geraden liegen, ist die Gleichung zweideutig.

3. **Die Constante a kann jede beliebige positive oder negative Zahl sein. Es sind zwei Hauptlagen der Geraden zu unterscheiden, jene mit positivem und jene mit negativem a. Wir wollen die Geraden mit positivem a die Geraden der ersten Hauptlage, jene mit negativem a die Geraden der zweiten Hauptlage nennen. Die Geraden mit $a = 0$ und $a = \infty$ bilden die Grenzen der beiden Hauptlagen; dieselben fallen in die beiden Achsen des Coordinatensystems.**

Ist a ein Bruch, z. B. $\frac{m}{n}$, so ist $y = \frac{m}{n} x$; man gibt derselben die Form $ny = mx$ oder $ny - mx = o$. Umgekehrt[1]) stellt jede Gleichung $Ay + Bx = o$ eine durch den Ursprung gezogene Gerade vor; es ist $y = -\frac{B}{A} x$, also $-\frac{B}{A} = a$.

Aufgabe 1. Construiere die Gerade G, deren Gleichung $y = 2x$ ist, oder kurz die Gerade $G\,(y = 2x)$.

[1]) Diese Umkehrung bedarf keines besonderen Beweises. Vergl. hiezu meine Abhandlung über den Hauber'schen Satz, 14. Progr. des n. ö. Landes-Real- und Obergymnasiums in Horn. 1885/86.

a) Mittels der Gleichung $y = 2x$ kann man unzählig viele zusammengehörige Wertepaare der beiden Veränderlichen bestimmen und dieselben durch Punkte in der Ebene darstellen; diese Punkte werden in ihrer Gesammtheit die Gerade G bilden. Z. B. $O(0, 0)$; $A(3, 6)$; $B(5, 10)$; $C(-1, -2)$; $D(-2, -4)$; $E(-3, -6)$ ...

b) Da die Gerade G durch den Ursprung $O(0, 0)$ geht, so ist noch die Kenntnis eines Punktes nöthig, um die Gerade mit dem Lineal ziehen zu können. $A(3, 6)$; verbinde O mit A durch eine Gerade.

Aufgabe 2. Welchen Winkel bildet die Gerade G ($y = 2x$) mit dem Abscissenstrahl? Richtungswinkel.

$a = 2$, d. h. $\log tg\, \alpha = 0 \cdot 30103$; es ist also $\alpha = 63^0\, 26'\, 5''$. G bildet also mit X die Winkel $63^0\, 26'\, 5''$ und $243^0\, 26'\, 5''$.

Aufgabe 3. Die Gleichung der Geraden G zu finden, welche mit dem Abscissenstrahl den Winkel 225^0 bildet (Umkehrung der Aufgabe 2).

Die Gerade bildet mit X auch den Winkel $225^0 - 180^0 = 45^0$. $tg\, 45^0 = 1$. $y = x$ ist die gesuchte Gerade; sie ist der g. O. des Punktes, dessen Ordinate ebenso groß ist als seine Abscisse. Weitere Aufgaben für $\alpha = 30^0\, (210^0)$, $60^0\, (240^0)$, $120^0\, (300^0)$, $135^0\, (315^0)$, $150^0\, (330^0)$.

4. Für jeden Punkt der Geraden G ($y = ax$) ist die Ordinate ein a-faches der Abscisse; verschiebt man die Gerade parallel zu ihrer gegenwärtigen Lage, so dass die Abscissen aller Punkte um ein gleiches Stück b $\left\{\begin{matrix}\text{wachsen}\\ \text{abnehmen}\end{matrix}\right\}$, so wird dann $y = ax + b$ die Gleichung der Geraden G_1 und $y = ax - b$ oder $y = ax + (-b)$ die Gleichung der Geraden G_2 sein. Hieraus folgt: Die Gerade ist der g. O. des Punktes, dessen Ordinate um b größer ist als das a-fache seiner Abscisse; für sie gilt die Gleichung: $y = ax + b$, wobei sowohl a als b jede positive oder negative Zahl vorstellen kann.

Die Gleichung $y = ax$ stellt, wenn a nach und nach alle möglichen Werte annimmt, alle durch O möglichen Geraden der Ebene vor. Lässt man nun für jedes bestimmte a in der Gleichung $y = ax + b$ das b nach und nach alle möglichen positiven und negativen Werte annehmen, d. h. lässt man jede durch O gehende Gerade nach und nach alle möglichen zu ihr parallelen Lagen annehmen, so hat man alle möglichen Lagen einer Geraden in der Ebene erschöpft. Die Gleichung $y = ax + b$ ist daher die allgemeine Form für alle Gleichungen, die eine Gerade vorstellen.

b ist die Größe der Verschiebung jedes Punktes und wird vorstellig gemacht durch die Größe der Verschiebung, welche der im Ursprung liegende Punkt der Geraden längs der Ordinatenachse erfährt, OO_1 oder OO_2.

5. Der Gleichung $y = ax + b$ entsprechen ebenfalls zwei Hauptlagen, je nachdem a positiv oder negativ ist. Gerade

mit gleichem a (die sich nur im b unterscheiden) sind einander parallel.

Auch aus der Gleichung G ($y = ax + b$) lässt sich der Richtungssinn, in welchem der laufende Punkt die Gerade beschreibt, nicht entscheiden; sie bestimmt jedoch die Gerade G eindeutig. Aus den Gleichungen G_1 ($y = ax + b_1$) und G_2 ($y = ax + b_2$) lässt sich daher nicht entscheiden, ob die Geraden G_1 und G_2 direct oder invers parallel sind.

Sind a und b Brüche, z. B. $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, also $y = \frac{m}{n}x + \frac{p}{q}$, so giebt man der Gleichung die Form $nq \cdot y = mq \cdot x - pn$ oder $nq \cdot y - mq \cdot x - pn = 0$. Umgekehrt stellt jede Gleichung von der Form $Ay + Bx + C = 0$ irgend eine Gerade vor; es ist

$$y = -\frac{B}{A} \cdot x - \frac{C}{A}, \text{ also } -\frac{B}{A} = a \text{ und } -\frac{C}{A} = b.$$

Wird $A = 0$, so wird $-\frac{B}{A} = a = \infty$; $Bx + C = 0$, oder $x = c$ stellt eine zur Ordinatenachse parallele Gerade vor. Die zur Ordinatenachse parallele Gerade ist der g. O. aller Punkte, welche dieselbe Abscisse c haben, wobei c positiv oder negativ sein kann. Wird $B = 0$, so wird $-\frac{B}{A} = a = 0$; $Ay + C = 0$ oder $y = b$ stellt eine zur Abscissenachse parallele Gerade vor, d. h. alle Punkte haben dieselbe Ordinate. Wird $C = 0$, so geht die Gerade $Ay + Bx = 0$ durch den Ursprung.

Aufgabe 1. Construiere die Gerade G ($y = 2x + 3$).

a) Mittels der Gleichung $y = 2x + 3$ können unzählig viele Wertepaare der beiden Veränderlichen bestimmt werden; die diesen Wertepaaren entsprechenden Punkte der Ebene bilden in ihrer Gesammtheit die Gerade G (z. B. $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(0, 3)$, $C(1, 5)$, $D(2, 7)$ ...).

b) Es bedarf nur der Kenntnis zweier beliebiger Punkte, um die Gerade mit dem Lineal zu ziehen. $B(0, 3)$, $C(1, 5)$.

Zusatz. Die Gerade schneidet die Coordinatenachsen in den Punkten $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(0, 3)$; diese Punkte nennt man Knoten, und zwar A den Abscissenknoten, B den Ordinatenknoten. Das y des Ordinatenknotens ist stets das b der Geraden. Zur Construction der Geraden bestimmt man gewöhnlich den Ordinatenknoten und noch irgend einen zweiten Punkt (z. B. den Abscissenknoten). Andere Beispiele: $y = -2x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -2x - 3$; [illegible] oder $2y - x - 6 = 0$, $2y + x - 6 = 0$.

B. 2. Der g. O. des Punktes, welcher eine constante Entfernung r vom Ursprung hat, ist der Kreis $K(O, r)$. Die Gleichung dieses g. O. ist $x^2 + y^2 = r^2$ oder $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, wobei die Constante r der Radius des Kreises ist.

[illegible] bestimmen in einer Lage im rechtwinkligen [illegible] dessen [illegible].

Aufgabe 2. Construiere den Kreis K ($x^2 + y^2 = 16$).

Mittels der Gleichung $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ kann man unzählig viele Wertepaare der beiden Veränderlichen bestimmen; die Gesammtheit der diesen [illegible]

Wertepaaren entsprechenden Punkte der Ebene bildet den Kreis K. Die Abscisse als gegeben vorausgesetzt, erhält man: $A\,(0, 4)$, $A'\,(0, -4)$, $B\,(1, \sqrt{15})$, $B'\,(1, -\sqrt{15})$, $C\,(2, \sqrt{12})$, $C'\,(2, -\sqrt{12})$, $D\,(3, \sqrt{7})$, $D'\,(3, -\sqrt{7})$, $E\,(4, 0)$, $F\,(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{7})$, $F'\,(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{7})$, $G\,(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{55})$ ... $M\,(-1, \sqrt{15})$, $N\,(-1, -\sqrt{15})$ ...

b) Da a der Radius und O der Mittelpunkt des Kreises ist, kann man denselben mit dem Cirkel ziehen.

2. Die Gleichung $y^2 + x^2 = a^2$ gibt Aufschluss über die Gestalt der ihr entsprechenden Linie (Discussion der Gleichung). Es ist $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$; es ergibt sich:

α) Es darf a^2 nie kleiner sein als x^2, also muss $-a \leqq x \leqq +a$, d. h. jedes x zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegen, wenn ihm ein reelles y, also ein Punkt in der Ebene entsprechen soll.

β) Wenn $-a \leqq x \leqq +a$ ist, also $a^2 > x^2$, so wird der Zahlwert des y um so größer sein, je kleiner x ist. Man erhält die Punkte $A\,(0, a)$, $A'\,(0, -a)$, $B\,(a, 0)$, $B'\,(-a, 0)$, d. h. die Linie schneidet jede Coordinatenachse zweimal. Gegenseitige Lage der Punkte A, A', B, B'.

γ) So lange $a^2 > x^2$, entsprechen jedem Werte x zwei (absolut) gleich große, aber (relativ) entgegengesetzte Werte des y. Die Linie ist daher symmetrisch zur Abscissenachse; ebenso ist sie symmetrisch zur Ordinatenachse, da y dieselben Werte annimmt, wenn für x zwei (absolut) gleiche, aber (relativ) entgegengesetzte Werte gewählt werden.

Ist der Radius des Kreises ein Bruch $a = \frac{m}{n}$, so wird die Gleichung $y^2 + x^2 = \frac{m^2}{n^2}$ in die Form $n^2y + n^2x^2 = m^2$ gebracht. Umgekehrt stellt jede Gleichung von der Form $Ay^2 + Ax^2 = B$ oder $Ay^2 + Ax^2 - B = 0$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte O vor, dessen Radius $a = \sqrt{\frac{B}{A}}$ ist.

Auch die Gleichung des Kreises gibt keinen Aufschluss darüber, in welchem Sinne der laufende Punkt den Kreis beschreibt. Die Gleichung des Kreises stellt diesen eindeutig dar, da nur ein Kreis $K(O, a)$ mit bestimmtem a möglich ist; sie lässt aber die Bewegungsrichtung des laufenden Punktes unentschieden.

Ertheilt man in der Gleichung $y^2 + x^2 = a^2$ dem a nach und nach alle möglichen Werte, so erschöpft man alle Kreise der Ebene mit dem Mittelpunkte O, jedoch nicht alle möglichen Kreise; es muss daher noch andere Kreisgleichungen geben. Man nennt diese Gleichung die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Beispiel. $25y^2 + 4x^2 = 25$, $\lambda = \frac{25}{25.4} = \frac{1}{4}$,
$\frac{25}{4}y^2 + x^2 = \frac{25}{4}$, also $a = \frac{5}{2}$, $b = 1$.

Aufgabe 3. Die im Brennpunkte der Ellipse $E(a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2)$ normal zur großen Achse gezogene Sehne (Parameter der Ellipse) zu berechnen. Man bezeichnet die Größe des Parameters mit $2p$.

$$F_1(e, 0) \begin{cases} M_1(e, y'_1), & y' = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2} = \pm \frac{b^2}{a} \\ M_2(e, y'_2), & y'_1 = \frac{b^2}{a}, \quad y'_2 = -\frac{b^2}{a} \end{cases}$$

$$M_2M_1 = \frac{b^2}{a} - \left(-\frac{b^2}{a}\right) = \frac{2b^2}{a}. \quad 2p = \frac{2b^2}{a}; \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

D. 1. Der g. O. des Punktes, dessen Abstände (absolut genommen) von zwei festen Punkten F_1 und F_2 (den Brennpunkten) die constante Differenz $2a$ haben, ist die Hyperbel $H(F_1, F_2, 2a)$. $l_2 - l_1 = 2a$. Leitstrahlen des Punktes. Brennweite $2e$.

Planimetrische Construction. Mechanische Construction. Hyperbelcirkel (Hyperbolograph).

2. Die Gleichung dieses g. O. ist $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, oder $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Wie bei der Ellipse bildet auch hier der laufende Punkt mit den festen Punkten F_1 und F_2 das Dreieck F_1PF_2, dessen Seiten die Leitstrahlen und die Brennweite sind. Legt man auch hier die Abscissenachse in die Brennweite mit der Richtung F_2F_1, wobei der Halbierungspunkt der Brennweite der Ursprung ist, so ist die Ordinate die Höhe des Dreieckes, und die Brennweite wird durch sie in die Theile $F_2P' = x - (-e) = x + e$ und $P'F_1 = e - x$ getheilt.

$$l_2 = \sqrt{y^2 + (x+e)^2}, \quad l_1 = \sqrt{y^2 + (e-x)^2};$$
$$2a = \sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (e-x)^2}.$$

Durch Rationalmachung dieser irrationalen Gleichung erhält man:
$a^2y^2 - (e^2 - a^2)x^2 = -(e^2 - a^2)a^2$ und, wenn man $e^2 - a^2 = b^2$ setzt, $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$.

3. Die Gleichung $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gibt Aufschluss über die Gestalt der ihr entsprechenden Linie. Discussion. Aus $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ergibt sich

a) Es darf x^2 nie kleiner als a^2 werden; es muss also entweder [illegible] oder [illegible] genommen werden, denn jedem anderen [illegible] entspricht kein reelles y, also kein Punkt der Linie. In einem Streifen von der

Breite $2a$, dessen Mittelparallele die Ordinatenachse ist, befindet sich kein Hyperbelpunkt.

β) Wenn $x^2 > a^2$, so wird der Zahlwert des y um so größer, je größer x ist und wächst mit x ins Unendliche. Man erhält die Punkte: $A\,(a, 0)$, $A\,(-a, 0)$ als Punkte der Linie; die Linie schneidet die Abscissenachse zweimal in den Punkten A und A', die Ordinatenachse gar nicht. Man nennt die Strecke $A'A = 2a$ die Achse der Hyperbel; eine zweite Achse hat die Hyperbel nicht.

Trägt man auf der Ordinatenachse $+b$ und $-b$ auf (gemäß der Gleichung $b^2 = e^2 - a^2$), so pflegt man die so entstandene Strecke BB' von der Größe $2b$ die Nebenachse der Hyperbel zu nennen. Mittelpunkt der Hyperbel.

γ) So lange $x^2 > a^2$, entsprechen jedem x zwei (absolut) gleiche und (relativ) entgegengesetzte Werte des y. Die Linie ist daher symmetrisch zur Abscissenachse; ebenso ist sie symmetrisch zur Ordinatenachse, da y dieselben Werte annimmt, wenn für x zwei (absolut) gleiche, aber (relativ) entgegengesetzte Werte gewählt werden.

δ) Da sich endlich $y = \pm \infty$ für $x = \infty$ und für $x = -\infty$ ergibt, so folgt, dass die Linie weder auf der positiven, noch auf der negativen Seite der Abscissenachse geschlossen ist; sie besteht daher aus zwei getrennten Ästen.

Ertheilt man in der Gleichung $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ den constanten Zahlen a und b nach und nach alle möglichen Werte ($a \gtreqless b$), so erschöpft man alle Hyperbeln, welche den Mittelpunkt im Ursprung und die Brennpunkte in der Abscissenachse haben. Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

Auch die Gleichung der Hyperbel bestimmt die Hyperbel eindeutig, nicht aber den Sinn, in welchem sie beschrieben ist.

Sind a und b Brüche, z. B. $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, so wird die Gleichung $\frac{m^2}{n^2}y^2 - \frac{p^2}{q^2}x^2 = -\frac{m^2p^2}{n^2q^2}$ in die Form $m^2q^2 . y^2 - n^2p^2 . x^2 = -m^2p^2$ gebracht. Umgekehrt ist jede Gleichung von der Form $Ay^2 - Bx^2 = -C$ oder $Ay^2 - Bx^2 + C = 0$ eine Hyperbel, deren Mittelpunkt im Ursprung und deren Brennpunkte in der Abscissenachse liegen.

Jede Hyperbel, bei welcher $a = b$ ist, heißt eine gleichseitige Hyperbel die Gleichung derselben ist $y^2 - x^2 = -a^2$.

Aufgabe 1. Die Hyperbel $H(a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2)$ zu construieren.

Aufgabe 2. Die Hyperbel $H(Ay^2 - Bx^2 + C = 0)$ zu construieren.

Vergleiche hiezu die Bemerkungen zu den analogen Aufgaben über die Ellipse.

Aufgabe 3. Die im Brennpunkte der Hyperbel $H(a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2)$ normal zur großen Achse gezogene Sehne (Parameter der Hyperbel) zu berechnen.

$$2p = \frac{2b^2}{a}; \; p = \frac{b^2}{a}.$$

E. 1. Der g. O. des Punktes, dessen Entfernungen von einem festen Punkte F (Brennpunkt) und einer festen Geraden (der Directrix) gleich groß sind, ist die Parabel $P(F_1, D)$. Die beiden Entfernungen heißen Leitstrahlen. $l_1 = l_2$.

Planimetrische Construction. Mechanische Construction. Parabolograph.

2. Für diesen g. O. gilt die Gleichung $y^2 = 2px$, oder $y = \pm \sqrt{2px}$, d. h. die Quadrate der Ordinaten sind den Abcissen proportional. p ist der Abstand des Brennpunktes von der Directrix.

Die beiden Leitstrahlen des laufenden Punktes bilden ein gleichschenkeliges Dreieck FPQ. Legt man die Abscissenachse durch den Brennpunkt F normal zur Directrix und lässt den Ursprung O den Abstand des Brennpunktes von der Directrix ($RF = p$) halbieren, so dass $OF = \frac{p}{2}$, so ist die durch F gezogene Seitenhöhe des Dreieckes FPQ so groß als die Ordinate des laufenden Punktes. Die Gegenseite des Brennpunktes PQ hat die Größe $l_2 = \frac{p}{2} + x$ und wird durch die Höhe in die Theile p und $x - \frac{p}{2}$ getheilt.

$$l_1 = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}; \text{ daher ist, wegen } l_2 = l_1$$

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{y^2 + x - \frac{p^2}{2}}, \text{ und } y = 2px.$$

3. Die Gleichung $y^2 = 2px$ gibt Aufschluss über die Gestalt der ihr entsprechenden Linie. Discussion. Aus $y = \pm \sqrt{2px}$ ergibt sich:

α) Es darf x nie negativ werden; für $x < 0$ erhält man keinen reellen Wert des y, also keinen Punkt der Linie. Es gibt nur auf einer Seite der Ordinatenachse Punkte dieser Linie.

β) Für $x > 0$ wird der Zahlwert des y um so größer, je größer x wird, und wächst mit x ins Unendliche. Man erhält den Punkt O (0, 0) als Punkt der Linie; die Linie schneidet die Abscissenachse nur einmal, und zwar im Ursprung, auch mit der Ordinatenachse hat sie nur den Ursprung gemeinsam.

γ) Für $x > 0$ entsprechen jedem Zahlwert des x zwei (absolut) gleiche, jedoch (relativ) entgegengesetzte Werte des y. Die Linie ist daher symmetrisch zur Abscissenachse.

δ) Da für $x = \infty$ sich $y = \pm \infty$ ergibt, so ist die Linie nicht geschlossen.

Die Constante p ist der Abstand des Brennpunktes von der Directrix. Den Halbierungspunkt dieses Abstandes nennt man (als Punkt mit den kleinsten Leitstrahlen) den Scheitel der Parabel. Ertheilt man in der Gleichung $y^2 = 2px$ der constanten Zahl p nach und nach alle möglichen Werte, so erschöpft man die Parabeln, welche den Scheitel im Ursprung und den Brennpunkt auf der Abscissenachse haben, jedoch nicht alle möglichen Parabeln; es muss also noch andere Parabelgleichungen geben. Diese Parabelgleichung nennt man die Scheitelgleichung der Parabel. Diese Gleichung bestimmt die Parabel eindeutig, nicht aber den Sinn, in welchem die Parabel beschrieben ist.

Ist p ein Bruch, z. B. $p = \frac{m}{n}$, so wird die Gleichung $y^2 = \frac{2m}{n} x$ in die Form $ny^2 = 2mx$ oder $ny^2 - 2mx = 0$ gebracht. Umgekehrt ist jede Gleichung von der Form: $Ay^2 - Bx = 0$ eine Parabel, deren Scheitel im Ursprunge und deren Brennpunkt in der Abscissenachse liegt. $p = \frac{B}{2A}$. Specieller Fall $p = 1$, $y^2 = 2x$.

Aufgabe 1. Die Parabel $P\,(y^2 = 2px)$ zu construieren.

Aufgabe 2. Die Parabel $P\,(Ay^2 - Bx = 0)$ zu construieren.

Vergl. hiezu die Bemerkungen zu den Aufgaben über die Construction der Ellipse.

Aufgabe 3. Die durch den Brennpunkt parallel zur Directrix gezogene Sehne (Parameter) zu bestimmen.

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \begin{cases} M_1\left(\frac{p}{2}, y'_1\right) & y' = \pm\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = \pm p \\ M_2\left(\frac{p}{2}, y'_2\right) & y'_1 = p \quad y'_2 = -p. \end{cases}$$

$$\overline{M_2M_1} = p - (-p) = 2p.$$

Aus diesem Grunde kann man den Parameter auch als die Constante der Parabel auffassen.

IV. Abhängigkeit der Gleichungen vom Coordinatensysteme.

A. 1. Zeichnet man auf dasselbe Blatt zwei Coordinatensysteme und construiert man in jedem die der Gleichung $F(x, y) = 0$ entsprechende Linie, so erhält man zwei einander congruente Figuren in verschiedener Lage. Dasselbe geometrische

Gebilde würde in verschiedenen Coordinatensystemen durch verschiedene Gleichungen dargestellt erscheinen.

Wenn zwei oder mehrere Coordinatensysteme gleichzeitig (auf einem Blatte) in Betracht gezogen werden, so ist es vortheilhaft, die Achsen und die Coordinaten in jedem Systeme durch andere Zeichen darzustellen. Man wählt für die Achsen die Buchstaben X, Y oder Ξ, H, ... für die Coordinaten x, y oder ξ, η, ... Ist daher die Gleichung eines geometrischen Gebildes im Systeme XY eine $f(x, y)$, so ist sie im System ΞH in der Regel eine andere $f'(\xi, \eta)$. Man erkennt dann sofort aus der Bezeichnung, für welches System diese oder jene Gleichung des Gebildes gilt. Beschränkt man dann die Betrachtungen auf ein System, z. B. das System XY, so kann man, da eine Verwechslung ausgeschlossen ist, die Zeichen ξ und η durch die gewohnten x, y ersetzen.

2. *a*) Bewegt man die Abscissenachse X parallel mit sich selbst $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, bis sie in die neue Lage Ξ kömmt, so nimmt die Ordinate jedes Punktes $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{ab}\end{matrix}\right\}$, während die Abscisse unverändert bleibt; der Ursprung des Systems XY erhält im neuen System die Coordinaten $(0, \eta_0)$, wobei η_0 $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem die X-Achse $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$ bewegt werden musste, um in die Lage Ξ zu gelangen. η_0 gibt also den Abstand der X-Achse von der Ξ-Achse an und zugleich die Zunahme der Ordinate jedes Punktes durch die Bewegung der Abscissenachse. Es ist also

$$\eta = y + \eta_0 \quad \text{oder} \quad y = \eta - \eta_0.$$

b) Durch die ganz gleiche Betrachtung erhält man $\xi = x + \xi_0$ und $x = \xi - \xi_0$, wenn das neue Coordinatensystem ΞH mit dem alten die Abscissenachse gemeinsam hat und der Abstand der Y-Achse von der H-Achse mit ξ_0 bezeichnet wird.

c) Bewegt man jede der beiden Achsen parallel mit sich selbst, so dass der alte Ursprung die Coordinaten $O(\xi_0, \eta_0)$ er-[...], so kann man die Achsenverschiebung zuerst mit der X-Achse [...] dann mit der Y-Achse vorgenommen denken und erhält die [...]hungen:

$$\left\{\begin{matrix}\xi = x + \xi_0\\ \eta = y + \eta_0\end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{matrix}x = \xi - \xi_0\\ y = \eta - \eta_0\end{matrix}\right\}.$$

[...]reht man das Coordinatensystem XY im Ursprung O [...]ge ΞH so, dass der Winkel $X\Xi = \omega$, so wird

$$\left\{\begin{matrix}\xi = y \sin\omega + x \cos\omega \\ \eta = y \cos\omega - x \sin\omega\end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix}x = \xi \cos\omega - \eta \sin\omega \\ y = \xi \sin\omega + \eta \cos\omega\end{matrix}\right\};$$

$\eta = SP - SR = SP - QT = QP \cos\omega - OQ \sin\omega = y \cos\omega - x \sin\omega$,
ebenso ist $\xi = OR = OT + QS = x \cos\omega + y \sin\omega$.
$y = QP = VR + UP = \xi \sin\omega + \eta \cos\omega$,
ebenso ist $x = OV - UR = \xi \cos\omega - \eta \sin\omega$.

Zusätze. α) für $\omega = 90^0$ wird $\xi = y$, $\eta = -x$; β) für $\omega = 180^0$ wird $\xi = -x$, $\eta = -y$; γ) für $\omega = 270^0$ wird $\xi = -y$, $\eta = x$.

Anmerkung. Jede andere Bewegung des rechtwinkeligen Coordinatensystems lässt sich durch eine passende Combination von Parallelverschiebung und Drehung ersetzen; Veränderungen des Coordinatenwinkels sollen hier nicht betrachtet werden. Die Beziehungen zwischen Parallelcoordinaten und Polarcoordinaten, welche in II, *B* abgeleitet wurden, können durch Anwendung obiger Betrachtungen verallgemeinert werden.

B. 1. Die Gleichung der Geraden G sei $y = ax$. Verschiebt man die X-Achse so, dass $O\,(0, \eta_0)$ wird, d. h. dass der alte Ursprung die Coordinaten 0 und η_0 erhält, so wird $\xi = x$ und $\eta = y + \eta_0$ oder $x = \xi$ und $y = \eta - \eta_0$. Die Gleichung der Geraden wird: $\eta - \eta_0 = ax$ und $\eta = ax + \eta_0$.

Diese Gleichung stimmt mit der in III, *A*, 4 abgeleiteten Gleichung der Geraden überein; $\eta_0 = b$. Es ist daher gleichgiltig, ob man im festen Coordinatensystem die Gerade G (vergl. III, *A*, 4) oder, während die Gerade festgehalten wird, das Coordinatensystem (in entgegengesetzter Richtung) verschiebt. Allgemein: Jede Bewegung eines Gebildes kann durch eine gleichartige (aber entgegengesetzte) Bewegung des Coordinatensystems ersetzt werden und umgekehrt.

Aufgabe 1. Die Gleichung der Geraden G ist $y = 2x + 3$. Die Achsen Ξ, H sind $\parallel$ zu den Achsen X, Y; $O\,(-2, +1)$. Es ist die Gleichung der Geraden G im System ΞH zu bestimmen.

Zwischen dem System herrschen die Beziehungen:

$$\left\{\begin{matrix}\xi = x - 2 \\ \eta = y + 1\end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix}x = \xi + 2 \\ y = \eta - 1\end{matrix}\right\}.$$

Es ist also $\eta - 1 = 2\,(\xi + 2) + 3$, mithin $\eta = 2\,\xi + 8$ die gesuchte Gleichung. Die Gleichung hat dieselbe Form wie im alten Systeme; die Gerade bildet mit der Achse Ξ dieselben Winkel als mit X.

Aufgabe 2. Die Gleichung der Geraden G ist $y = ax + b$. Das neue System entsteht aus der Drehung des alten Systems um O. $(X\Xi) = \omega^0$. Es ist die Gleichung der Geraden G im System ΞH zu bestimmen.

Zwischen den Systemen herrschen die Beziehungen: $x = \xi \cos\omega - \eta \sin\omega$, $y = \xi \sin\omega + \eta \cos\omega$. Die Gleichung der Geraden wird, wenn man für a die Beziehung $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ verwendet, $y = tg\,(\alpha - \omega)x + \frac{b \cos\alpha}{\cos(\alpha - \omega)}$. Die Gleichung

ändert ihre Form abermals nicht; die Gerade bildet mit der neuen Achse einen um ω^0 kleineren Winkel; wird $\alpha - \omega$ negativ, so setzt man für $\alpha - \omega$ lieber $360^0 + \alpha - \omega$.

Beispiel. $y = 2x + 3$, $tg\,\omega = 2$; $\cos\omega = \frac{1}{\pm\sqrt{5}}$, $\sin\omega = \frac{2}{\pm 5}$.

Die Beziehungen der Coordinatensysteme sind:

$$x = \frac{\xi}{\pm\sqrt{5}} - \frac{2\eta}{\pm\sqrt{5}} \text{ und } y = \frac{2\xi}{\pm\sqrt{5}} + \frac{\eta}{\pm\sqrt{5}}.$$

Die Gleichung der Geraden wird: $\frac{5\eta}{\pm\sqrt{5}} = 3$, also $\eta = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$, die Gerade wird zur Ξ-Achse parallel; die Aufgabe ist zweideutig, da gemäß $tg\,\omega = 2$ zwei verschiedene Winkel ω möglich sind: $\omega_1 = 63^0\,26'\,5''$ und $\omega_2 = 243^0\,26'5''$.

C. 1. Die Gleichung des Kreises $K(O, a)$ in Bezug auf das System XY ist $x^2 + y^2 = a^2$. Verschiebt man die Achsen so, dass $O\,(\xi_0, \eta_0)$, so sind die Beziehungen der beiden Coordinatensysteme $x = \xi - \xi_0$ und $y = \eta - \eta_0$. Die Gleichung des Kreises wird: $(\eta - \eta_0)^2 + (\xi - \xi_0)^2 = a^2$.

Gibt man den constanten Zahlen η_0, ξ_0, a nach und nach alle möglichen Werte, so erschöpft man alle möglichen Kreise; diese Gleichung ist daher die allgemeine Gleichung des Kreises. Diese Gleichung hat auch die Form: $\eta^2 + \xi^2 - 2\,\eta_0\,\eta - 2\,\xi_0\,\xi + (\eta_0{}^2 + \xi_0{}^2 - a^2) = 0$. Wird die Beziehung auf das alte System aufgegeben, so kann man statt der Zeichen η, ξ die Zeichen y, x verwenden. Sind endlich ξ_0, η_0, a Bruchzahlen (auf gleichen Nenner gebracht) $\xi_0 = \frac{m}{s}$, $\eta_0 = \frac{n}{s}$, $a = \frac{r}{s}$, so erhält man die Gleichung

$$s^2y^2 + s^2x^2 - 2ns\,y - 2ms\,x + (n^2 + m^2 - r^2) = 0.$$

Umgekehrt stellt jede allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Veränderlichen: $Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$ einen Kreis vor, wenn $A = B$ und $C = 0$ ist.

$$Ay^2 + Ax^2 + Dy + Ex + F = 0 \text{ oder}$$
$$y^2 + x^2 + dy + ex + f = 0, \text{ wobei}$$
$$e = -2\xi_0,\ d = -2\eta_0,\ f = \eta_0{}^2 + \xi_0{}^2 - a^2 \text{ oder}$$
$$\xi_0 = -\frac{e}{2},\quad \eta_0 = -\frac{d}{2},\quad a = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^2 + d^2 - 4f}.$$

a) Für $\xi_0 = 0$, $y_0 = 0$ wird $d = 0$ und $e = 0$; man erhält die Mittelpunktsgleichung des Kreises $y^2 + x^2 + f = 0$ oder $Ay^2 + Ax^2 + F = 0$, wobei F nothwendig mit A entgegengesetzt bezeichnet ist. (III, *B*, 2.)

b) Für $F = 0$ wird $\eta_0{}^2 + \xi_0{}^2 = a^2$, d. h. der Mittelpunkt des gedachten Kreises K liegt auf einem Kreise K' (O, a); der Kreis K geht also durch den Ursprung des Systems. $y^2 + x^2 + dy + ex = 0$ ist die Gleichung eines Kreises, welcher durch den Ursprung geht.

$$\xi_0 = -\frac{e}{2},\quad \eta_0 = -\frac{d}{2},\quad a^2 = \frac{e^2 + d^2}{4}.$$

Allgemein: Hat die $f(x, y) = 0$ kein von x und y freies Glied, so stellt dieselbe immer eine Linie, die durch den Ursprung geht, vor. Vergl. III, *A*, 2; III, *D*, 3 γ.

c) Für $F = 0$ und $D = 0$ wird $\eta_0 = 0$, $\xi_0 = -\frac{e}{2}$ und $a^2 = \frac{e^2}{4}$, mithin $\xi_0 = \pm a$. Für $\xi_0 = +a$ geht die Gleichung über in: $y^2 + x^2 - 2ax = 0$. Diese Gleichung nennt man die Scheitelgleichung des Kreises. Der Grund dieses Namens wird später klar werden. $y^2 = 2ax - x^2$. Discussion dieser Gleichung.

2. Die Gleichung des Kreises $K(O, a)$ in Bezug auf das rechtwinkelige System XY ist $y^2 + x^2 = a^2$. Dreht man das System um O in die Lage ΞH, so dass $(X\Xi) = \omega^0$, so sind die Beziehungen beider Coordinatensysteme $y = \eta \cos \omega + \xi \sin \omega$ und $x = \xi \cos \omega - \eta \sin \omega$; daher erhält man: $(\eta \cos \omega + \xi \sin \omega)^2 + (\xi \cos \omega - \eta \sin \omega)^2 = a^2$, d. h. $\eta^2 + \xi^2 = a^2$ als Gleichung des Kreises im neuen Systeme.

Bleibt der Mittelpunkt des Kreises während der Bewegung des Kreises fest, so decken sich alle successiven Lagen; der Kreis bewegt sich in sich selbst. Der Kreis ist axial symmetrisch bezüglich jeder durch seinen Mittelpunkt gezogenen Geraden (vergl. III, *B*, 2, γ); er ist centrisch symmetrisch bezüglich seines Mittelpunktes.

D. 1. Im Coordinatensysteme XY sei $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$ die Gleichung der Ellipse E (Hyperbel H). Man drehe dieses System um den Ursprung so, dass $(X\Xi) = \omega^0$ wird.

a) Es sei $\omega^0 = 90^0$, dann werden die Beziehungen beider Systeme durch die Gleichungen $x = -\eta$ und $y = \xi$ dargestellt (vergl. IV, *A*, 3, Zusatz α).

Aus $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$ wird $a^2\xi^2 \pm b^2\eta^2 = \pm a^2b^2$.

In dieser Ellipse (Hyperbel) liegen die Brennpunkte auf der Ordinatenachse; ebenso liegt die Hauptachse der Hyperbel auf der Ordinatenachse. Denselben Erfolg hätte man durch Drehung der Ellipse (Hyperbel) um 90^0 in entgegengesetzter Richtung im alten Coordinatensysteme erreicht.

Zwei Hyperbeln H $(a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2)$ und H' $(a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2)$ nennt man einander conjugierte Hyperbeln. Die Hauptachse der einen ist die Nebenachse der anderen und umgekehrt.

b) Es sei $\omega^0 = 180^0$, dann wird $x = -\xi$ und $y = -\eta$ (vergl. IV, *A*, 3, Zusatz β).

Aus $ay^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$ wird $a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2 = \pm a^2b^2$, d. h. die Gleichungen der beiden Linien bleiben unverändert.

Durch eine Drehung der Ellipse (Hyperbel) um 180^0 werden sich die neue und die alte Lage decken. Die Ellipse (Hyperbel) ist eine centrisch-symmetrische Figur. Der Durchschnittspunkt der beiden Achsen ist das Centrum. Mittelpunkt der Ellipse (Hyperbel).

2. *a*) Im Coordinatensystem XY sei die Ellipse (Hyperbel) durch ihre Mittelpunktsgleichung gegeben. Man verschiebe die

Ordinatenachse parallel mit sich selbst, so dass der alte Ursprung im neuen System bei der $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ die Coordinaten $\left\{\begin{matrix}O\ (a,\ 0)\\ O\ (-a,\ 0)\end{matrix}\right\}$ erhält.

Es wird $y = \eta$ und $x = \xi \mp a$, daher
$$a^2\eta^2 \pm b^2(\xi \mp a)^2 = \pm a^2b^2 \text{ oder } a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2 - 2b^2a\xi = 0.$$

Die Peripherie der Ellipse (Hyperbel) geht also durch den Ursprung; die beiden Brennpunkte liegen auf der unverändert gebliebenen X-Achse. Diese Lage nennt man die Scheitellage der Ellipse (Hyperbel).

$$\left.\begin{matrix} a^2y^2 + b^2x^2 - 2ab^2x = 0 \\ a^2y^2 - b^2x^2 - 2ab^2x = 0 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \end{matrix}\right.$$

sind die Scheitelgleichungen der Ellipse und der Hyperbel.

Durch Discussion der Gleichung $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax \mp x^2}$ erhält man eine Vorstellung der Gestalt der betreffenden Linie.

E. 1. Setzt man $\frac{b^2}{a} = p$ (vergl. III, C, 3, Aufgabe 3 und III, D, 3, Aufgabe 3) und $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} = q$, so wird $y^2 = 2px - qx^2$ die allgemeine Form der Scheitelgleichung. Dabei ist, wenn q positiv und kleiner als 1, die Linie eine Ellipse (für $q = 1$ ein Kreis, vergl. IV, C, 1, c); wenn $q = 0$, ist die Linie eine Parabel; wenn $q < 0$, also negativ wird, ist die Linie eine Hyperbel.

Zusatz 1. Ist $p = 0$, so hat die Gleichung nur für $q < 0$ einen Sinn. Es sei m^2 der absolute Wert von q, so ist $y^2 = m^2x^2$ und $y = \pm mx$. Die Hyperbel degeneriert zu zwei Geraden. Die Hyperbel, deren a und e gleich groß sind, wird ein Geradenpaar.

Zusatz 2. Da diese Linien durch dieselbe Gleichung dargestellt werden können, so sind sie Linien, welche als geometrischer Ort dasselbe Entstehungsgesetz haben.

Es sei SAB ein schiefer Kegel mit kreisförmiger Basis, dessen längste Seite SA mit der Basis den Winkel α und dessen kürzeste Seite mit der Basis den Winkel β bildet (Fig. 4). Dieser werde durch eine zum Hauptschnitt senkrechte Ebene, welche durch den Punkt C der längsten Seite geht, geschnitten. Der Neigungswinkel der längsten Seite gegen die Schnittebene sei φ. Die Schnittebene CC' erzeugt auf dem Kegel eine krumme Linie; durch einen Punkt P derselben werde noch ein Schnitt DD' parallel zur Basis geführt. Die durch diesen Schnitt erzeugte Linie ist ein Kreis. Die beiden Schnittebenen und der Hauptschnitt haben einen Punkt R gemeinsam; derselbe ist auch den drei Schnittgeraden CC', DD' und PR gemeinsam, wobei $PR \perp CC'$ und $PR \perp DD'$. Da P ein Punkt des Kreises ist, gilt $PR^2 = DR \cdot RD' \ldots 1)$,

aus Dreieck CRD: $DR = \dfrac{CR \sin.\varphi}{\sin\alpha}$ .... 2)

aus $\triangle SCC'$: $CC' = \dfrac{SC \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta-\varphi)}$; nun ist wegen $CC' - CR = RC'$, aus

$\triangle RD'C' : RD' = \dfrac{(CC' - CR)\sin(\alpha+\beta-\varphi)}{\sin\beta}$, also

$$RD' = \frac{SC \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} - \frac{CR \sin(\alpha+\beta-\varphi)}{\sin\beta} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Man betrachte nun CC' als Abscissenachse und C als Ursprung eines in der Ebene des Schnittes CC' gelegenen Coordinatensystems; der laufende Punkt P hat die Coordinaten x, y, wobei $PR = y$ und $CR = x$ ist. Durch Substitution der Gleichungen 2) und 3) in 1) ergibt sich endlich, wenn noch $SC = d$ gesetzt wird

$$y^2 = \frac{d \sin(\alpha+\beta)\sin\varphi}{\sin\alpha \sin\beta}\, x - \frac{\sin(\alpha+\beta-\varphi)\sin\varphi}{\sin\alpha \sin\beta}\, x^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = 2Px - Qx^2.$$

α) Der Schnitt ist für $Q = 1$ ein Kreis, Q wird 1, wenn

$$\sin(\alpha+\beta-\varphi)\sin\varphi = \sin\alpha \sin\beta,$$

d. h. wenn entweder $\varphi = \alpha$, oder $\varphi = \beta$ wird. Es gibt also durch jeden Punkt der längsten Seite eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis zwei Kreisschnitte. Parallelschnitt, Antiparallelschnitt. Beim geraden Kegel gibt es nur einen Kreisschnitt.

β) Für $0 < Q < 1$ wird die Schnittlinie eine Ellipse. Die Bedingung $Q > 0$ wird erfüllt, wenn $\varphi < \alpha + \beta$, da α, β, φ hohle Winkel sind. Wenn aber $\varphi < \alpha + \beta$, so ist auch die zweite Bedingung $Q < 1$ erfüllt; denn wenn $Q < 1$, so ist auch $\sin(\alpha+\beta-\varphi)\sin\varphi < \sin\alpha \sin\beta$.

Daraus folgt $\cos[2\varphi - (\alpha+\beta)] - \cos[\alpha+\beta) < \cos(\beta-\alpha) - \cos(\alpha+\beta)$, also $\cos[2\varphi - (\alpha+\beta)] < \cos(\beta-\alpha)$. Setzt man gemäß obiger Bedingung $\alpha+\beta > \varphi$ den größeren Wert für φ ein, so wird aus $2\varphi - (\alpha+\beta)$ der größere Wert $\alpha+\beta$; daher ist auch $\cos(\alpha+\beta) < \cos[2\varphi - (\alpha+\beta)]$, mithin umsomehr $\cos(\alpha+\beta) < \cos(\beta-\alpha)$, d. h. $\alpha+\beta > \beta-\alpha$, welche Relation gewiss wahr ist. $\varphi < \alpha+\beta$ genügt also auch der zweiten Bedingung $Q < 1$.

γ) Für $Q = 0$ wird die Schnittlinie eine Parabel. Diese Bedingung wird durch $\sin(\alpha+\beta-\varphi) = 0$ erfüllt, da kein anderer Factor 0 werden kann. Es ergibt sich also $\alpha+\beta-\varphi = 0^0$ oder $\alpha+\beta-\varphi = 180^0$. Aus der ersten Beziehung folgt $\alpha+\beta = \varphi$, d. h. ein zur kürzesten Seite gelegter paralleler Schnitt erzeugt eine Parabel.

$(\alpha+\beta) - \varphi = 180^0$ ist unbrauchbar, da $\alpha+\beta < 180^0$.

δ) Für $Q < 0$ wird die Schnittlinie eine Hyperbel. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn $\sin(\alpha+\beta-\varphi) < 0$, da kein anderer Factor negativ werden kann. Es ergibt sich $\alpha+\beta-\varphi < 0^0$, d. h. $\varphi > \alpha+\beta$. In diesem Falle schneidet die Ebene auch den Ergänzungskegel; die Hyperbel ist daher aus zwei getrennten Ästen zusammengesetzt.

Zusatz. Geht der Schnitt durch die Spitze, so erhält man nur in dem Falle $\varphi > \alpha+\beta$ eine Schnittfigur. Der Schnitt besteht aus zwei sich in der Spitze schneidenden Geraden. (Vergl. IV, C, 2, b, Zusatz.)

[illegible] dieser Gleichung.

[illegible] Hyperbel in dieser Lage nennt man [illegible]

[illegible] Hyperbel, wenn ihre Asymptoten [illegible] Bild für den Zusammenhang zweier [illegible]

[illegible] Ellipse, Hyperbel, Parabel [illegible]

[illegible] im rechtwinkeligen [illegible] die Polarachse und [illegible] Koordinatensystems. Die

Beziehungen der beiden Systeme sind: $y = \varrho \sin \varphi$ und $x = \varrho \cos \varphi$; daher wird $y = ax + b$ übergehen in $\varrho \sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \varrho \cos \varphi + b$, woraus $\varrho \sin (\varphi - \alpha) = b \cos \alpha$ und

$$\varrho = \frac{b \cos \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}$$

folgt. Letztere Gleichung ist die Polargleichung der Geraden. Discussion dieser Gleichung.

2. Die Gleichung des Kreises $K\ (O,\ a)$ im rechtwinkeligen System XY ist $(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = a^2$. Es sei wieder die X-Achse und der Ursprung Polarachse und Pol eines Polar-Coordinatensystems. Die Beziehungen der beiden Systeme sind: $y_0 = \varrho_0 \sin \varphi_0$, $x_0 = \varrho_0 \cos \varphi_0$ und $y = \varrho \sin \varphi$, $x = \varrho \cos \varphi$. Man erhält also:

$(\varrho \sin \varphi - \varrho_0 \sin \varphi_0)^2 + (\varrho \cos \varphi - \varrho_0 \cos \varphi_0)^2 = a^2$, woraus $\varrho^2 - 2\varrho\varrho_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) + ({\varrho_0}^2 - a^2) = 0$. Diese Gleichung nach ϱ gelöst, gibt die allgemeine Polargleichung des Kreises.

3. *a*) Wählt man die große Achse der Ellipse in der Richtung F_2F_1 als Polarachse und F_2 als Pol, so ist $l_2 = \varrho$. $\varrho + l_1 = 2a$. Es ist aber ${l_1}^2 = \varrho^2 + 4e^2 - 4\varrho e \cos \varphi$, daher $\varrho + \sqrt{\varrho^2 + 4e^2 - 4e\varrho \cos \varphi} = 2a$. Aus dieser irrationalen Gleichung folgt $\varrho = \frac{b^2}{a - e \cos \varphi}$ oder $\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$, wobei $a^2 - e^2 = b^2$, $p = \frac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ist. $e < a$.

Für $p = a$, also auch $a = b$ und $e = 0$, wird die Ellipse ein Kreis. $\varrho = p$ ist die Polargleichung des Kreises, wenn der Mittelpunkt der Pol des Polarcoordinatensystems ist.

b) Wählt man ebenso die Hauptachse der Hyperbel in der Richtung F_2F_1 als Polarachse, jedoch F_1 als Pol, so ist $l_1 = \varrho$. Es ist aber $l_2 - \varrho = 2a$ und ${l_2}^2 = \varrho^2 + 4e^2 + 4e\varrho \cos \varphi$, daher $\sqrt{\varrho^2 + 4e^2 + 4e\varrho \cos \varphi} - \varrho = 2a$.

Es ergibt sich $\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$, wobei $e^2 - a^2 = b^2$, $p = \frac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ist. $e > a$.

c) Wählt man die durch den Brennpunkt zur Directrix gezogene Normale (in der Richtung RF) als Polarachse, F als Pol, so ist $l_1 = \varrho$.

Es ist also $\varrho = l_2$; nun ist $l_2 = p + \varrho \cos \varphi$,

$$\text{also } \varrho = p + \varrho \cos \varphi. \quad \varrho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

d) Die Polargleichung der Kegelschnittslinien lautet demnach $\varrho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$. Für $\varepsilon = 0$ wird dieselbe ein Kreis; für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel. Discussion der einzelnen Polargleichungen für die Kegelschnitte.

Da negative ϱ nicht zulässig sind (vergl. II, *R*, 1), so stellt die Gleichung nur einen Hyperbelast vor.

V. Beziehungen der geometrischen Gebilde zu einander.

A. 1. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Linie und $P(x_1, y_1)$ ein bestimmter Punkt, so ist derselbe ein Punkt der Linie, wenn seine Coordinaten ein zusammengehöriges Wertepaar der beiden Veränderlichen sind; dieselben müssen, in die Gleichung eingesetzt, dieselbe zu einer identischen machen, sie erfüllen. $F(x_1, y_1) = 0$. Ist dagegen P kein Punkt der Linie, so können seine Coordinaten, in die Gleichung eingesetzt, diese nicht erfüllen; es wird $F(x_1, y_1) \gtrless 0$, $F(x_1, y_1) = k$ sein.

2. In der Gleichung $F(x, y) = 0$ kommen außer den beiden Veränderlichen noch eine oder mehrere constante Zahlen $a, b, c \ldots$ vor. Denkt man den constanten Zahlen nach und nach alle möglichen Werte beigelegt, so erschöpft man die Linien der gleichen Art. $F(x, y) = 0$ stellt in diesem Falle nicht eine einzige Linie, ein Individuum, es stellt eine ganze Gattung von Linien vor. Solche Constanten, welche unbestimmt bleiben und nach und nach alle möglichen Werte annehmen können, nennt man zum Unterschiede von bestimmten Constanten Parameter der Gleichung. $F(x, y, a, b, c) = 0$ stellt daher eine Liniengattung oder ein Individuum vor, je nachdem a, b, c Parameter der Gleichung oder bestimmte Constanten sind. (Beispiele.)

Es ist nun eine der wichtigsten Aufgaben der analytischen Geometrie, aus einer Liniengattung $F(x, y) = 0$ jenes Individuum herauszufinden, welches einer oder mehreren bestimmten Bedingungen entspricht, z. B. den bestimmten Punkt $P_1(x_1, y_1)$ enthält. Die Gleichung $F(x_1, y_1) = 0$ ist eine Bedingungsgleichung, in welcher die Constanten die Unbekannten sind, und kann zur

Bestimmung einer Constanten dienen. Damit die Aufgabe eine bestimmte sei, bedarf es der Kenntnis so vieler Bedingungsgleichungen, als die Function constante Zahlen enthält.

Die Gleichungen können für eine oder mehrere der constanten Zahlen zwei-, mehrdeutig sein; in diesem Falle werden mehrere Individuen der Liniengattung den angegebenen Bedingungen entsprechen.

Beispiel. Es gehen mehrere Linien durch einen Punkt.

3. Gehen mehrere Linien durch einen Punkt, so müssen die Coordinaten des Punktes, in jede der Gleichungen eingesetzt, dieselben erfüllen. Es ist eine häufige Aufgabe, die Coordinaten dieses gemeinsamen Punktes oder des Durchschnittspunktes zu bestimmen. Man setzt die vorläufig unbekannten Coordinaten dieses Punktes in die Gleichungen der sich schneidenden Linien ein und erhält soviele Gleichungen mit zwei Unbekannten, als Linien gegeben sind. Bedingungsgleichung. Um die Coordinaten eines Punktes zu bestimmen, genügen zwei Bedingungsgleichungen; es genügt, zwei sich schneidende Linien zu kennen, um deren Durchschnittspunkt zu bestimmen.

Bestimmen die Gleichungen den Punkt mehrdeutig, so schneiden sich die Linien in mehreren Punkten.

4. Hat man zwei Linien mit den Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $f_1(x, y) = 0$, welche den Durchschnittspunkt $D(x_1, y_1)$ haben, so geht auch die Linie, welche durch $f(x,y) + kf_1(x,y) = 0$ dargestellt wird, durch diesen Punkt. Ist k keine Constante, sondern ein Parameter der Gleichung, so stellt $f(x,y) + kf_1(x,y) = 0$ eine Schar von Linien vor, welche alle durch diesen Punkt gehen. Umgekehrt erkennt man, dass drei Linien durch einen Punkt gehen, d. h. dass die dritte Linie durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten geht, wenn man die Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0,\ f_2(x, y) = 0,\ f_3(x, y) = 0$$

dieser drei Linien in der Form:

$$f_1(x, y) + kf_2(x, y) + lf_3(x, y) = 0$$

vereinigen kann, wobei k und l beliebige constante Zahlen sind. In diesem Falle genügt jedes Coordinatenpaar x_1, y_1, welches den beiden ersten Gleichungen genügt, auch der dritten.

B. 1. a) Liegt $P(x_1, y_1)$ auf der Geraden $G(y = ax + b)$, so ist $y_1 - ax_1 - b = 0$; liegt P nicht auf G, so ist $y_1 - ax_1 - b \gtrless 0$. Im letzteren Falle schneidet die Ordinate des Punktes P (oder ihre Verlängerung) die Gerade G in

$M(x_1, y'_1)$; die Punkte P und M haben die gleiche Abscisse, aber verschiedene Ordinaten. Es ist also $y'_1 - ax_1 - b = 0$ und $y_1 - ax_1 - b = d\ (d \gtrless 0)$; durch Subtraction erhält man $y_1 - y'_1 = d$, wobei d positiv wird, wenn die Strecke $\overline{MD}$ im Sinne der positiven Ordinaten gerichtet ist.

b) Zieht man durch P zur Geraden G die Normale N, so erhält man den Abstand des Punktes von der Geraden (p). In der Geraden G und daher auch in der Normalen N ist die positive Richtung noch unbestimmt, daher kann p nur absolut bestimmt werden. Soll p auch seinem Sinne nach bestimmt werden, so ist vor allem in der Geraden G die Richtung festzusetzen; hiezu dient die Wahl des Winkels α, den die Gerade mit X bildet, da jedem a der Geraden zwei Winkel, ein hohler und ein erhabener, entsprechen. Die Gerade G wird dann als bestimmter Strahl ($\overline{G}$) und die Normale ebenso als bestimmter Strahl (Normalstrahl) aufgefasst. Es ist zu beachten, dass der durch P zu $\overline{G}$ gezogene Normalstrahl mit der Ordinate des Punktes P denselben Winkel α bildet, welchen der Strahl $\overline{G}$ mit dem Abscissenstrahl X bildet, wobei $0^0 \leqq \alpha < 360^0$.

Unter allen Umständen ist p die Projection der Strecke d auf den Normalstrahl; es ist also $p = d \cos \alpha$.

Wenn $\begin{cases} \alpha < 90^0 \\ \alpha > 270^0 \end{cases}$, so haben alle auf dem linken Ufer des Strahles $\overline{G}$ liegenden Punkte ein positives d, daher auch ein positives p, da der Cosinus eines Winkels im 1. oder im 4. Quadranten positiv ist. Dagegen haben, wenn $90^0 < \alpha < 270^0$, alle auf dem linken Ufer des Strahles liegenden Punkte ein negatives d, daher ebenfalls ein positives p.

c) Da $p = d \cos \alpha$ und $tg\, \alpha = a$, daher $\cos \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+a^2}}$, so ist $p = \frac{d}{\pm\sqrt{1+a^2}}$.

Nun ist aber $d = y_1 - ax_1 - b$, daher $p = \frac{y_1 - ax_1 - b}{\pm\sqrt{1+a^2}}$.

Bezeichnet man mit a und b nur die absoluten Werte der Constanten, so ist $y = \pm ax \pm b$ und wir unterscheiden 2 Fälle:

Erste Hauptlage $y = + ax \pm b$, d. h. $y - ax \pm b = 0$;
zweite Hauptlage $y = - ax \pm b$, d. h. $y + ax \pm b = 0$.

In jeder Hauptlage unterscheiden wir zwei Strahlen, einen mit hohlem und einen mit erhabenem Winkel. Es entspricht daher

dem Strahl in der ersten Hauptlage mit hohlem Winkel

$$p = \frac{y_1 - a x_1 \pm b}{+\sqrt{1 + a^2}},$$

dem Strahl in der ersten Hauptlage mit erhabenem Winkel

$$p = \frac{y_1 - a x_1 \pm b}{-\sqrt{1 + a^2}},$$

dem Strahl in der zweiten Hauptlage mit hohlem Winkel

$$p = \frac{y_1 + a x_1 \pm b}{-\sqrt{1 + a^2}},$$

dem Strahl in der zweiten Hauptlage mit erhabenem Winkel

$$p = \frac{y_1 + a x_1 \pm b}{+\sqrt{1 + a^2}}.$$

Die Gleichungen α) $\frac{y - ax \pm b}{+\sqrt{1 + a^2}} = 0$, β) $\frac{y - ax \pm b}{-\sqrt{1 + a^2}} = 0$, γ) $\frac{y + ax \pm b}{-\sqrt{1 + a^2}} = 0$, δ) $\frac{y + ax \pm b}{\sqrt{1 + a^2}} = 0$ sind die Gleichungen des Strahles $\overline{G}$, wenn er α) in der ersten Hauptlage mit hohlem Winkel, β) in der ersten Hauptlage mit erhabenem Winkel, γ) in der zweiten Hauptlage mit hohlem Winkel, δ) in der zweiten Hauptlage mit erhabenem Winkel liegt.

Die Gleichung eines Strahles pflegt man symbolisch durch das Zeichen $S = 0$ zu bezeichnen; $S = p$ ist dann der Abstand eines Punktes P (x_1, y_1) von dem Strahle $S = 0$, wenn in S statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des Punctes P eingesetzt sind.

Aufgabe 1. *a*) Die Gleichung des Strahles S der Geraden G $(y = 3x - 2)$, der mit X einen hohlen Winkel bildet, aufzustellen. $\frac{y - 3x + 2}{\sqrt{10}} = 0$.

Andere Beispiele. $y = -x + 2$, $3y - x + 1 = 0$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $2x + y = 1$, $x - 3y + \frac{1}{2} = 0$.

Zusatz. Ist a ein Bruch $a = \frac{m}{n}$, so geht $\frac{y - \frac{m}{n}x \pm b}{\pm\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}} = 0$ über in $\frac{ny - mx \pm bn}{\pm\sqrt{n^2 + m^2}} = 0$, wobei zu bemerken ist, dass das erste Glied des Zählers

ny stets positiv ist; wäre dasselbe negativ, so müsste Zähler und Nenner mit -1 multipliciert werden. Dasselbe gilt für die zweite Hauptlage.

b) Der Strahl S soll mit X einen erhabenen Winkel bilden.

$$\frac{y - 3x + 2}{-\sqrt{10}} = 0.$$

Aufgabe 2. Welchen Abstand hat der Punkt $P(2, -2)$ von der Geraden $G(y = 3x - 2)$?

$$p = \frac{y' - 3x' + 2}{\pm\sqrt{10}} = \frac{-2 - 9 + 2}{\pm\sqrt{10}},\ p = \tfrac{9}{10}\sqrt{10}\ \text{(absolut)}.$$

Wird der Strahl mit hohlem α gewählt, so liegt P am rechten Ufer, denn $p = -\frac{9}{10}\sqrt{10}$; wird der Gegenstrahl gewählt, so ist $p = \frac{9}{10}\sqrt{10}$. Prüfung durch Construction.

Aufgabe 3. Den Abstand des Ursprunges $O(0, 0)$ von der Geraden $G(y = ax + b)$ zu berechnen.

$$\frac{y' - ax' - b}{\pm\sqrt{1 + a^2}} = \frac{-b}{\pm\sqrt{1 + a^2}};\ p = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}\ \text{(absolut)}.$$

p ist positiv, wenn O am linken Ufer des Strahles in der Geraden liegt: für einen Strahl in der ersten Hauptlage mit hohlem Winkel oder in der zweiten Hauptlage mit erhabenem Winkel ist p positiv, wenn b positiv ist; für einen Strahl in der ersten Hauptlage mit erhabenem Winkel oder in der zweiten Hauptlage mit hohlem Winkel ist p positiv, wenn b negativ ist. Z. B.

für $\frac{y - 3x + 2}{\sqrt{10}} = 0$ ist $p = +\frac{2}{\sqrt{10}}$; für $\frac{y - 3x - 2}{\sqrt{10}} = 0$ ist $p = -\frac{2}{\sqrt{10}}$,

für $\frac{y - 3x + 2}{-\sqrt{10}} = 0$ ist $p = -\frac{2}{\sqrt{10}}$ und für $\frac{y - 3x - 2}{-\sqrt{10}} = 0$ ist $p = +\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Aufgabe 4. Die Gleichung des Strahles S in der Geraden $G(y + 3x - 2 = 0)$ aufzustellen, wenn $P(2, -3)$ am rechten Ufer des Strahles S liegt. Bezüglich G ist

$$p = \frac{y' + 3x' - 2}{\pm\sqrt{10}} = \frac{-3 + 6 - 2}{\pm\sqrt{10}}.$$

Bezüglich S ist $p = \frac{1}{+\sqrt{10}}$. Es ist also $\frac{y + 3x - 2}{\sqrt{10}} = 0$ die Gleichung des Strahles S, derselbe liegt in der zweiten Hauptlage mit erhabenem α.

2. Die Gleichung einer Geraden G sei $y = ax$; diese soll durch den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ gehen. Es muss also die Bedingungsgleichung $y_1 = ax_1$ gelten, aus welcher a bestimmt werden kann: $a = \frac{y_1}{x_1}$. Die Gleichung der gesuchten Geraden ist

$y = \frac{y_1}{x_1} . x$. Wäre aber $y = ax + b$ als die Gleichung der Geraden G, welche durch P_1 geht, gegeben gewesen, so hätte die Bedingungsgleichung $y_1 = a x_1 + b$ nicht hingereicht, beide Constanten a und b zu bestimmen; es wäre $y = ax + (y_1 - a x_1)$ oder $y - y_1 = a(x - x_1)$ die Gleichung der Geraden durch den Punkt P_1. Diese Gleichung enthält noch eine unbekannte Constante, oder wenn man will, einen veränderlichen Parameter; sie ist daher die Gleichung einer Schar von Geraden, die alle durch P_1 gehen oder sich in P_1 schneiden.

Soll aus dieser Schar eine bestimmte Gerade hervorgehoben werden, so muss man noch eine Bedingung kennen, der diese Gerade gehorcht. Die Gerade sei dadurch bestimmt, dass man noch einen zweiten Punkt $P_2 (x_2, y_2)$ derselben kennt, dann ist $(y_2 - y_1) = a(x_2 - x_1)$ die Bedingungsgleichung dafür, dass die durch P_1 gehende Gerade auch durch P_2 geht. Hieraus ergibt sich für a der bestimmte Wert $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Es ist daher

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ die Gleichung der Geraden durch die zwei Punkte P_1 und P_2. Die Constanten dieser Geraden sind:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Aufgabe 1. Durch die Punkte $P_1 (1, -2)$ und $P_2 (-2, 3)$ ist die Gerade G bestimmt. Welches ist die Gleichung dieser Geraden?

$y = ax + b$. Die Bedingungsgleichungen sind $-2 = a + b$ und $3 = -2a + b$; hieraus ist $a = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{11}{3}$; also $3y + 5x + 11 = 0$ die Gleichung dieser Geraden; sie hat die zweite Hauptlage und besteht aus den Strahlen $\frac{3y + 5x + 11}{-\sqrt{34}} = 0$ und $\frac{3y + 5x + 11}{\sqrt{34}} = 0$, wovon der erstere mit X den hohlen Winkel, der letztere den erhabenen Winkel bildet.

Man kann a und b auch aus obigen allgemeinen Gleichungen bestimmen.

Aufgabe 2. Durch die Punkte $P_1 (1, -1)$, $P_2 (3, 3)$, $P_3 (-1, 7)$ ist das $\triangle P_1 P_2 P_3$ bestimmt. Es sind die Gleichungen der Seiten des Dreieckes so zu bestimmen, dass die Dreiecksfläche positiv wird.

Die Gerade $P_1 P_2$ wird durch die Gleichung $y = 2x - 3$, die Gerade $P_2 P_3$ durch $y = -x + 6$, die Gerade $P_3 P_1$ durch $y = -4x + 3$ dargestellt. Da aber die Dreiecksfläche positiv werden soll, so liegt jeder Eckpunkt am linken Ufer seiner Gegenseite.

$\frac{y_3 - 2x_3 + 3}{\pm \sqrt{5}} = \frac{7 + 2 + 3}{\pm \sqrt{5}}$; da p positiv ist, so ist $\frac{y - 2x + 3}{\sqrt{5}} = 0$ die Gleichung des Strahles $P_1 P_2$; er hat die erste Hauptlage mit hohlem Winkel. Ebenso $\frac{y_1 + x_1 - 6}{\pm \sqrt{2}} = \frac{-1 + 1 - 6}{\pm \sqrt{2}}$; p ist positiv, daher $\frac{y + x - 6}{-\sqrt{2}} = 0$ die Gleichung des Strahles $P_2 P_3$; er hat die zweite Hauptlage mit hohlem Winkel. Endlich $\frac{y_2 + 4x_2 - 3}{\pm \sqrt{17}} = \frac{3 + 12 - 3}{\pm \sqrt{17}}$, p ist positiv, daher $\frac{y + 4x - 3}{\sqrt{17}} = 0$ die Gleichung des Strahles $P_3 P_1$; derselbe hat die zweite Hauptlage mit erhabenem Winkel. Durch Vergleichung der Coordinatenwerte der Punkte P_1 und P_2 sieht man, dass der Richtung der Dreieckseite die Punktfolge $P_1 P_2$ entspricht, daher ist für das Dreieck die Punktfolge $P_1 P_2 P_3$ die positive. ($P_2 P_1 P_3$ wäre die negative Punktfolge.) Cyklische Vertauschung der Eckpunkte. Das Dreieck hat die Seiten $P_1 P_2 = 2\sqrt{5}$, $P_2 P_3 = 4\sqrt{2}$, $P_3 P_1 = 2\sqrt{17}$; die Fläche $f = 12$.

3. Die Gleichungen zweier bestimmter Geraden G_1 ($y = a_1 x + b_1$) und G_2 ($y = a_2 x + b_2$) sind gegeben; um den gemeinsamen Punkt derselben zu bestimmen, mögen die vorläufig noch unbekannten Coordinaten des Durchschnittspunktes $P_1 (x_1, y_1)$ in die Gleichungen G_1, G_2 eingesetzt werden. Es ergeben sich zwei Bedingungsgleichungen $y_1 = a_1 x_1 + b_1$ und $y_1 = a_2 x_1 + b_2$ mit den Unbekannten x_1 und y_1. Es ergibt sich

$$x_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} \text{ und } y_1 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}.$$

Sind $a_1 = a_2$, so schneiden sich die Geraden nicht; sie sind parallel. Aus den Gleichungen folgt $x_1 = \infty$; der Durchschnittspunkt liegt im Unendlichen.

Aufgabe 1. In welchem Punkte schneiden sich die Geraden G_1 ($y - 3x + 7 = 0$) und G_2 ($y + 3x + 1 = 0$)?

$y_1 - 3x_1 + 7 = 0$ und $y_1 + 3x_1 + 1 = 0$ sind die beiden Bedingungsgleichungen mit den Unbekannten x_1 und y_1. Sie ergeben $P_1 (1, -4)$.

Aufgabe 2. Durch die Geraden G_1 ($y - 3x + 7 = 0$), G_2 ($y + 3x + 1 = 0$), G_3 ($5y + 3x - 19 = 0$) wird ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ gebildet. Es sind die Coordinaten der Eckpunkte desselben zu bestimmen.

Aus G_1 und G_2 ergibt sich der Punkt $P_3 (1, -4)$ (vergl. die vorhergehende Aufgabe). Aus G_2 und G_3 ergibt sich der Punkt $P_1 (-2, 5)$ und aus G_3 und G_1 ergibt sich der Punkt $P_2 (3, 2)$.

Zusatz. Soll das Dreieck positiven Richtungssinn haben, so ist, da der Eckpunkt P_1 der Seite G_1 gegenüber liegt und p positiv sein muss, $\frac{y - 3x + 7}{+\sqrt{10}} = 0$ die Gleichung des Strahles $\overline{G}_1$; derselbe hat die erste Hauptlage mit hohlem Winkel. Analog sind $\frac{y + 3x + 1}{+\sqrt{10}} = 0$ und $\frac{5y + 3x - 19}{-\sqrt{34}} = 0$

die Gleichungen der Strahlen $\overline{G}_2$ und $\overline{G}_3$. Durch Vergleichung der Coordinaten der Punkte P_2 und P_3 mit der Richtung des Strahles $\overline{G}_1$ erkennt man, dass das positive Dreieck die Punktfolge $P_1P_3P_2$ hat. Dieses Dreieck hat die Strecken $P_1P_3 = 3\sqrt{10}$, $P_3P_2 = 2\sqrt{10}$, $P_2P_1 = \sqrt{34}$; $f = 18$. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ hat die Fläche $f = -18$. (Vergl. II A, 1, Aufg. 4.)

Zweites Beispiel. $y = 3x - 2$, $y = -2x + 3$, $x = -3y - 6$.

4. *a*) Zwei sich schneidende Gerade bilden miteinander vier Winkel von verschiedener Größe (vergl. I, 5); wird aber in einer dieser Geraden eine Richtung festgesetzt und diese als Anfangsschenkel betrachtet, so sind zwischen beiden Gebilden zwei Winkel, ein hohler und erhabener, bestimmt. Die Gleichungen zweier Geraden G_1 $(y = a_1x + b_1)$ und G_2 $(y = a_2x + b_2)$ sind gegeben und G_1 sei als Anfangsschenkel angenommen; der Winkel beider Geraden ist φ. Dreht man einen Strahl zuerst aus der Richtung X in den Strahl $\overline{G}_1$ um $\alpha_1{}^0$, sodann um den Punkt D in die Gerade G_2 um β^0, so ist $\alpha_1 + \beta = \alpha_2$ und $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$; $tg\ \beta = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{a_2 = a_1}{1 + a_1a_2}$.

Aus dieser Gleichung ist β zweideutig bestimmt; ist β_1 der entsprechende hohle Winkel, so ist $\beta_2 = 180 + \beta_1$.

Ist $tg\ \beta \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, so ist der hohle Winkel β_1 $\begin{Bmatrix}\text{spitz}\\ \text{stumpf}\end{Bmatrix}$.

Wenn die beiden Geraden G_1 und G_2 auch nach ihren Richtungen determiniert sind, so ist der Winkel, den sie bilden, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 1. Die Geraden G_1 $(y = 3x - 2)$ und G_2 $(y = -2x + 3)$ bilden den Winkel β; β zu bestimmen.

$tg\ \beta = \dfrac{-2-3}{1+(-6)} = \dfrac{-5}{-5} = 1$. Da kein Strahl als Anfangsschenkel gegeben ist, so sind vier Winkel möglich. $\beta_1 = 45^0$ $\beta_2 = 135^0$, $\beta_3 = 225^0$, $\beta_4 = 315^0$. Prüfung durch Construction.

Aufgabe 2. Die Geraden G_1 $(y = 3x - 2)$ und G_2 $(y = -2x + 3)$ bilden den Winkel β, wobei jedoch G_1 als Anfangsschenkel angenommen wird; β zu bestimmen.

Wird α_1 als hohler Winkel genommen, dann ist, wenn α_2 als $\begin{Bmatrix}\text{hohler}\\ \text{erhabener}\end{Bmatrix}$ Winkel genommen wird, $\beta \begin{Bmatrix}45^0\\ 225^0\end{Bmatrix}$. Wird aber α_1 als erhabener Winkel genommen, so ist, wenn α_2 als $\begin{Bmatrix}\text{hohler}\\ \text{erhabener}\end{Bmatrix}$ Winkel genommen wird, $\beta \begin{Bmatrix}225^0\\ 45^0\end{Bmatrix}$.

Aufgabe 3. Die Strahlen $\overline{G}_1$ $\left(\dfrac{y - 3x + 2}{\sqrt{10}} = 0\right)$ und

$\overline{G}_2 \left(\frac{y+2x-3}{\sqrt{5}} = 0\right)$ bilden den Winkel β, wobei $\overline{G}_1$ als Anfangsschenkel angenommen wird; β zu bestimmen.

$\overline{G}_1$ ist in der ersten Hauptlage mit spitzem Winkel, $\overline{G}_2$ in der zweiten Hauptlage mit erhabenem Winkel; β daher 225°.

Wäre $\overline{G}_1 \left(\frac{y-3x+2}{\sqrt{10}} = 0\right)$ und $\overline{G}_2 \left(\frac{y+2x-3}{-\sqrt{5}} = 0\right)$, so wäre $\beta = 45^0$.

Wäre $\overline{G}_2$ der Anfangsschenkel und $\overline{G}_1 \left(\frac{y-3x+2}{\sqrt{10}} = 0\right)$, $\overline{G}_2 \left(\frac{y+2x-3}{\sqrt{5}} = 0\right)$, so wäre $(G_2 G_1) = 135^0$; für $G_1 \left(\frac{y-3x+2}{\sqrt{10}} = 0\right)$ und $G_2 \left(\frac{y+2x-3}{-\sqrt{5}} = 0\right)$, wäre $(G_2 G_1) = 315^0$.

b) Aus $tg\,\beta = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}$ ergibt sich für $\beta = 90^0$, $1 + a_1 a_2 = 0$ oder $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ als die Bedingung, dass zwei Geraden G_1 und G_2 zu einander normal sind. Für $a_2 = a_1$ ergibt sich $\beta = 0^0$ oder 180^0. $a_2 = a_1$ ist die Bedingung, dass zwei Geraden G_1 und G_2 einander parallel sind (vergl. V, B, 3).

Aufgabe 1. Zur Geraden G_1 $(y = 2x + 3)$ durch $O\,(0, 0)$, α) die Parallele, β) die Normale zu ziehen.

Die Gleichung der gesuchten Geraden ist $y = ax$, wobei a noch unbekannt ist. Es ergibt sich die Bedingungsgleichung $\alpha)\ a = 2$, $\beta)\ a = -\frac{1}{2}$.

$y = 2x \ldots \alpha)$, $y = -\frac{1}{2}x \ldots \beta)$ sind die Gleichungen der gesuchten Geraden.

Zusatz. Zum Strahle $\overline{G} \left(\frac{y-2x-3}{\sqrt{5}} = 0\right)$ ist der Strahl $S_1 \left(\frac{y-2x}{\sqrt{5}} = 0\right)$ direct, der Strahl $S_2 \left(\frac{y-2x}{-\sqrt{5}} = 0\right)$ entgegengesetzt parallel, ferner der Strahl $S_3 \left(\frac{2y+x}{-\sqrt{5}} = 0\right)$ unter 90°, der Strahl $S_4 \left(\frac{2y+x}{\sqrt{5}} = 0\right)$ unter 270° normal.

Aufgabe 2. Zur Geraden G_1 $(y = 2x + 3)$ durch $P\,(1, -2)$ α) die Parallele, β) die Normale zu ziehen.

Die Gleichung der durch P gezogenen Geraden hat die Form $y - y_1 = a(x - x_1)$, in diesem Falle $y + 2 = a(x - 1)$; die Bedingungsgleichungen sind: $\alpha)\ a = 2$, $\beta)\ a = -\frac{1}{2}$.

$y = 2x - 4 \ldots \alpha)$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ oder $2y + x + 3 = 0 \ldots \beta)$ sind die Gleichungen der gesuchten Geraden.

Aufgabe 3. Im Punkte $P\,(3, ?)$ der gegebenen Geraden G_1 $(y = 2x + 3)$ soll eine Gerade G_2 gezogen werden, welche mit G_1 (als Anfangsschenkel) den Winkel $\beta = 60^0$ bildet.

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}.$$

$$\sqrt{3} = \frac{a_2 - a_2}{1 + a_1 a_2} = \frac{a_2 - 2}{1 + 2a_2}; \quad a_2 = \frac{\sqrt{3} + 2}{1 - 2\sqrt{3}} = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{-11}.$$

Aus dieser goniometrischen Gleichung ergeben sich zwei Lösungen: für α_2 ein stumpfer und ein erhabener Winkel. $\alpha_2 = 123^0 26' 5''$, $303^0 26' 5''$.

Der Punkt P hat die Coordinaten (3, 9); die Gerade hat die Gleichung $y - 9 = -\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}(x - 3)$.

Zusatz. Wenn nicht angegeben wäre, dass G_1 der Anfangsschenkel ist, dann wäre auch $\sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$ möglich.

$$a_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3} - 8}{-11} = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}.$$

$$\alpha_2 = 176^0 33' 55'', \quad 356^0 33' 55''.$$

Die Gerade hat die Gleichung $y - 9 = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}(x - 3)$.

Aufgabe 4. Im Punkte $P(-2, 1)$ soll eine Gerade G_2 gezogen werden, die mit der Geraden G_1 $(y = 2x + 3)$ den Winkel $\beta = 45^0$ bildet.

$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 45^0 = 1$; $1 = \frac{a_2 - 2}{1 + 2a_2}$; $a_2 = -3$, wenn G_1 der Anfangsschenkel, $a_2 = 3$, wenn G_1 der Endschenkel ist.

$$y - 1 = -3(x + 2) \quad \text{oder} \quad y + 3x + 5 = 0 \ldots G_2,$$
$$y - 1 = 3(x + 2) \quad \text{oder} \quad y - 3x - 7 = 0 \ldots G'_2.$$

Die Geraden G_2, G_2' erfüllen die Aufgabe.

Aufgabe 5. Die Geraden $G_1(y = 2x + 2)$, $G_2(y = 2x - 2)$, $G_3\ (y = -\frac{1}{2}x + 3)$, $G_4\ (y = -\frac{1}{2}x - 3)$ bilden ein Rechteck. Die Seiten und Diagonalen des Rechteckes, die Winkel der Seiten und Diagonalen, die Winkel der Diagonalen zu bestimmen.

Die Eckpunkte sind $A(2, 2)$, $B(\frac{2}{5}, \frac{14}{5})$, $C(-2, -2)$, $D(-\frac{2}{5}, -\frac{14}{5})$. Die Diagonalen haben die Gleichungen $y = x$ und $y = 7x$. Die Seiten haben die Längen: $AB = \frac{4}{5}\sqrt{5}$, $BC = \frac{12}{5}\sqrt{5}$, $AC = 4\sqrt{2}$; $ABCD$ ist die positive Fläche.

$$\measuredangle BAC = 71^0 33' 54''. \qquad \measuredangle AOB = 36^0 52' 12''.$$

Aufgabe 6. Durch die Geraden $G_1\ (y - 3x + 7 = 0)$, $G_2\ (y + 3x + 1 = 0)$, $G_3\ (5y + 3x - 19 = 0)$ wird das (positive) Dreieck $P_1 P_3 P_2$ gebildet. (Vergl. V, B, 3, Aufg. 2). Es sind die Winkel des Dreieckes zu berechnen.

Die Reihenfolge der Außenwinkel ist $(G_1 G_3)$, $(G_3 G_2)$, $(G_2 G_1)$; ihre Nebenwinkel sind die Dreieckswinkel. Die Winkel sind sämmtlich hohl, daher sind sie alle eindeutig bestimmt.

$\operatorname{tg}(G_1 G_3) = \frac{-\frac{3}{5} - 3}{1 - \frac{9}{5}} = +\frac{9}{2}$; der Dreieckswinkel bei P_2 ist stumpf.

$\operatorname{tg}(G_3 G_2) = \frac{-3 + \frac{3}{5}}{1 + \frac{9}{5}} = -\frac{6}{7}$; $\quad \operatorname{tg}(G_2 G_1) = \frac{+3+3}{1-9} = \frac{3}{4}$.

Die Dreieckswinkel sind daher: $P_2 = 102^0\,31'\,44''$, $P_1 = 40^0\,36'\,4''$, $P_3 = 36^0\,52'\,12''$.

5. *a*) Wenn zwei Strahlen durch ihre Gleichungen $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ gegeben sind, so sind die Abstände p_1 und p_2 des Punktes $P(x_1, y_1)$ von diesen Strahlen $S_1 = p_1$ und $S_2 = p_2$ nach Richtung und Größe bestimmt.

Es sei nun $p_1 = -p_2$, dann ist $S_1 + S_2 = 0$; setzt man in der letzten Gleichung für x_1, y_1 die laufenden Coordinaten ein, so stellt $S_1 + S_2 = 0$ den geom. Ort des Punktes vor, dessen Abstände von den Strahlen $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ entgegengesetzt gleich sind. Dieser g. O. ist die Symmetrale des Winkels $(S_1 S_2)$.

Es sei $p_1 = p_2$, dann ist $S_1 - S_2 = 0$, die Symmetrale des Nebenwinkels des Winkels $(S_1 S_2)$.

Zusatz. Verkehrt man in einem Strahle die Richtung, so tauscht der Winkel mit seinem Nebenwinkel den Platz; ebenso auch die Symmetralen. Die beiden Strahlen $S_1 = 0$, $-S_2 = 0$ haben $S_1 + (-S_2) = S_1 - S_2$ als Symmetrale des Winkels, $S_1 - (-S_2) = S_1 + S_2$ als Symmetrale des Nebenwinkels.

Verkehrt man in beiden Strahlen die Richtung, so tauscht der Winkel mit seinem Seitenwinkel den Platz; die Symmetralen bleiben daher dieselben. Die Strahlen $-S_1 = 0$, $-S_2 = 0$ haben $(-S_1) + (-S_2) = -(S_1 + S_2) = 0$ als Symmetrale des Winkels und $(-S_1) - (-S_2) = S_2 - S_1 = 0$ als Symmetrale des Nebenwinkels. Die Symmetralen $S_2 - S_1 = 0$ und $S_1 - S_2 = 0$ bilden eine Gerade; ebenso $S_1 + S_2 = 0$ und $-(S_1 + S_2) = 0$.

Zusatz. Die Symmetrale zweier Geraden ist ein zweideutiger Begriff; es gibt zwei zu einander normale Symmetralen zweier Geraden. (Vergl. die folgende Aufgabe.)

b) Wenn $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ die Gleichungen zweier Strahlen sind und K constant ist, so ist $S_1 + KS_2 = 0$ die Gleichung eines Strahles, welcher durch den gemeinsamen Punkt der beiden Strahlen S_1 und S_2 geht; wenn K jedoch ein Parameter der Gleichung ist, so stellt $S_1 + KS_2 = 0$ die Schar aller durch diesen Punkt gehenden Geraden vor.

$y = 0$ ist die Gleichung der X-Achse, $x = 0$ jene der Y-Achse; $y + Kx = 0$ ist die Gleichung α) einer bestimmten durch den Ursprung gezogenen Geraden; β) der Schar aller durch den Ursprung gezogenen Geraden.

Zusatz. Drei Strahlen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ gehen durch einen Punkt, wenn $S_1 + KS_2 + CS_3 = 0$ ist.

Aufgabe 1. Die Symmetrale des Winkels der beiden Strahlen $S_1 \left(\frac{y - 2x + 3}{\sqrt{5}} = 0\right)$ und $S_2 \left(\frac{y - 3x - 2}{\sqrt{10}} = 0\right)$ zu bestimmen.

$$S_1 + S_2 = 0; \quad y\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2} - y + 3x + 2 = 0$$
$$y(\sqrt{2} + 1) = (2\sqrt{2} + 3)\,x - (2 - 3\sqrt{2}).$$

Die Gleichung der Symmetrale ist: $y = (1 + \sqrt{2})\,x - (8 - 5\sqrt{2})$.

$$S_1 - S_2 = 0; \quad y\sqrt{2} - 2x + 3\sqrt{2} - y + 3x + 2 = 0.$$
$$y(\sqrt{2} - 1) = (3 - 2\sqrt{2})\,x - (2 + 3\sqrt{2}).$$

Die Gleichung der Symmetrale des Nebenwinkels ist:

$$y = (1 - \sqrt{2})\,x - (8 + 5\sqrt{2}.$$

Da $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$, so stehen diese beiden Symmetralen zu einander normal. (Allgemeiner Nachweis dieses Satzes.)

Aufgabe 2. Die Symmetralen der Dreieckswinkel schneiden sich in einem Punkte.

Man bestimmt die Seiten des Dreieckes ihrer Richtung nach (vergl. V, *B*, 4, Aufg. 6). Die Strahlengleichungen der Dreiecksseiten sind: $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$. Da die Dreieckswinkel die Nebenwinkel der Winkel dieser Strahlen sind, so haben die Symmetralen der Dreieckswinkel die Gleichungen $S_1 - S_2 = 0$, $S_2 - S_3 = 0$, $S_3 - S_1 = 0$.

Da $(S_1 - S_2) + (S_2 - S_3) + (S_3 - S_1) = 0$, so gehen alle drei Symmetralen durch einen Punkt; derselbe kann als Durchschnittspunkt von $S_1 - S_2 = 0$, $S_2 - S_3 = 0$ bestimmt werden.

Aufgabe 3. Im Dreiecke schneiden sich die Symmetralen zweier Außenwinkel und die Symmetrale des dritten Dreieckswinkels in einem Punkte.

Sind $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ die Strahlengleichungen der Dreiecksseiten, so sind $S_1 + S_2 = 0$ und $S_2 + S_3 = 0$ die Symmetralen zweier Außenwinkel, $S_1 - S_3 = 0$ ist die Symmetrale des dritten Dreieckswinkels. Da

$$(S_1 + S_2) - (S_2 + S_3) - (S_1 - S_3) = 0,$$

so schneiden sich diese drei Symmetralen in einem Punkte.

Aufgabe 4. Im Dreiecke schneiden sich *a*) die Seitensymmetralen, *b*) die Höhen, *c*) die Schwerlinien in einem Punkte.

C. 1. Der Punkt $P(x_1, y_1)$ liegt auf dem Kreise $K(y^2 + x^2 = a^2)$, wenn $a^2 - (y_1^2 + x_1^2) = 0$ ist; liegt P nicht auf dem Kreise, so wird $a^2 - (y_1^2 + x_1^2) = d^2$, wobei $d^2 \gtrless 0$ wird.

Wenn der Punkt P auf dem Kreise liegt, ist $a = \pm\sqrt{y_1^2 + x_1^2}$ oder $a - (\pm\sqrt{y_1^2 + x_1^2}) = 0$; wenn der Punkt $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises liegt, $a - (\pm\sqrt{y_1^2 + x_1^2}) = p$, wobei p der Abstand des Punktes vom Kreise ist.

Für $x_1 = y_1 = 0$ ist $p = a$. Der Mittelpunkt hat vom Kreise die Entfernung a; dieselbe ist positiv, daher ist die Bewegung im Kreise im positiven Sinne zu denken, wenn die Gleichung die Form $a^2 - (y^2 + x^2) = 0$ hat. [Im negativen Sinne: $y^2 + x^2 - a^2 = 0$].

Jeder Punkt (O ausgenommen) hat vom Kreise zwei Entfernungen

$$a - \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = p_1 \quad \text{und} \quad a + \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = p_2.$$

Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so ist seine Entfernung von beiden Seiten des Kreises positiv; $p_1 > 0$, $p_2 > 0$.

Liegt der Punkt außerhalb des Kreises, so ist sein Abstand von der ihm näheren (convexen) Seite des Kreises negativ, von der ihm ferneren (concaven) Seite des Kreises positiv; $p_1 < 0$, $p_2 > 0$. Im ersten Falle liegt P für beide Theile des Kreises am linken Ufer, im zweiten Falle für den ihm näheren Kreistheil am rechten Ufer, den ihm ferneren Kreistheil am linken Ufer.

Man erhält durch Multiplication $a^2 - (y_1^2 + x_1^2) = p_1 p_2$; setzt man $p_1 p_2 = d^2$ (siehe oben), so bedeutet d^2 die Potenz des Punktes P. Ist der

Punkt $\begin{Bmatrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{Bmatrix}$ des Kreises gelegen, so ist seine Potenz $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$;

für einen Punkt, welcher auf dem Kreise liegt, wird [$p_1 = 0$, $p_2 = 2a$, $d^2 = 0$] die Potenz 0.

Für die beiden Abstände p_1 und p_2 gilt $p_1 p_2 = d^2$, wobei $d^2 = a^2 - (y_1^2 + x_1^2)$. d ist in jedem Falle als Kathete vorstellbar. Ist d^2 positiv, so ist a die Hypotenuse, $\sqrt{y_1^2 + x_1^2}$ die zweite Kathete. Ist d^2 negativ, so ist $\sqrt{y_1^2 + x_1^2}$ die Hypotenuse, a die zweite Kathete. $p_2 + p_1 = 2a$.

Liegt P innerhalb des Kreises, so stellt d die halbe Mittelsehne (kürzeste Sehne) des Punktes P vor; liegt P außerhalb des Kreises, so ist d die von P an den Kreis gezogene Tangente (Länge der Tangente).

Der g. O. aller Punkte, welche gleiche (positive oder negative) Potenz [$d^2 = p_1 p_2$] bezüglich des Kreises K ($y^2 + x^2 = a^2$) haben, ist ein zu K concentrischer Kreis $K\,(O,\ r = p_2 - p_1)$. Es ist nämlich $a - \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = p_1$ und $a + \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = p_2 \qquad p_2 - p_1 = 2\sqrt{y_1^2 + x_1^2}$.

Setzt man für den festen Punkt $P_1\,(x_1, y_1)$ den laufenden Punkt $P\,(x, y)$, so erhält man den geometrischen Ort des Punktes P_1. Es ist

$$\sqrt{y^2 + x^2} = \frac{p_2 - p_1}{2} \text{ die Gleichung des Kreises } K'\left(0, \frac{p_2 - p_1}{2}\right).$$

Im Folgenden wird die Gleichung $a^2 - (y^2 + x^2) = 0$, ebenso die allgemeine Gleichung $a^2 - (y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = 0$ symbolisch durch $K = 0$ bezeichnet werden; demgemäß erhält die allgemeine Gleichung

$$y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0$$

das Symbol: $- K = 0$. $K = d^2$ bedeutet den geometrischen Ort aller Punkte mit der gleichen Potenz d^2 oder, wenn statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten eines Punktes P eingesetzt sind, die Größe der Potenz dieses Punktes.

2. Der Kreis ist durch die Kenntnis des Mittelpunktes und des Halbmessers bestimmt. Um in der Gleichung $y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0$ die drei Constanten zu be-

stimmen, braucht man drei Bedingungsgleichungen. Der Kreis ist daher durch drei Punkte bestimmt.

Die Aufgabe vereinfacht sich wesentlich, wenn über eine oder über zwei Constanten in besonderer Weise verfügt ist. Z. B.: Der Kreis geht durch die Peripherie, dann ist $F = 0$; der Kreis ist in der Scheitellage, dann ist $D = 0$ und $F = 0$; der Kreis ist in der Mittelpunktslage, dann ist $D = 0$ und $E = 0$. (IV. *C.* 1. *a*, *b*, *c*).

Aufgabe 1. Den Kreis, durch seine Gleichung darzustellen, welcher durch die gegebenen Punkte P_1 (2, 2), P_2 (0·4, 2·8), P_3 (— 2, — 2) geht.

Die Gleichung lautet: $y^2 + x^2 + dy + ex + f = 0$; d, e, f sind unbekannt. Die Bedingungsgleichungen sind:
$8 + 2d + 2e + f = 0$, $6{\cdot}4 + 2{\cdot}8d + 0{\cdot}4e + f = 0$ und $8 - 2d - 2e + f = 0$. Diese Gleichungen haben die Lösung: $f = -8$, $d = 0$, $e = 0$; es ergibt sich also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $r = 2\sqrt{2}$. Die Gleichung des Kreises ist $y^2 + x^2 = 8$; der Kreis hat die Mittelpunktslage.

Aufgabe 2. Die Gleichung des Kreises aufzustellen, welcher durch den Ursprung und die Punkte A (8, 0), B (0, 6) geht.

Die Gleichung lautet $y^2 + x^2 + dy + ex = 0$, d und e sind unbekannt. Die Bedingungsgleichungen sind: $16 + 8e = 0$, $36 + 6d = 0$; $e = -8$, $d = -6$; $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $r = 5$. Die Gleichung dieses Kreises ist
$y^2 + x^2 - 6y - 8x = 0$ oder $(y - 3)^2 + (x - 4)^2 = 25$.

Zusatz. Aufgaben derselben Art über die Ellipse, Hyperbel, Parabel. Die Hyperbel und die Ellipse sind durch je zwei Punkte (sowohl in der Scheitel- als in der Mittelpunktslage) bestimmt, die Parabel durch einen Punkt. Z. B. die Gleichung der Parabel aufzustellen, welche durch den Punkt P (x_1, y_1) geht. Die Gleichung ist $y^2 = 2px$, die Bedingungsgleichung ist $y_1{}^2 = 2px_1$, woraus $p = \frac{y_1{}^2}{2x_1}$. [p ist die dritte stetige Proportionale zwischen $2x_1$ und y_1 (Construction des p)]. $y^2 = \frac{y_1{}^2}{x_1} \cdot x$ ist die Gleichung der gesuchten Parabel.

3. Die Gleichungen zweier Kreise sind gegeben

$$K_1\ (y^2 + x^2 = a_1{}^2) \text{ und } K_2\ [y^2 + (x - x_0)^2 = a_2{}^2].$$

Wenn man die Coordinaten des noch unbekannten Durchschnittspunktes P (x_1, y_1) in diese Gleichungen einsetzt, erhält man die Bedingungsgleichungen:

$$y_1{}^2 + x_1{}^2 = a_1{}^2 \text{ und } y_1{}^2 + x_1{}^2 - 2x_0 x_1 = a_2{}^2 - x_0{}^2.$$

Es ergibt sich $x_1 = \frac{a_1{}^2 - a_2{}^2 + x_0{}^2}{2x_0} = m$ und

$$y_1 = \pm \frac{1}{2x_0} \sqrt{(a_1 + a_2 + x_0)(a_1 - a_2 - x_0)(a_1 - a_2 + x_0) - a_1 + a_2 + x_0)} = \pm n.$$

Die beiden Kreise haben daher im allgemeinen zwei Durchschnittspunkte $A(m, n)$, $B(m, -n)$. Diese beiden Punkte haben dieselbe Abscisse und entgegengesetzt gleiche Ordinaten, sie liegen symmetrisch bezüglich der X-Achse, resp. bezüglich ihrer Centrallinie.

x_0 ist der Centralabstand beider Kreise.

Sobald ein Factor 0 wird, wird $y_1 = 0$; die beiden Punkte A und B fallen zusammen. Berührung. Sobald nur ein Factor negativ wird, ist y imaginär; die beiden Kreise schneiden sich nicht. (Es können nie zwei Factoren zugleich negativ werden. Warum?)

a) Für $a_1 + a_2 = x_0$ berühren sich im Kreise; äußere Berührung. [Für $a_1 + a_2 > x_0$ schneiden sich die Kreise in zwei Punkten A, B, für $a_1 + a_2 < x_0$ schneiden sich die Kreise nicht. Ausschließung].

b) Für $\left\{\begin{matrix} x_0 = a_2 - a_1 \\ x_0 = a_1 - a_2 \end{matrix}\right\}$ berühren sich im Kreise; innere Berührung.

[Für $\left\{\begin{matrix} x_0 < a_2 - a_1 \\ x_0 < a_1 - a_2 \end{matrix}\right\}$ schneiden sich die Kreise nicht; Einschließung.]

Aufgabe 1. Wo schneiden sich die Kreise
$K_1\,(y^2 + x^2 - 6y - 8x = 0)$ und $K_2\,(y^2 + x^2 - 6x = 0)$?

Die Coordinaten des noch unbekannten Durchschnittspunktes sind x_1 und y_1. Die Bedingungsgleichungen

$$y_1{}^2 + x_1{}^2 - 6y_1 - 8x_1 = 0 \text{ und } y_1{}^2 + x_1{}^2 - 6x_1 = 0,$$

in welchen x_1 und y_1 die Unbekannten sind, haben die Lösungen: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x'_1 = \frac{27}{5}$, $y'_1 = -\frac{9}{5}$. Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten $A(0, 0)$, $B\left(\frac{27}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

Zusatz. Aufgaben derselben Art über verschiedene geometrische Örter: z. B. die Durchschnittspunkte der einander conjugierten Hyperbeln zu bestimmen. $H\,(16y^2 - 9x^2 = -144)$ und $H'\,(16y^2 - 9x^2 = 144)$. Lösung: die beiden Hyperbeln schneiden sich nicht.

4. Wenn $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die Gleichungen zweier Kreise sind, so sind die Potenzen des Punktes $P(x_1, y_1)$ durch die Gleichungen $K_1 = \pm d_1{}^2$ und $K_2 = \pm d_2{}^2$ bestimmt. Hat der Punkt P bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz, so ist $K_1 = K_2$, d. h. $K_1 - K_2 = 0$. Setzt man in dieser Gleichung statt der bestimmten Coordinaten des Punktes P die laufenden Coordinaten ein, so erhält man die Gleichung für den g. O. des Punktes, welcher für die zwei Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ dieselbe Potenz hat. Diese Gleichung ist $K_1 - K_2 = 0$, oder $(-y^2 - x^2 - d_1 y - e_1 x - f_1) - (-y^2 - x^2 - d_2 y - e_2 x - f_2) = 0$, $y(d_2 - d_1) + x(e_2 - e_1) + (f_2 - f_1) = 0$. $K_1 - K_2 = 0$ ist daher die Gleichung einer Geraden; dieselbe ist der g. O. aller Punkte, welche bezüglich K_1 und K_2 die gleiche Potenz haben. Potenz-

gerade. Wenn sich die Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ $\begin{Bmatrix}\text{schneiden}\\ \text{berühren}\end{Bmatrix}$, so geht die Potenzgerade durch $\begin{Bmatrix}\text{die gemeinsamen Punkte}\\ \text{den gemeinsamen Punkt}\end{Bmatrix}$.

$K_1 - K_2 = 0$ ist also die gemeinsame $\begin{Bmatrix}\text{Secante}\\ \text{Tangente}\end{Bmatrix}$ der beiden sich $\begin{Bmatrix}\text{schneidenden}\\ \text{berührenden}\end{Bmatrix}$ Kreise K_1 und K_2.

Überhaupt ist, wenn $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ die Gleichung zweier sich $\begin{Bmatrix}\text{schneidender}\\ \text{berührender}\end{Bmatrix}$ Kreise sind, $K_1 + K_2 = 0$ die Gleichung einer Schar von Kreisen, welche durch die gemeinsamen Punkte der sich $\begin{Bmatrix}\text{schneidenden}\\ \text{berührenden}\end{Bmatrix}$ Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ gehen. Unter dieser Schar von Kreisen befindet sich eine Gerade, die gemeinsame Secante oder Tangente aller Kreise dieser Schar; dieselbe kann als ein Kreis mit unendlich großem Radius aufgefasst werden.

$K_1 = 0$, $K_2 = 0$ sind die Gleichungen zweier Kreise.

$K_1 - d^2 = 0$, $K_2 - d^2 = 0$ sind die Gleichungen zweier Kreise, nämlich der geom. Örter der Punkte, die bezüglich $K_1 = 0$, respective $K_2 = 0$ gleiche Potenz haben. $K_1 - K_2 = 0$ kann als $(K_1 - d^2) - (K_2 - d^2) = 0$ aufgefasst werden. Diese Gleichung gilt für jede Größe von d^2. Wählt man d^2 genügend groß, so werden sich die Kreise $K_1 - d^2 = 0$ und $K_2 - d^2 = 0$ schneiden und $K_1 - K_2 = 0$ wird die Gleichung der diesen Kreisen gemeinsamen Secante sein. (Dieser Gedanke wird zur Construction der Potenzlinie zweier Kreise, die sich nicht schneiden, verwendet.)

Zusatz. Vom Winkel zweier sich schneidender Kreise wird später die Rede sein.

Aufgabe 1. Die Potenzgerade der zwei Kreise
$K_1\ (y^2 + x^2 - 6y - 8x = 0)$ $K_2\ (y^2 + x^2 - 6x = 0)$
durch ihre Gleichung darzustellen.

Aus $-y^2 - x^2 + 6y + 8x + y^2 + x^2 - 6x = 0$ folgt $3y + x = 0$, $y = -\frac{1}{3}x$; die Potenzgerade geht durch den Ursprung. Die Centrallinie beider Kreise hat die Gleichung $y = 3x - 9$, die Mittelpunkte sind $O_1\ (4, 3)$, $O_2\ (3, 0)$. Aus der Constanten $a = -\frac{1}{3}$ in der Gleichung der Potenzgeraden und $a = 3$ in der Gleichung der Centrallinie ersieht man, dass $-\frac{1}{3} . 3 + 1 = 0$, d. h. die Potenzgerade steht auf der Centrallinie senkrecht. Der Centralabstand ist $\sqrt{10}$.

Aufgabe 2. Die Potenzgeraden der drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ durch ihre Gleichungen darzustellen.

Die Potenzgerade der Kreise K_1 und K_2 ist $K_1 - K_2 = 0$, jene der Kreise K_2 und K_3 ist $K_2 - K_3 = 0$, jene der Kreise K_3 und K_1 ist $K_3 - K_1 = 0$.

Da nun $(K_1 - K_2) + (K_2 - K_3) + (K_3 - K_1) = 0$ eine identische Gleichung ist, so gehen die drei Potenzgeraden durch einen Punkt. Potenzcentrum dreier Kreise.

D. 1. Wenn $K\,(a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2)$ die Gleichung eines Kegelschnittes in der Mittelpunktslage (vergl. IV, *C*, 3) und $G\,(y = Ax)$ die Gleichung einer Geraden, welche durch $O\,(0, 0)$ geht, ist, so sind die Bedingungsgleichungen für den Durchschnittspunkt dieser Linien $P_1\,(x_1, y_1)$:

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2 \text{ und } y_1 = Ax,$$

woraus sich

$$x_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}} \text{ und } y_1 = \pm \frac{abA}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}$$

ergibt.

a) Für $a = b$ (Kreis) haben die beiden Linien in jeder Lage von G zwei Durchschnittspunkte

$$P_1\left(\frac{a}{\sqrt{1 + A^2}}, \frac{aA}{\sqrt{1 + A^2}}\right) \text{ und } P_1'\left(\frac{-a}{\sqrt{1 + A^2}}, \frac{-aA}{\sqrt{1 + A^2}}\right).$$

Jede durch den Ursprung (Mittelpunkt) gezogene Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten. Die Verbindungsstrecke $P_1P'_1 = 2a$; sie heißt Durchmesser und wird durch $O\,(0, 0)$ halbiert. (Vergl. IV, *C*, 1, 2.) Alle Durchmesser sind gleich groß.

b) Für $a \gtrless b$, wobei a^2 und b^2 positiv sind (Ellipse), haben beide Linien in jeder Lage von G zwei Durchschnittspunkte

$$P_1\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}, \frac{abA}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}\right)$$

und

$$P_1'\left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}, -\frac{abA}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}\right).$$

Die Verbindungsstrecke $P_1P'_1$ (Durchmesser) hat die Größe $P_1P'_1 = \frac{2ab\sqrt{1 + A^2}}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}}$. Die Größe des Durchmessers ist von A abhängig: für $A = 0$ wird $P_1P_2 = 2a$. Da $P_1P'_1 = \frac{2ab\sqrt{1 + A^2}}{\sqrt{a^2A^2 + b^2}} = \frac{2ab\sqrt{\frac{1}{A^2} + 1}}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{A^2}}}$, so ist $P_1P'_1 = 2b$, wenn $A = \infty$ wird.

Jeder Durchmesser wird durch O halbiert.

c) Für a^2 positiv, b^2 negativ (Hyperbel) wird

$$P_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}}, \frac{abA}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}}\right)$$

und $P_2\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2A^2}}, -\frac{abA}{\sqrt{b^2-a^2A^2}}\right)$.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

α) Ist $b^2 > a^2A^2$, so schneidet die Gerade den Kegelschnitt in zwei Punkten. Die Strecke P_1P_1' (Durchmesser) hat die Größe $P_1P_1' = \frac{2ab\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{b^2-a^2A^2}}$; für $A=0$ wird $P_1P_1' = 2a$.

β) Ist $b^2 < a^2A^2$, so schneidet die Gerade den Kegelschnitt nicht.

γ) Ist $b^2 = a^2A^2$, d. h. $A = \pm\frac{b}{a}$, so schneidet die Gerade den Kegelschnitt in den zwei Punkten P_1 (∞, ∞), P_1' $(-\infty, -\infty)$ oder P_1 $(\infty, -\infty)$, P_1' $(-\infty, \infty)$, d. h. es gibt zwei Geraden, deren jede die beiden Hyperbeläste erst in unendlicher Entfernung schneidet. Diese Geraden nennt man die Asymptoten der Hyperbel.

Man construiert die Asymptoten der Hyperbel gemäß der Gleichung $A = \pm\frac{b}{a}$, indem man durch die Endpunkte der Hauptachse zur Hauptachse, und durch die Endpunkte der Nebenachse zur Nebenachse Senkrechte zieht; dieselben bilden ein Rechteck, dessen Diagonalen die gesuchten Asymptoten sind.

Verlängert man die Ordinate eines Hyperbelpunktes $P(x_1, y_1)$ bis zum Durchschnitte mit der Asymptote $M(x_1, y'_1)$, so ist wegen $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$ und $y'^2_1 = \frac{b^2}{a^2}x_1^2$:

$$y_1^2 - y'^2_1 = b^2 \quad \text{und} \quad y_1 - y'_1 = \frac{b^2}{y_1 + y'_1}$$

Je größer x_1 wird, desto kleiner wird die Ordinatendifferenz $y_1 - y'_1$. Der Hyperbelast nähert sich der Asymptote immerwährend, erreicht sie jedoch erst im Unendlichen.

Zusatz. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $A = \pm 1$, d. h. es bilden die Asymptoten mit der Xachse die Winkel 45°, 135° (225°, 315°); die Asymptoten sind zu einander normal. (Vergl. IV, D.)

2. Wenn K $(a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2)$ die Gleichung eines Kegelschnittes in der Mittelpunktslage und G $(y = Ax + B)$ die Gleichung einer Geraden ist, so sind die Bedingungsgleichungen für den gemeinsamen Punkt P_1 (x_1, y_1):

$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$ und $y_1 = Ax_1 + B$, woraus

$$x_1 = -\frac{a^2AB \pm ab\sqrt{b^2 + a^2A^2 - B^2}}{b^2 + a^2A^2} \quad \text{und}$$

$$y = \frac{b^2B \pm abA\sqrt{b^2 + a^2A^2 - B^2}}{b^2 + a^2A^2}.$$

a) Ist $b^2 + a^2 A^2 > B^2$, so schneidet die Gerade den Kegelschnitt in zwei Punkten (Sehne).
Für $a = b$ ist $B^2 < a^2 (1 + A^2)$.

b) Ist $b^2 + a^2 A^2 = B^2$, so hat die Gerade mit dem Kegelschnitt nur einen Punkt gemeinsam. (Tangente).

α) für $a^2 = b^2$ wird $a^2 (1 + A^2) = B^2$ und $P_1 \left(-\frac{AB}{1 + A^2}, \frac{B}{1 + A^2}\right)$,

β) für a^2 und b^2 positiv wird $P_1 \left(-\frac{a^2 AB}{b^2 + A^2 a^2}, \frac{b^2 B}{b^2 + a^2 A^2}\right)$,

γ) für a^2 positiv und b^2 negativ wird $a^2 A^2 - b^2 = B^2$ und

$$P_1 \left(-\frac{a^2 AB}{A^2 a^2 - b^2}; \frac{-b^2 B}{A^2 a^2 - b^2}\right).$$

c) Ist endlich $b^2 + a^2 A^2 < B^2$, so trifft die Gerade den Kegelschnitt gar nicht.

3. Wenn P $(y^2 = 2px)$ die Scheitelgleichung einer Parabel und G $(y = Ax + B)$ die Gleichung einer Geraden ist, so sind die Bedingungsgleichungen für den gemeinsamen Punkt $P_1 (x_1, y_1)$: $y_1{}^2 = 2px_1$ und $y_1 = Ax_1 + B$, woraus

$$x_1 = \frac{p - AB \pm \sqrt{p^2 - 2pAB}}{A^2} \text{ und } y_1 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2pAB}}{A}.$$

a) Ist $p > 2AB$, so schneidet die Gerade die Parabel in zwei Punkten. (Sehne).

b) Ist $p = 2AB$, so hat die Gerade mit der Parabel nur einen Punkt gemeinsam; es wird $P_1 \left(\frac{p - AB}{A^2}, \frac{p}{A}\right)$, oder da $p = 2AB$ ist $P_1 \left(\frac{B}{A}, 2B\right)$. (Tangente).

c) Ist $p < 2AB$, so trifft die Gerade die Parabel nicht.

Aufgabe 1. Welche von den Geraden G_1 $(y = 3x)$, G_2 $(y = 3x + 4)$, G_3 $(y = 2x - 3)$, G_4 $(y = -2x + 5)$ schneiden (berühren) den Kreis K $(y^2 + x^2 = 5)$? Die Coordinaten der gemeinsamen Punkte sind zu berechnen; ebenso die Längen der Sehnen und der entsprechenden Centralabstände (absolut).

Die geometrische Bedeutung der Beziehung $a \lesseqgtr \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}}$.

Aufgabe 2. Welche von den Geraden G_1 $(y = 2x)$, G_2 $(y = 3x + 4)$, G_3 $(2y = x + 5)$, G_4 $(3y = -x - 3)$ schneiden (berühren) die Ellipse E $(9y^2 + 4x^2 = 36)$? Die Coordinaten der gemeinsamen Punkte sind zu berechnen; ebenso die Längen der Sehnen.

Analoge Aufgaben über die Hyperbel, Parabel.

VI. Tangenten an die Kegelschnittslinien. Berührungsgrößen.

A. 1. Wenn die Gleichung eines Kegelschnittes K und die Gleichung der Tangente an denselben gegeben sind, so können die Coordinaten des Berührungspunktes P (x_1, y_1) berechnet werden. Umgekehrt kann, wenn die Gleichung des Kegelschnittes K und die Coordinaten des Berührungspunktes P_1 (x_1, y_1) gegeben sind, die Gleichung der Tangente (in diesem Berührungspunkte), oder wenn der Berührungspunkt P_1 und die Gleichung der Tangente gegeben ist, die Gleichung des die Tangente in P_1 berührenden Kegelschnittes bestimmter Art berechnet werden.

2. Die Tangente an einen Kegelschnitt ist eine Gerade; die Richtung in dieser Tangente stimmt mit dem Sinne der Bewegung des den Kegelschnitt erzeugenden Punktes überein. Wenn ein geschlossener Kegelschnitt im positiven Sinne beschrieben ist, so muss jeder Punkt im Innern desselben von jeder Tangente einen positiven Abstand haben.

Zwei krumme Linien (Kegelschnitte) schneiden sich unter einem Winkel, welcher durch den Winkel der im Durchschnittspunkte an beide krumme Linien gezogenen Tangenten gemessen wird. Sind die Tangenten der Richtung nach bestimmt, so ist der Winkel zweier Kegelschnitte eindeutig bestimmbar.

Bei nicht geschlossenen Kegelschnitten muss der positive Richtungssinn besonders festgesetzt werden.

3. Die im Berührungspunkte P zur Tangente des Kegelschnittes gezogene Senkrechte wird die Normale des Kegelschnittes im Punkte P_1 genannt. Durch die Coordinaten des Punktes P_1 und die Gleichung der Tangente ist die Gleichung der Normale dieses Punktes bestimmt.

4. Die Tangente des Punktes P, die Normale desselben Punktes und die Abscissenachse X bilden ein rechtwinkeliges Dreieck PNT, in welchem die Ordinate des Punktes P die Höhe ist. Die Katheten dieses Dreieckes heißen „Länge der Tangente“, „Länge der Normale“. Die Projection der Länge der $\begin{Bmatrix}\text{Tangente}\\\text{Normale}\end{Bmatrix}$ wird $\begin{Bmatrix}\text{Subtangente}\\\text{Subnormale}\end{Bmatrix}$ genannt; dieselben sind die beiden Abschnitte der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreieckes PNT. Berührungsdreieck. Die Längen der Subtangente,

Subnormale, Tangente und Normale werden die Berührungs-gr[illegible]s Kegelschnittes im Punkte P genannt.

[illegible]n bezeichnet mit l_t, l_n die Längen der Tangente und der Normale; mit s_t und s_n die Subtangente und die Subnormale.

[illegible]. Wenn die Gleichung des Kreises K $(y^2 + x^2 = a^2)$ und die Gleichung der Tangente G $(y = Ax + B)$ gegeben sind, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes

$$x_1 = -\frac{AB}{1 + A^2},\ y_1 = \frac{B}{1 + A^2}.\ (\text{V}, D, 2, b, \alpha).$$

a) Wenn K und P (x_1, y_1) gegeben sind, so kann man A, B der Tangente bestimmen.

$$\frac{x_1}{y_1} = -A;\ B = y_1\left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}\right) = \frac{a^2}{y_1}.$$

Die Tangente hat die Gleichung:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1} \text{ oder } yy_1 + xx_1 = a^2.$$

Man beachte $B = \frac{a^2}{y_1}$, d. h. B ist die vierte geometrische Proportionale zwischen y_1 und a.

b) Wenn G und P gegeben sind, lässt sich die Gleichung des Kreises aufstellen. Da $y = Ax + B$ als Gleichung der Tangente an den Kreis K im Punkte P gegeben ist, so hat diese Gleichung die Form $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$, d. h. $A = -\frac{x_1}{y_1}$ und $B = \frac{a^2}{y_1}$. Diese zwei Bedingungsgleichungen machen die Aufgabe zu einer überbestimmten, da nur eine Constante der Gleichung des Kreises (a) zu bestimmen ist. Die Aufgabe lässt sich in eine bestimmte verwandeln, wenn eine dieser Bedingungen als nicht gegeben angesehen wird.

α) Es sei nur P gegeben, G und K zu bestimmen.

Da P ein Punkt des Kreises ist, so ist $y_1^2 + x_1^2 = a^2$. Die Gleichung des gesuchten Kreises ist K $(y^2 + x^2 = y_1^2 + x_1^2)$.

Die Gleichung der Tangente an K in P ist

$$G\left(y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1}\right).$$

β) Es sei nur G $(y = Ax + B)$ gegeben. Diese Gleichung hat als Tangente an den Kreis die Form $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$.

Es ist daher $A = -\frac{x_1}{y_1}$, $B = \frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1}$. Nun ist $A^2 = \frac{x_1^2}{y_1^2}$, $1 + A^2 = \frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1^2}$, $(1 + A^2)\, y_1 = B$, also $y_1 = \frac{B}{1 + A^2}$, daher $x_1 = -\frac{AB}{1 + A^2}$, $a^2 = y_1^2 + x_1^2 = \frac{B^2}{1 + A^2}$, d. h. $a = \frac{B}{\pm\sqrt{1 + A^2}}$.

Discussion dieser Gleichungen mit Beachtung, dass $\frac{1}{\pm\sqrt{1 + A^2}} = \cos\alpha$.

2. Die Richtung der Tangente wird für einen im positiven Sinne erzeugten Kreis so zu wählen sein, dass der Kreismittelpunkt von der Tangente einen positiven Abstand hat. Die Gleichung des Tangentenstrahles wird daher sein:

$$\frac{y + \frac{x_1}{y_1} x - \frac{a^2}{y_1}}{-\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}}} = \frac{y y_1 + x x_1 - a^2}{-\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} = 0.$$

Wenn P im ersten Quadranten liegt, hat die Tangente die zweite Hauptlage mit hohlem Winkel. Ist y_1 negativ, so muss Zähler und Nenner mit -1 multipliciert werden. (Vergl. V B, 4, Aufg. 1, Zusatz.)

Durch parallele Verschiebung der Achsen des Systems, so dass der alte Ursprung die Coordinaten ξ_0, η_0 erhält, transformiert sich die Gleichung des Tangentenstrahles $\frac{(\eta - \eta_0)(\eta_1 - \eta_0) + (\xi - \xi_0)(\xi_1 - \xi_0) - a^2}{-\sqrt{(\eta_1 - \eta_0)^2 + (\xi_1 - \xi_0)^2}} = 0.$

3. Die im Punkte $P\,(x_1, y_1)$ zur Tangente des Kreises $\left(y = -\frac{x_1}{y_1} x + \frac{a^2}{y_1}\right)$ gezogene Normale hat die Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \text{ oder } y = \frac{y_1}{x_1} x;$$

d. h. die Normale jedes Punktes des Kreises geht durch den Ursprung.

4. Um die Berührungsgrößen des Kreises im Punkte P zu bestimmen, berechne man die Coordinaten von N und T, welche die Durchschnittspunkte der Normale (Tangente) mit der X-Achse sind. $N\,(0, 0)$, $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$. Die Länge der Normale $PN = a$, die Länge der Tangente, $TP = \frac{a}{x_1}\sqrt{a^2 - x_1^2} = \frac{a y_1}{x_1}$, die Subnormale ist $OP' = x_1$, die Subtangente $P'T = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}$.

Beim Kreise ist die Ordinate eines Punktes die mittlere geometrische Proportionale zwischen seiner Abscisse und der Subtangente dieses Punktes. $\overline{TP}^2 = \frac{a^2 y_1^2}{x_1^2} = \frac{a^2}{x_1} \cdot \frac{y_1^2}{x_1}$, d. h. die Länge der Tangente ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse des Berührungsdreieckes und der Subtangente. Tangentenconstruction an den Kreis.

C. 1. Wenn die Gleichung des Kegelschnittes K $(a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2)$ und die Gleichung der Tangente G $(y = Ax + B)$ gegeben sind, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes P

$$x_1 = -\frac{a^2 AB}{A^2 a^2 \pm b^2} \text{ und } y_1 = \frac{\pm b^2 B}{A^2 a^2 \pm b^2}.$$

a) Wenn K und P gegeben sind, so kann man A und B bestimmen.

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{a^2 A}{\pm b^2}, \text{ also } A = -\frac{\pm b^2 x_1}{a^2 y_1}; \ B = \frac{\pm b^2}{y_1}.$$

Es ergibt sich $y = -\frac{\pm b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{\pm b^2}{y_1}$ als Gleichung der Tangente im Punkte P des Kegelschnittes.

α) $a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2$ Tangente an die Ellipse.

β) $a^2 y y_1 - b^2 x x_1 = -a^2 b^2$ Tangente an die Hyperbel.

b) Wenn G und P gegeben sind, lässt sich die Mittelpunktsgleichung des Kegelschnittes, welcher G in P berührt, berechnen. Da $y = Ax + B$ als die Tangente des Kegelschnittes gegeben ist, so hat diese Gleichung die Form $y = -\frac{\pm b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{\pm b^2}{y_1}$, d. h. $A = \frac{\pm b^2 x_1}{a^2 y_1}$ und $B = \frac{\pm b^2}{y_1}$. Aus diesen beiden Gleichungen kann a und b berechnet werden; es ergibt sich $\pm b^2 = B y_1$ und $a^2 = \frac{B x_1}{A}$. $\frac{B x_1}{A} y^2 \pm B y_1 x^2 = \pm \frac{B^2 x_1 y_1}{A}$ ist die Gleichung des Kegelschnittes (Ellipse oder Hyperbel).

Da die Gleichung der Ellipse (Hyperbel) zwei constante Größen enthält, ist diese Aufgabe eine bestimmte.

2. Die Richtung der Tangente ist für einen positiven Sinn des Kegelschnittes so zu wählen, dass der Mittelpunkt des Kegelschnittes von der Tangente einen positiven Abstand hat.

$$\frac{a^2 y y_1 \pm b^2 x x_1 - (\pm a^2 b^2)}{\mp \sqrt{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2}} = 0.$$

Für einen Punkt P im ersten Quadranten hat die Tangente an die Ellipse die zweite Hauptlage mit hohlem Winkel, die Tangente an die Hyperbel

die erste Hauptlage mit hohlem Winkel. Der Brennpunkt des berührten Hyperbelastes hat einen negativen Abstand von der Tangente.

Die allgemeine Tangentengleichung an die Ellipse (Hyperbel) lautet:

$$\frac{a^2(\eta-\eta_0)(\eta_1-\eta_0)\pm b^2(\xi-\xi_0)(\xi_1-\xi_0)-(\pm a^2b^2)}{\mp\sqrt{a^2(\eta_1-\eta_0)^2+b^2(\xi_1-\xi_0)^2}}=0.$$

3. Die im Punkte P zum Kegelschnitt K gezogene Normale hat die Gleichung $y-y_1=\frac{a^2y_1}{\pm b^2x_1}(x-x_1)$.

4. Die Punkte N und T des Berührungsdreieckes haben die Coordinaten:

a) Ellipse $N\left(\frac{e^2x_1}{a^2}, 0\right)$ und $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, wobei $e^2=a^2-b^2$; $x_1<a$,

b) Hyperbel $N\left(\frac{e^2x_1}{a^2}, 0\right)$ und $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, wobei $e^2=a^2+b^2$; $x_1>a$.

Die Berührungsgrößen sind:

a) Ellipse: $s_n=\frac{b^2}{a^2}x_1$, $s_t=\frac{a^2-x_1^2}{x_1}$, $l_n=\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}$,

$l_t=\sqrt{y_1^2+\left(\frac{a^2-x_1^2}{x_1}\right)^2}$,

b) Hyperbel: $s_n=-\frac{b^2}{a^2}x_1$, $s_t=\frac{a^2-x_1^2}{x_1}$, $l_n=\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}$,

$l_t=\sqrt{y_1^2+\left(\frac{a^2-x_1^2}{x_1}\right)^2}$.

Die Eigenschaft $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ lässt sich zu einer bequemen Tangentenconstruction an die Ellipse verwenden; ebenso die Eigenschaft $B=\frac{b^2}{y_1}$.

D. 1. Wenn die Gleichung einer Parabel P ($y^2=2px$) und die Gleichung der Tangente G ($y=Ax+B$) gegeben sind, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes

$$P_1\left(x_1=\frac{B}{A},\ y_1=2B\right).$$

a) Wenn die Parabel und der Berührungspunkt P_1 gegeben sind, so kann man A und B der Tangente bestimmen.

Es ist $B=\frac{y_1}{2}$, $A=\frac{B}{x_1}=\frac{y_1}{2x_1}$. Die Gleichung der Tangente an die Parabel im Punkte P_1 ist: $y=\frac{y_1}{2x_1}x+\frac{y_1}{2}$.

Multipli[illegible] man mit y_1 und ersetzt man y_1^2 durch $2px_1$, so wird: $yy_1 = px$ [illegible] px_1. $\left(\text{In dieser Gleichung ist } A = \frac{p}{y_1},\ B = \frac{px_1}{y_1}\right)$.

b) [illegible] Coordinaten des Berührungspunktes P_1 erfordern nur die [illegible]ntnis der Gleichung der Tangente. Es ist daher die Aufgabe, [illegible]s der Gleichung der Tangente $y = Ax + B$ die berührende Parabel und den Berührungspunkt zu finden.

Es ist $P_1 \left(x_1 = \frac{B}{A},\ y_1 = 2B\right)$ und, da $y_1^2 = 2px_1$ ist, $p = 2AB$. $y^2 = 4ABx$ ist die Gleichung der G berührenden Parabel.

Zu jeder Geraden gibt es nur eine berührende Parabel (in der Scheitellage).

2. Den positiven Sinn in der Parabel kann man so wählen, dass der Tangentenstrahl an einen Punkt im ersten Quadranten einen hohlen Winkel mit X bildet.

$$\frac{yy_1 - px - px_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} = 0.$$

Wird y_1 negativ, so muss man Zähler und Nenner des Bruches mit -1 multiplicieren; der Strahl bildet auch in dieser Lage einen hohlen Winkel mit x. Der Brennpunkt der Parabel hat bei dieser Annahme einen negativen Abstand von der Tangente. Parabel als Grenzfall zwischen Hyperbel und Ellipse. Die allgemeine Gleichung des Tangentenstrahles an die Parabel ist

$$\frac{(\eta - \eta_0)(\eta_1 - \eta_0) - p(\xi - \xi_0) - p(\xi_1 - \xi_0)}{\sqrt{(\eta_1 - \eta_0)^2 + p^2}} = 0.$$

3. Die im Punkte P_1 zur Parabel gezogene Normale hat die Gleichung $y - y_1 = -\frac{2x_1}{y_1}(x - x_1)$ oder $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$.

Die Eigenschaft $B = \frac{y_1}{2}$ lässt sich vortheilhaft zu einer Tangentenconstruction verwenden; desgleichen die Eigenschaften $T(-x, 0)$ oder $N(p + x, 0)$.

Um an die Gerade $y = Ax + B$ die berührende Parabel zu construieren, bestimmt man zuerst den Durchschnittspunkt $P_1 \left(x_1 = \frac{B}{A},\ y_1 = 2B\right)$. In P_1 zieht man zur Tangente die Normale, so ist die Subnormale $s_n = p$. Mit dem so bestimmten p construiert man die Parabel.

4. Die Punkte N und T des Berührungsdreieckes haben die Coordinaten: $N(p + x_1, 0)$, $T(-x_1, 0)$. Die Berührungsgrößen sind $s_n = p$, $s_t = 2x_1$, $l_n = \sqrt{y_1^2 + p^2}$, $l_t = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2}$.

5. Nennt man den Abscissenknoten der Parabeltangente M, so ist das $\triangle FTM$ bei M rechtwinkelig.

Es ist $B = \frac{p x_1}{y_1}$, also $B^2 = \frac{p^2 x_1^2}{y_1^2} = \frac{p^2 x_1^2}{2 p x_1} = \frac{p}{2} . x_1$. Da $B = OM$, $TO = x_1, OF = \frac{p}{2}$, so ist $OM^2 = TO . OF$, d. h. $\triangle TFM$ ist bei M rechtwinkelig. Es genügt also die Kenntnis eines Punktes, um durch denselben die Parabel und die Tangente an die Parabel zu ziehen. (Vergl. oben 1, b.)

Aufgabe 1. Die Parabel P $(y^2 = 6x)$ wird vom Kreise K $(y^2 + x^2 = 16)$ in zwei Punkten geschnitten; den Winkel (PK) zu bestimmen.

Die Durchschnittspunkte haben die Coordinaten $P_1 (2, 2\sqrt{3})$ und $P'_1 (2, -2\sqrt{3})$. Die Gleichungen der Tangentenstrahlen im Punkte P_1 sind $\frac{2y - \sqrt{3} . x - 2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 0$ an die Parabel und $\frac{y\sqrt{3} + x - 8}{-2} = 0$ an den Kreis. Bezeichnet man den Winkel (PK) mit β, so ist $tg\, \beta = -\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\beta = 109^0\, 6'\, 24''$. Die Tangente an die Parabel hat die erste Hauptlage mit hohlem Winkel, jene an den Kreis die zweite Hauptlage mit hohlem Winkel; β muss daher ein positiver, hohler Winkel sein.

Die Gleichungen der Tangentenstrahlen im Punkte P'_1 sind $\frac{2y + \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}}{-\sqrt{7}} = 0$ an die Parabel und $\frac{y - x + 8}{2} = 0$ an den Kreis. Der letztere Strahl hat die erste Hauptlage mit hohlem (spitzem) Winkel, der erstere die zweite Hauptlage mit hohlem (stumpfem) Winkel. Der Winkel beider ist daher entweder negativ hohl oder positiv erhaben. Es ist $tg\, \beta' = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\beta' = 70^0\, 53'\, 36''$ oder $250^0\, 53'\, 36''$. Im Punkte P_1 ist $(PK) = 250^0\, 53'\, 36''$.

Prüfung der Rechnung durch Zeichnung.

Aufgabe 2. An den Kegelschnitt K $(a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2)$ eine Tangente, welche zur Geraden $y = Ax$ parallel ist, zu ziehen.

***E.* 1. Wenn man im Dreiecke $F_1 P' F_2$, welches von den Leitstrahlen des Ellipsenpunktes P' und der Brennweite dieser Ellipse gebildet wird, die Symmetrale des Außenwinkels bei P' zieht, so ist dieselbe die Tangente im Punkte P' an die Ellipse.**

Die Gleichung der gesuchten Tangente hat die Form

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \cdot x + \frac{b^2}{y'},$$

wobei $P' (x', y')$ der noch unbekannte Berührungspunkt ist. Die Coordinaten x', y' erfüllen die Bedingungen $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$ und $A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$, woraus sich ergibt $x' = \frac{A a^2}{\pm\sqrt{b^2 + A^2 a^2}}$, $y' = \frac{-b^2}{\pm\sqrt{b^2 + A a^2}}$.

Es gibt also zwei Tangenten, die zu $y = Ax$ parallel sind. Die Berührungspunkte sind $P'_1 (x'_1, y'_1)$ und $P'_2 (x'_2, y'_2)$. Die Gleichungen derselben sind $y = Ax \pm \sqrt{b^2 + A^2 a^2}$. Construction dieser Gleichungen.

Für den Kreis wird $y = Ax \pm a\sqrt{1+A^2}$,

$$P'\left(x' = \frac{A}{\pm\sqrt{1+A^2}} \text{ und } y' = -\frac{1}{\pm\sqrt{1+A^2}}\right).$$

Für die Hyperbel wird $y = Ax \pm \sqrt{a^2A^2 - b^2}$,

$$P'\left(x' = \frac{Aa^2}{\pm\sqrt{A^2a^2-b^2}},\ y' = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2A^2-b^2}}\right).$$

Dieselbe Aufgabe ist für die Parabel in der Scheitellage zu lösen.

Die Leitstrahlen haben die Größe $F_1P' = l_1 = \sqrt{(x_1-e)^2+y_1^2}$ und $P'F_2 = l_2 = \sqrt{(x+e)^2+y_1^2}$. Es ist also $l_1 + l_2 = 2a$, $l_2^2 - l_1^2 = 4x_1e$ und $l_2 - l_1 = \frac{4x_1e}{2a} = \frac{2ex_1}{a}$.

Die Gleichungen der Leitstrahlen sind mit Berücksichtigung ihres Richtungssinnes $S_1 \ldots \frac{y(x_1-e) - xy_1 + ey_1}{\sqrt{(x_1-e)^2+y_1^2}} = 0$ und

$$S_2 \ldots \frac{y(x_1+e) - xy_1 - ey_1}{-\sqrt{(x_1+e)^2+y_1}} = 0.$$

Die Gleichung der Symmetrale des Winkels (S_1S_2) ist $S_2 + S_1 = 0$.

Setzt man in S_1 und S_2 für die Nenner l_1 und $-l_2$, so erhält man

$$y(x_1+e)l_1 - xy_1l_1 - ey_1l_1 - y(x_1-e)l_2 + xy_1l_2 - ey_1l_2 = 0,$$

$$(ey - ey_1)(l_1+l_2) - yx_1(l_2-l_1) + xy_1(l_2-l_1) = 0.$$

Setzt man für $l_1 + l_2$ und $l_2 - l_1$ die oben entwickelten Werte, so ergibt sich nach entsprechender Transformation $x(a^2 - x_1) + xy_1x_1 - a^2y_1 = 0$. Nun ist der Ellipsengleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ gemäß $a^2 - x_1^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$. Wird dieser Wert in die letzte Gleichung eingesetzt, so erhält man $a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2b^2$ als Gleichung der Symmetrale des Winkels der beiden Leitstrahlen. Dieselbe ist aber die Gleichung für die Tangente im Punkte P' an die Ellipse.

Zusatz. Wird $x_1 - e$ negativ, so multipliciert man in S_1 Zähler und Nenner mit -1; wird auch $x_1 + e$ negativ, so multipliciert man auch in S_2 Zähler und Nenner mit -1. (Vergl. V. B. 4, b, Aufg. Zusatz.)

2. Wenn man im Dreiecke $F_1P'F_2$, welches von den Leitstrahlen des Hyperbelpunktes P' und der Brennweite dieser Hyperbel gebildet wird, die Symmetrale des Dreieckswinkels P' zieht, so ist dieselbe die Tangente im Punkte P' an die Hyperbel.

Der Beweis ist dem entsprechenden Satze über die Ellipsentangente analog.

3. Wenn man im gleichschenkeligen Dreiecke $FP'Q$, welches die beiden Leitstrahlen des Parabelpunktes P' zu Schenkeln hat, die Symmetrale des Dreieckswinkels P' zieht, so ist dieselbe die Tangente des Punktes P' an die Parabel.

Die Leitstrahlen haben die Größe $l_1 = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2}$ und $l_2 = x_1 + \frac{p}{2}$, wobei $l_1 = l_2$ ist. Die Leitstrahlen haben die Gleichungen

$$S_1 \ldots \frac{y_1\left(x_1-\frac{p}{2}\right)-y_1 x+\frac{p}{2} y_1}{\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2+y_1^2}}=0 \text{ und } S_2 \ldots \frac{y-y_1}{-1}=0.$$

Die Symmetrale des Nebenwinkels der Strahlen $(S_1 S_2)$ hat die Gleichung $S_2 - S_1 = 0$. Setzt man $x_1 + \frac{p}{2}$ für $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y_1^2}$, so erhält man

$$y x_1 + y\frac{p}{2} - y_1 x_1 - y_1\frac{p}{2} + y x_1 - y\frac{p}{2} - y_1 x + \frac{p}{2} y_1 = 0,$$

$$2 y x_1 - y_1 x - y_1 x_1 = 0, \quad 2 y y_1 x_1 - y_1^2 (x + x_1) = 0.$$

Setzt man $y_1^2 = 2 p x_1$, so erhält man $y y_1 = p(x + x_1)$ als Gleichung der Symmetrale des Nebenwinkels der beiden Leitstrahlen.

Zusatz. Diese Sätze werden benützt, um im Punkte P' des Kegelschnittes an diesen die Tangente zu construieren.

Aufgabe. Durch den Punkt P_2 (x_2, y_2) an den Kegelschnitt $(a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2)$ zu ziehen.

Der noch unbekannte Berührungspunkt ist $P_1 (x_1, y_1)$. Die Bedingungsgleichungen sind $a^2 y_2 y_1 + b^2 x_2 x_1 = a^2 b^2$ und $a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$. Discussion des Resultates.

Wäre der Kegelschnitt die Parabel $(y^2 = 2px)$, so wären die Bedingungsgleichungen $y_2 y_1 = p(x_2 + x_1)$ und $y_1^2 = 2 p x_1$.

VII. Flächenbestimmungen.

A. 1. Die Ellipse $E\,(a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2)$ und der Kreis $K\,(y^2 + x^2 = a^2)$ haben zwei Punkte (die Scheitelpunkte der Ellipse) gemeinsam. Es sei P_1 (x_1, y_1) ein Punkt der Ellipse und P_1' (x_1, y'_1) ein Punkt des Kreises; die beiden Punkte sind abscissengleich. Nun ist $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$ und $y_1' = \sqrt{a^2 - x_1^2}$; es ist daher $y_1 : y_1' = b : a$. Für zwei andere Punkte P_2 (x_2, y_2) und P_2' (x_2, y_2') gilt ebenso $y_2 : y_2' = b : a$, daher $y_2 : y_2' = y_1 : y_1'$.

Diese Eigenschaft der Ellipse E und des obigen Kreises K bieten ein Mittel, Ellipsenpunkte zu construieren; es ist $a : b = y'_1 : y_1$, d. h. y_1 ist die vierte geometrische Proportionale der Strecken a, b, y'_1.

2. Wenn man die Ellipse $E\,(a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2)$ und den Kreis $K\,(y^2 + x^2 = a^2)$ construiert und die halbe große Achse der Ellipse in n Theile theilt, endlich durch jeden Theilungspunkt zur großen Achse Senkrechte errichtet, so zerfällt das Viertel der Ellipsenfläche (und ebenso das Viertel der Kreisfläche) in n Theile, welche bei hinreichend großem n als sehr schmale Rechtecke angesehen werden können.

Bezeichnet man die Theile der Ellipse der Reihe nach mit $f_1, f_2, f_3 \ldots, f_n$, die entsprechenden Theile des Kreises mit $f_1', f_2', f_3' \ldots f_n'$, so wird, da je zwei Rechtecke f_k und f_k' gleiche Breite haben: $f_k : f_k' = y_k : y_k' = b : a$.

Es gilt also $f_1 : f_1' = f_2 : f_2' = f_3 : f_3' = \ldots = f_n : f_n' = b : a$, mithin also $(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n) : (f_1' + f_2' + f_3' + \ldots + f_n') = = a : b$.

$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \frac{E}{4}$ (das Viertel der Ellipsenfläche).

$f_1' + f_2' + f_3' + \ldots + f_n' = \frac{a^2\pi}{4}$ (das Viertel der Kreisfläche).

$$E : a^2\pi = b : a; \quad E = ab\pi.$$

3. Schneidet man die Ellipse E $(a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2)$ durch eine zur großen Achse senkrechte Sehne P_1P_1', so dass $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_1'\,(x_1, -y_1)$, so wird die Ellipse in zwei ungleiche Theile (Ellipsensegmente) getheilt. Verlängert man P_1P_1' bis zum Durchschnitt mit dem Kreise K $(y^2 + x^2 = a^2)$, so dass $N_1\,(x_1, y_1')$ und $N_1'\,(x_1, -y_1')$, so wird der Kreis K ebenfalls in zwei ungleiche Theile getheilt. Bezeichnet man $\begin{cases}\text{das kleinere Ellipsensegment}\\ \text{den kleineren Ellipsensector}\end{cases}$ mit s, das kleinere Kreissegment mit s' / mit S, den kleineren Kreissector mit S', so ist $\begin{cases} s : s' = b : a \\ S : S' = b : a\end{cases}$.

Es verhalten sich nämlich die höhengleichen Dreiecke P_1OP_1' und $N_1O_1'N$ wie ihre Grundlinien P_1P' und N_1N'.

$$P_1P_1' : N_1N_1' = b : a.$$

Die Sehne $N_1N_1' = 2y_1$ hat den Centralabstand x_1 und den Centriwinkel α: da $y' = a \sin\frac{\alpha}{2}$ oder $x' = a \cos\frac{\alpha}{2}$, so kann man den Centriwinkel der Sehne bestimmen.

$S' = \frac{a^2\pi\alpha}{360}$, also $S = \frac{ab\pi\alpha}{360}$,

$s' = \frac{a^2\pi\alpha}{360} - y_1'x_1$, also $s = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2\pi\alpha}{360} - y_1'x_1\right)$, und wenn man für $\frac{b}{a}$ wieder $\frac{y_1}{y_1'}$ setzt, wird $s = \frac{ab\pi\alpha}{360} - y_1x_1$.

$s' = S' - y_1'x_1$ und $s = S - y_1x_1$.

Für den größeren Ellipsensector und das größere Ellipsensegment gelten die Gleichungen $S = \frac{ab\pi(360 - \alpha)}{360}$, $s = S + y_1x_1$.

Das Stück der Ellipse, das zwischen zwei parallelen, zur großen Achse normalen Sehnen liegt, kann als Unterschied zweier Segmente obiger Art aufgefasst werden.

$F = s_1 - s_2 = (S_1 - y_1 x_1) - (S_2 - y_2 x_2) = (S_1 - S_2) - (y_1 x_1 - y_2 x_2)$.

Jeder Theil einer Ellipse, welcher entsteht, indem die Ellipse durch irgend eine Gerade geschnitten wird, kann durch eine passende Combination von Segmenten der betrachteten Art und von rechtwinkeligen Dreiecken bestimmt werden.

B. Schneidet man die Parabel $P\,(y^2 = 2px)$ durch eine zur Abscissenachse senkrechte Sehne $P_1 P_1'$, so dass $P_1\,(x_1, y_1)$ und $P_1'\,(x_1, -y_1)$, so erhält man ein Parabelsegment. Zieht man durch P_1 und P_1' je eine Parallele zur Abscissenachse bis zum Durchschnitt mit der Ordinatenachse R_1, R_1', so entsteht ein Rechteck $P_1 R_1 R_1' P_1'$, das durch die Parabel in zwei ungleiche Theile getheilt wird. Theilt man das Parabelsegment durch zur Ordinatenachse parallele Gerade in n Theile, so werden dieselben Trapeze sein.

Irgend eine Sehne $P_k P_k'$ hat die Größe $2y_k$, ihre Nachbarin ist $2y_{k+1}$. Das von beiden Sehnen eingeschlossene Trapez hat die Breite

$x_k - x_{k+1}$ und die Fläche $(y_k + y_{k+1})\,(x_k - x_{k+1}) = f_k$.

$F_1 = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$ ist die Fläche des Parabelsegments der Sehne $P_1 P_1'$.

Zieht man durch die Endpunkte jeder Sehne $P_k P_k'$ Parallele zur Abscissenachse bis zum Durchschnitt mit der Ordinatenachse, so erhält man $2n$ Trapeze, von denen je zwei bezüglich der X-Achse symmetrisch liegen und congruent sind.

Das den Sehnen $P_k P_k'$ und $P_{k+1} P_{k+1}'$ entsprechende Trapezpaar hat zusammengenommen die Fläche

$$f_k' = (x_k + x_{k+1})\,(y_k - y_{k+1}).$$

$f_1' + f_2' + f_3' + \ldots + f_n' = F_1'$ bildet mit F_1 das Rechteck $P_1 R_1 R_1' P_1'$. Nun ist

$$f_k : f_k' = (y_k + y_{k+1})\,(x_k - x_{k+1}) : (y_k - y_{k+1})\,(x_k + x_{k+1})$$
$$= (y_k + y_{k+1})^2\,(x_k - x_{k+1}) : (y_k^2 - y_{k+1}^2)\,(x_k + x_{k+1}).$$

Setzt man für $y_k^2 - y_{k+1}^2$ den entsprechenden Wert $2p\,(x_k - x_{k+1})$, so wird

$$f_k : f_k' = (y_k + y_{k+1})^2 : (x_k + x_{k+1})\,.\,2p.$$

Sind die Nachbarsehnen sehr nahe, d. h. n sehr groß, so wird $x_k = x_{k+1}$ und $y_k = y_{k+1}$, also $f_k : f_k' = 4y_k^2 : 2x_k\,.\,2p$ und wegen $y^2_k = 2px^k$

$$f_k : f_k' = 2 : 1$$

$$f_1 : f_1' = f_2 : f_2' = \ldots\ldots = f_n : f_n' = 2 : 1, \text{ d. h. } F_1 : F_1' = 2 : 1.$$

Die Parabel theilt das Rechteck im Verhältnisse 2 : 1.

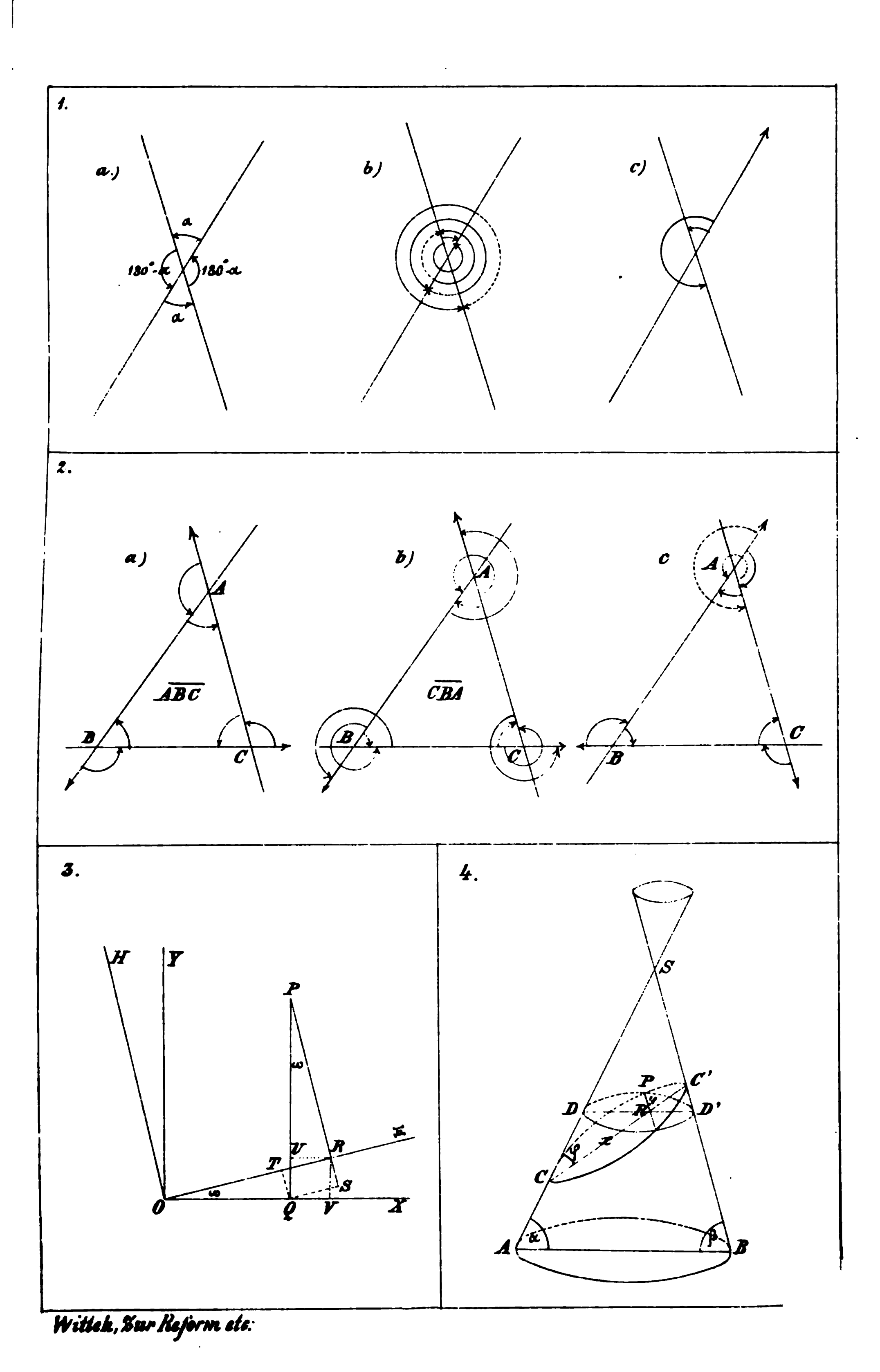
$$(F_1 + F_1') : F_1 = 3 : 2, \text{ da } F_1 + F_1' = 2x_1 y_1 \quad 2x_1 y_1 : F_1 = 3 : 2$$

$$F_1 = \frac{4}{3} x_1 y_1.$$

Ein Stück der Parabel, welches zwischen zwei zur Abscissenachse parallelen Sehnen $P_1 P'_1$ und $P_2 P'_2$ liegt, hat die Fläche $F = \frac{4}{3}(x_1 y_1 - x_2 z_2)$.

Jede von einem Parabelbogen und einer Parabelsehne begrenzte Fläche kann durch eine passende Combination von Parabelsegmenten obiger Art und von rechtwinkeligen Dreiecken bestimmt werden.

Inhaltsübersicht.


1.
a.)
b)
c)
a
180°-α
180°-α
α
2.
a)
b)
c
A
B
C
ABC
CBA
3.
H
Y
P
ω
U
R
T
S
O
Q
V
X
4.
S
P
C'
D
R
D'
C
A
B
α
β
Wittek, Zur Reform etc.

III.

Zur Kegelschnittlehre.

Von

Franz Haluschka,

Professor an der k. k. Staatrealschule im XVIII. Bezirke in Wien

---

Mit zwei Tafeln.

Der Zweck nachstehender Abhandlung ist es, mit elementaren, einem Realschüler zugebote stehenden Mitteln den Nachweis zu liefern, dass die Kegelschnittlinien keine anderen als die unter den Namen Ellipse, Hyperbel, Parabel schon in der IV. Classe vorgetragenen Curven sind. — Dieser Nachweis stützt sich auf die Projectivität conjugierter Durchmesser; die benützten Mittel sind theils synthetischer (planimetrischer und stereometrischer), theils analytischer Natur. Zunächst werden die obgenannten Curven mit einem Kreise, dem Leitkreise, in engere Beziehung gebracht und als Projectionen von Kegelschnittlinien charakterisiert. Aus dieser Beziehung (Collineation) werden die Theorie der conjugierten Durchmesser und die Gleichungen der Curven abgeleitet. Im Anschlusse daran finden einige, die Beziehungen der conjugierten Durchmesser zu den Achsen beleuchtende Aufgaben ihre Lösung, so insbesondere die Aufgabe der Achsenbestimmung aus 2 c. D. — Endlich wird gezeigt, dass die Curven durch Parallelprojection ihre Natur nicht ändern, woraus sich dann im Rückblick auf den ersten Punkt der abgezielte Schluss sofort ergibt.

Ursprünglich war der Plan der Studie etwas weiter gefasst; es sollten auf Grund der Verwandtschaft der Curven mit ihrem Leitkreis die wichtigsten (beim ersten Unterricht übergangenen) Eigenschaften derselben hergeleitet werden. Doch musste mit Rücksicht auf die Fülle des Materials einerseits und auf den beschränkten verfügbaren Raum andererseits diese lohnende Aufgabe vorläufig zurückgestellt werden. Immerhin hoffe ich mit dem Dargebotenen zur Lösung der Frage, wie die Kegel-

schnittlehre an unseren Oberrealschulen wissenschaftlich zu begründen sei, Einiges beizutragen oder doch zumindest eine neue Anregung zu geben.[1])

Die Ellipse, Hyperbel, Parabel als Kegelschnittprojectionen.

1. (Fig. 1, 3.) Sind FG die Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel, GM_0 = der Hauptachse $2a$, so kann man auf folgende Art Tangenten der Curve sammt den Berührungspunkten ermitteln. Man beschreibt um G mit dem Halbmesser GM_0 einen Kreis (Leitkreis), wählt auf der Peripherie desselben einen beliebigen Punkt M_0 und construiert die Symmetrieachse RM von M_0F. Dieselbe ist eine Tangente der Curve und ihr Schnittpunkt M mit M_0G der Berührungspunkt.

(Fig. 2.) Ein ähnliches Verfahren gilt für die Parabel, wobei jedoch die Directrix den Leitkreis vertritt. Man verbindet nämlich einen beliebigen Punkt $\mathfrak{M}_0$ der Directrix mit G und erhält in der Symmetrieachse von $\mathfrak{M}_0G$ eine Tangente $\mathfrak{P}_0M$; der Berührungspunkt M liegt auf der durch $\mathfrak{M}_0$ gehenden Parallelen zur Hauptachse.

2. (Fig. 1, 3.) Zieht man in M_0 eine Tangente an den Leitkreis, welche die Curventangente von M in P schneidet, so ist der geometrische Ort von P eine auf FG senkrechte Gerade f, die Directrix; denn $PM_0 = PF$, daher P ein Potenzpunkt für den Leitkreis und den Punkt F. — Die Ellipse und die Hyperbel besitzen je 2 Directrixen f und g, welche bezüglich der Nebenachse symmetrisch liegen.

3. (Fig. 1, 3.) Verlängert man FM_0, bis die Kreisperipherie zum zweitenmal in N_0 geschnitten wird und legt in N_0 eine Tangente an den Kreis, welche M_0P in $\mathfrak{P}$ schneidet, so ist $\mathfrak{P}$ der Pol von M_0N_0 bezüglich des Leitkreises. Der geometrische Ort von $\mathfrak{P}$ ist daher ebenfalls eine Senkrechte zu FG, nämlich die Polare h von F.

4. (Fig. 1, 3.) Zieht man $FQ \parallel M_0\mathfrak{P}$, bis $N_0\mathfrak{P}$ in Q geschnitten wird, so ist $QF = QN_0$, daher Q ein Potenzpunkt für k_0 und F; folglich liegt Q auf f. Da ferner $FP \parallel N_0\mathfrak{P}$, so ist $\triangle PQF$

[1]) Vgl. Cl. Barchanek, Descriptive Studien über Kegelschnitte. 28. Jahresber. der Staats-Oberrealsch. in Görz 1888.

$\cong PQ\mathfrak{P}$, daher $FP' = P'\mathfrak{P}'$, d. h. f halbiert den Abstand des Punktes F von seiner Polaren h.

5. (Fig. 1, 3.) Zieht man durch M_0 eine beliebige Gerade l_0, welche f in T, h in $\mathfrak{T}$ schneidet, so ist $\frac{M_0 T}{T\mathfrak{T}} = \frac{M_0 P}{P\mathfrak{P}} = \frac{M_0 M}{MG}$, weil MP und $G\mathfrak{P}$ als Senkrechte von $M_0 N_0$ parallel sind; daher ist $MT \parallel G\mathfrak{T}$. Darauf beruht nachstehende Construction einzelner Punkte der Curve, wenn k_0, f und h gegeben sind:

„Man wählt M_0 beliebig auf k_0, zieht $M_0\mathfrak{T}$ ebenfalls beliebig, dann $M_0 G$, $\mathfrak{T}G$ und endlich $TM \parallel \mathfrak{T}G$; TM schneidet $M_0 G$ in einem Curvenpunkte M."

Der Kreis k_0 und die Gerade h dürfen einander nicht berühren, können aber sonst eine beliebige Lage zu einander haben; die Gerade f muss den Abstand der Geraden h von ihrem Pol halbieren. Man erhält eine Ellipse, wenn h an k_0 vorübergeht, eine Hyperbel, wenn h den Kreis schneidet.

6. (Fig. 1.) Legt man durch k_0 eine Kegelfläche mit dem Scheitel S, hierauf durch S und h eine Ebene $\mathfrak{E}$ und durch f eine zu $\mathfrak{E}$ parallele Ebene E, so schneidet diese die Kegelfläche in einer sogenannten „Kegelschnittlinie" k'. Projiciert man dieselbe auf die Ebene P des Leitkreises (die Zeichenfläche) in der Richtung der Mittellinie SG der Kegelfläche, so erhält man unsere Curve k wieder, wie sogleich gezeigt werden soll. Beantworten wir zunächst die Frage, wie man den auf dem Kegelstrahle SM_0 liegenden Punkt M' der Kegelschnittlinie bestimmt. Die Antwort lautet:

„Man legt durch SM_0 irgend eine Ebene H, welche E in l' schneidet; der Schnittpunkt von l' mit SM_0 ist der gesuchte Punkt M'. (Schneidet H die Ebene $\mathfrak{E}$ in λ', so ist λ' parallel zu l'.)"

Um nun die Projection von M' zu erhalten, muss man die Projectionen von SM_0 und l' ermitteln. Die Projection von SM_0 ist GM_0. Um aber die Projection von l' zu finden, bestimmt man zunächst die Projection von λ'. Da nun λ' den Scheitel S mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{T}$ der Spurgeraden von H und $\mathfrak{E}$ verbindet, so ist $G\mathfrak{T}$ oder λ die Projection von λ'. l' geht durch den Spurpunkt $\mathfrak{T}$ von H und E und ist zu λ' parallel; daher ist l die Projection von l'. Die Projection von M' ist mithin der Schnittpunkt von l und GM_0, d. i. M.

Daraus folgt, dass die Projection der betrachteten Kegelschnittlinie eine Ellipse oder Hyperbel ist; dieselbe ist eine Ellipse, wenn die Ebene E sämmtliche Kegelstrahlen schneidet, eine Hyperbel, wenn E zu zwei Kegelstrahlen, nämlich den Schnittgeraden von $\mathfrak{E}$ mit der Kegelfläche parallel ist.

7. (Fig. 1.) Ist S der Scheitel, k_{01} der in einer beliebigen Ebene P_1 liegende Leitkreis einer Kegelfläche, ferner E eine Ebene, welche entweder sämmtliche Strahlen der Kegelfläche schneidet oder zu zweien parallel ist, endlich $\mathfrak{E}$ eine zu E parallele Scheitelebene, so lässt sich stets eine zu P_1 parallele Ebene P angeben, welche die vorbeschriebene Raumfigur in den Linien k_0, f, h von der unter Nr. 5 angeführten Configuration schneidet.

Beweis. Sei G_1 der Mittelpunkt von k_{01}, f_1 die Schnittlinie von E mit P_1, h_1 die von $\mathfrak{E}$ und P_1. Zieht man durch G_1 eine Senkrechte auf h_1, welche mit k_{01} die Punkte A_{01} und B_{01} gemein hat, so schneiden die Strahlen SA_{01} und SB_{01} die Ebene E in den Punkten A' und B'. Ergänzt man nun das $\triangle SA'B'$ zu einem Parallelogramm $SA'FB'$ und legt durch F eine Ebene P parallel zu P_1, so liefert diese die erwähnten Schnittlinien k_0, f, h. — Denn ist G der Mittelpunkt von k_0, so schneidet die (in der Ebene $SA_{01}B_{01}$ liegende) Gerade GF die h in $\mathfrak{P}'$ und die Strahlen SA_{01} und SB_{01} in A_0 und B_0; A_0, B_0, F, $\mathfrak{P}'$ sind aber vier harmonische Punkte, weil die Strahlen $S(A_0, B_0, F, \mathfrak{P}')$ harmonisch sind (denn $A'B'$ ist parallel zu $S\mathfrak{P}'$ und wird von SF in O' halbiert). Daher ist F der Pol von h bezüglich k_0. — Bezeichnet ferner P' den Schnittpunkt von GF mit f, so ist zufolge der ähnlichen Dreiecke $SF\mathfrak{P}'$ und $O'FP'$ .... $FP' = P'\mathfrak{P}'$, d. h. f halbiert den Abstand der h von ihrem Pole F.

8. (Fig. 1.) Daraus folgt zunächst, dass die Projection der Kegelschnittlinie, in welcher die betrachtete Kegelfläche von der Ebene E geschnitten wird, auf die Ebene P und unter Voraussetzung der Projectionsrichtung SG_1 eine Ellipse oder Hyperbel ist. (6.) Da aber die projicierende Cylinderfläche von parallelen Ebenen, wie P_1 und P in congruenten Curven geschnitten wird, so projiciert sich die Kegelschnittlinie auch auf P_1 als E. oder H.; hienach lässt sich der Satz aufstellen:

„Projiciert man eine Kegelschnittlinie in der Richtung der Mittellinie der Kegelfläche auf die Ebene des Leitkreises, so erhält man eine E. oder H., je nachdem die schneidende Ebene

sämmtliche Kegelstrahlen schneidet oder zu zweien derselben parallel ist.“

9. (Fig. 1.) Wollte man die Projection der Kegelschnittlinie k' auf die Ebene P_1 construieren, so könnte man 1. nach dem unter Nr. 6 für die räumliche Bestimmung der Punkte von k' angeführten Principe verfahren. Dadurch gelangte man zu der unter Nr. 5 angegebenen Construction, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Linien k_{01}, f_1, h_1 die Stelle von k_0, f und h einnehmen. Da nun aber f_1 einen ganz beliebigen Abstand von h_1 hat, so folgt daraus, dass diese Construction allgemein giltig ist, mag f welchen Abstand immer von h haben Man könnte aber auch 2. die in P befindlichen Linien k_0, f, h auf die Ebene P_1 projicieren und die erhaltenen Linien k_0', f', h' der Construction zugrunde legen. Daraus folgt, dass die allgemeinen Constructionselemente k_{01}, f_1, h_1 stets durch specielle k_0', f', h' von der Art k_0, f, h ersetzt werden können. Wir werden daher bei den folgenden Betrachtungen ausschließlich die Constructionselemente k_0, f, h voraussetzen und benützen.

10. (Fig. 2.) Die unter Nr. 5 angeführte Construction gilt auch in dem Falle, wenn h den Kreis k_0 berührt; sie liefert dann eine Parabel. — Sei G der Brennpunkt, g die Directrix einer Parabel, M ein beliebiger, nach dem unter 1. angegebenen Verfahren construierter Punkt der letzteren. Man beschreibe um G mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis k_0, welcher die Achse der Parabel in $\mathfrak{P}'$ schneidet, ziehe in $\mathfrak{P}'$ die Tangente h und parallel zu dieser in dem Abstand der Directrix vom Brennpunkte die Gerade f. Schneidet nun GM die Kreisperipherie in M_0 und zieht man in M_0 eine Tangente an den Kreis, welche f in P, h in $\mathfrak{P}$ schneidet, so ist $MP \parallel G\mathfrak{P}$. Denn 1. sind $\mathfrak{P}_0 M$ und $G\mathfrak{P}$ parallel als Halbierende der Winkel $\mathfrak{M}_0 MG$ und $MG\mathfrak{P}'$, 2. sind $M_0\mathfrak{P}$ und $G\mathfrak{P}_0$ parallel, weil beide auf M_0G senkrecht stehen ($G\mathfrak{P}_0 \perp M_0G$, weil $\triangle M\mathfrak{P}_0 G \cong M\mathfrak{P}_0\mathfrak{M}_0$). Schneidet daher die verlängerte $\mathfrak{P}_0 M$ die $M_0\mathfrak{P}$ in P^*, so ist $P^*\mathfrak{P}G\mathfrak{P}_0$ ein Parallelogramm, daher $P^*\mathfrak{P} = G\mathfrak{P}_0$, folglich der senkrechte Abstand zwischen P^* und h = jenem zwischen G und g; daher liegt P^* auf f. Da aber P^* auch auf $M_0\mathfrak{P}$ liegt, so fällt derselbe mit P zusammen, demnach MP^* mit MP, d. h. $G\mathfrak{P} \parallel MP$. — Zieht man nun durch M_0 eine beliebige Gerade, welche f in T, h in $\mathfrak{T}$ schneidet, so ist $\frac{M_0 M}{MG} =$

$= \frac{M_0 P}{P\mathfrak{P}} = \frac{M_0 T}{T\mathfrak{T}}$, daher $MT \parallel G\mathfrak{T}$, woraus unsere Behauptung folgt.

11. (Fig. 2.) Legt man durch k_0 eine Kegelfläche mit dem Scheitel S, durch S und h eine Ebene $\mathfrak{E}$ und durch f eine zu $\mathfrak{E}$ parallele Ebene E, so schneidet E die Kegelfläche in einer Curve, deren Projection auf die Zeichenfläche in der Richtung von SG unsere Parabel ist. Das folgt unmittelbar aus der unter Nr. 6 angeführten räumlichen Bestimmung einzelner Punkte des Kegelschnittes. Hiebei ist bemerkenswert, dass die schneidende Ebene E zu einem Kegelstrahle $S\mathfrak{P}'$ parallel ist.

Ist umgekehrt Sk_0 eine Kegelfläche mit dem Scheitel S und dem Leitkreise k_0, E eine zu einem Kegelstrahle $S\mathfrak{P}'$ parallele, die Kegelfläche schneidende Ebene, so ist die Projection der Schnittlinie in der Mittelrichtung der Kegelfläche auf die Ebene des Leitkreises eine Parabel.

12. Das Ergebnis unserer Untersuchung lässt sich kurz in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. „Sind k_0, h und f bzw. eine Kreislinie und zwei beliebige parallele Gerade, so lassen sich aus diesen Linien folgendermaßen Punkte einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel herleiten: Man zieht durch einen beliebigen Punkt M_0 in k_0 einen Durchmesser $N_0 G$ und eine beliebige Gerade, welche f in T, h in $\mathfrak{T}$ schneiden mag; hierauf verbindet man G mit $\mathfrak{T}$ durch eine Gerade und zieht zu dieser durch T eine Parallele; diese Parellele schneidet $M_0 G$ in einem Punkte M der Curve. Die Curve ist eine E., H. oder P., jenachdem h an k_0 vorübergeht, k_0 schneidet oder berührt."

2. „Wird eine Kreiskegelfläche von einer Ebene geschnitten, welche weder durch den Scheitel geht noch zu der Grundebene parallel ist, und projiciert man die erhaltene Kegelschnittlinie in der Mittelrichtung der Kegelfläche auf die Grundebene, so ist die Kegelschnittprojection eine E., H. oder P., jenachdem die schneidende Ebene zu keinem, zu zweien oder einem der Kegelstrahlen parallel ist."

Collineation zwischen dem Leitkreis k_0 einer Kegelfläche und Projection der k einer auf dieser liegenden Kegelschnittlinie.

1. (Fig. 1, 2, 3.) Zwischen den Ebenen E und P besteht die Verwandtschaft der Collineation.[1]) Denn jedem Punkte von E entspricht ein Punkt von P, jeder Geraden von E eine Gerade von P und umgekehrt. Eine Ausnahme machen nur die Linien g' in E, h in P; der Geraden g' entspricht kein Punkt von P, oder in anderer Ausdrucksweise: der Geraden g von E entspricht die unendlich ferne Gerade von P; ebenso entspricht der Geraden h keine oder die unendlich ferne Gerade von E. g' ist die Gegenlinie von E, h die Gegenlinie von P. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gehen sämmtlich durch einen festen Punkt S, die Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen sämmtlich auf einer festen Geraden f. S ist das Centrum, f die Achse der Collineation. — Daraus folgt, dass auch zwischen den Projectionen der ebenen Systeme[2]) E und P, also auch zwischen den Systemen k und k_0 (mit dem gemeinschaftlichen Träger P) die Verwandtschaft der Collineation besteht; G ist das Centrum, f die Achse der Collin., g die Gegenlinie des Systems k, h die des Systems k_0. — Der Punkt G und alle von ihm ausgehenden Strahlen, sowie die Gerade f und alle Punkte derselben sind selbstentsprechende Elemente.

2. (Fig. 1, 2, 3.) Jeder Secante oder Tangente von k_0 entspricht eine Secante oder Tangente von k. Da nun eine Gerade den Kreis k_0 höchstens in zwei Punkten schneidet, so gilt dasselbe von der Curve k. Aus diesem Grunde werden die E., die H. und die P. Curven 2. Ordnung genannt. — Da sich ferner von einem Punkte höchstens zwei Tangenten an k_0 ziehen lassen, so ist dasselbe bei k der Fall. Aus diesem Grunde nennt man die Curven k Curven 2. Classe.[3])

3. (Fig. 1, 2, 3.) Einem Strahlenbüschel des einen Systems entspricht ein Strahlenbüschel des andern Systems. Liegt das Centrum $\mathfrak{T}$ eines Strahlenbüschels des k_0 auf h, so entspricht

---

[1]) Dieselbe tritt zum erstenmal auf bei dem ebenen Schnitte einer Pyramide. (VI. Cl.)

[2]) Alle Punkte und Linien einer Ebene bilden in ihrer Gesammtheit ein sogenanntes „ebenes System"; die Ebene ist der Träger desselben.

[3]) Die Analysis lehrt, dass es außer den genannten Curven keine Curven zweiter Ordnung oder zweiter Classe gibt.

dem Büschel ein Parallelstrahlenbüschel des k von der Richtung $G\mathfrak{T}$. Man sagt, dem Punkte $\mathfrak{T}$ des Systems k_0 entspricht die Richtung $G\mathfrak{T}$ oder der unendlich ferne Punkt von $G\mathfrak{T}$ im System k; insbesondere entspricht bei der H. jedem der beiden Schnittp. von h und k_0 eine Asymptotenrichtung, bei der P. dem Punkte F die Achsenrichtung. (Ebenso entspricht einem Strahlenbüschel des Systems k, dessen Centrum V[1]) auf g liegt, ein Parallelstrahlenbüschel des Systems k_0 von der Richtung $G\,V$; dem V entspricht die Richtung $G\,V$.)

4. (Fig. 4.) Jeder Strecke $P_0\,Q_0$ im System k_0, welche keinen Punkt mit h gemein hat, entspricht Punkt für Punkt eine Strecke PQ im System k. — Wenn jedoch eine Strecke $M_0\,N_0$ im System k_0 von h in $\mathfrak{S}$ geschnitten wird, so entspricht derselben im System k die Ergänzung der Strecke MN zu einer Geraden; der Strecke $M_0\mathfrak{S}$ entspricht der von M ausgehende N ausschließende Strahl der Geraden, der Strecke $N_0\mathfrak{S}$ der von N ausgehende und M ausschließende Strahl. — Hat eine Strecke $R_0\mathfrak{U}$ den Endpunkt $\mathfrak{U}$ mit h gemein, so entspricht derselben ein Strahl $R\,U$ und ihrer Ergänzung der Gegenstrahl von $R\,U$.

5. (Fig. 1, 2, 3.) Unter einem inneren oder äußeren Punkte der Curve k wollen wir einen Punkt verstehen, dessen entsprechender Punkt im System k_0 ein innerer oder äußerer Punkt des Kreises k_0 ist; unter der inneren oder äußeren Seite der Curve k diejenige, an welcher die inneren oder äußeren Punkte derselben liegen. Die innere Seite der Curve ist demnach diejenige, an welcher die Brennpunkte G und F der E. und H. liegen oder der Brennpunkt G der P. sich befindet. Denn G ist ein innerer Punkt der Curve, da sein entspr. Punkt im System k_0 er selbst ist und innerhalb k_0 liegt; wenn demnach ein Punkt im Systeme k an derselben Seite von k liegt wie G, d. h. wenn die Strecke GX, wo X[2]) einen beliebigen Punkt bezeichnet, von k nicht geschnitten wird, so kann auch die entsprechende Strecke GX_0 im System k_0 von k_0 nicht geschnitten werden, d. h. X_0 liegt an derselben Seite von k_0 wie G, also innerhalb k_0. Was aber den 2. Brennp. F der E. oder H. betrifft, so liegt derselbe auf der Geraden AB: bei der

---

[1]) Nicht verzeichnet.
[2]) Nur in Fig. 2 gezeichnet.

E. auf der Strecke AB, bei der H. auf der Ergänzung dieser Strecke. Nun entspricht der Strecke $A_0 B_0$ von k_0 bei der E. die Strecke AB, bei der H. die Ergänzung von AB; folglich liegt der dem F entspr. Punkt im System k_0 auf $A_0 B_0$, demnach innerh. k_0.

6. (Fig. 1—4.) Eine Sehne von k heißt eine innere oder äußere, jenachdem ihre Punkte innere oder äußere sind. Die E. besitzt nur innere Sehnen, weil keine Sehne von k_0 h schneidet. — Die H. besitzt innere und äußere und außerdem uneigentliche (innere und äußere) Sehnen, d. h. Strahlen, deren Anfangspunkte in der Curve liegen. Die inneren Sehnen entsprechen jenen Kreissehnen, welche keinen Punkt mit h gemein haben; die äußeren Sehnen entsprechen den Ergänzungen jener Sehnen, welche h schneiden. Die uneigentlichen Sehnen endlich entsprechen jenen Kreissehnen, bezw. deren Ergänzungen, welche von einem Punkte der h begrenzt werden; sie sind zu den Asymptoten parallel. — Die P. besitzt innere und uneigentliche Sehnen. Erstere entsprechen jenen Kreissehnen, welche h nicht schneiden; letztere entsprechen den durch F gehenden Kreissehnen, bezw. ihren Ergänzungen, sie sind zur Achse parallel. — Allen Sehnen des Kreises k_0, deren Verlängerungen sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$ von h schneiden, entsprechen parallele innere Curvensehnen (E., H., P.). Den Ergänzungen aller Sehnen von k_0, die sich in einem Punkte von h schneiden, entsprechen äußere parallele Sehnen der k (H.).

7. (Fig. 1, 2, 3.) Unter einem Durchmesser im weiteren Sinne versteht man bei der E. und H. jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade, bei der Parabel jede zur Achse parallele innere (uneigentliche) Sehne. Jeder Durchmesser von k entspricht einer durch F gehenden Geraden im System k_0. Denn bei der E. und H. entspricht dem F der Mittelpunkt O, wie aus der Collin. der Ebenen E und P oder auch aus der Ähnlichkeit der $\triangle FOW$ und $FG\mathfrak{W}$ hervorgeht. Bei der P aber entspricht dem F die Richtung der Achse.

8. (Fig. 1.) Ist k eine E., so schneidet jede durch F gehende Gerade den Kreis k_0 in zwei Punkten; daher schneidet jeder Durchmesser die E. in zwei Punkten. Diese stehen von O gleichweit ab, wie schon aus der centrischen Symmetrie der E., aber auch daraus folgt, dass die Strahlen G (M_0, N_0, F, $\mathfrak{W}$) wegen der harmonischen Lage der vier Punkte $M_0 N_0 F \mathfrak{W}$ harmonische

Strahlen sind und MN zu einem derselben parallel ist. Die von den beiden Schnittpunkten begrenzte Sehne wird bekanntlich in engerem Sinne Durchmesser genannt; die beiden Endpunkte heißen Scheitelpunkte desselben. Halbmesser $= \frac{1}{2}$ Durchmesser.

9. (Fig. 5.) Die Durchmesser der H. lassen sich in zwei Büschel zusammenfassen. Das eine Büschel umfasst jene Durchmesser, welche die H. schneiden (die sogenannten reellen Durchmesser), das andere diejenigen, welche sie nicht schneiden (die sogenannten imaginären Durchmesser). Getrennt werden diese Büschel durch die beiden Asymptoten. Das erste Büschel entspricht jenem Strahlenbüschel aus F, dessen Strahlen k_0 schneiden, das zweite Büschel jenem, dessen Strahlen an k_0 vorübergehen. Die Asymptoten sind Durchmesser, deren entsprechende Gerade k_0 berühren.

Auf den reellen Durchmessern liegen Sehnen, welche wie bei der E. in engerem Sinne Durchmesser genannt werden. Auf den imaginären Durchmessern liegen zwar keine Sehnen, dennoch nimmt man auch auf ihnen Durchmesser i. e. S. an, welche auf folgende Weise erhalten werden. Man zieht parallel zu einem der in Rede stehenden Durchmesser i eine Tangente BP an die H.; dieselbe schneidet die Asymptoten, da $BP \parallel G\mathfrak{P}$, $G\mathfrak{P}$ aber von $G\mathfrak{U}$ und $G\mathfrak{B}$ verschieden ist. Trägt man nun die halbe Länge der von den Asymptoten begrenzten Tangente beiderseits des Mittelpunktes auf dem Durchmesser i auf, so begrenzen die Endpunkte der erhaltenen Strecken den Durchmesser i. e. S. (Da sich parallel zu dem betrachteten Durchmesser zwei Tangenten an die H. ziehen lassen, so entsteht die Frage, ob die Asymptoten auf jeder derselben gleiche Strecken abschneiden? Die Antwort lautet bejahend, zufolge der centrischen Symmetrie der Curve.)

10. (Fig. 6, 7, 8.) Jeder Durchmesser von k (E., H., P.) halbiert eine Schar paralleler Sehnen und jede Schar paralleler Sehnen wird von einem Durchmesser halbiert. Sind $M_0 N_0$, $M_0' N_0'$[1] zwei Sehnen von k_0, die sich direct oder verlängert in einem Punkte $\mathfrak{P}$ von h schneiden und ist $A_0 B_0$ die Polare von $\mathfrak{P}$. bzgl. k_0, welche f in Q, h in $\mathfrak{Q}$, $M_0 N_0$ in R_0, $M_0' N_0'$ in R_0' schneidet, so sind $M_0 N_0 R_0 \mathfrak{P}$ und $M_0' N_0' R_0' \mathfrak{P}$ je vier harmonische Punkte, daher $G(M_0 N_0 R_0 \mathfrak{P})$ und $G(M_0' N_0' R_0' \mathfrak{P})$ je vier harmonische

[1]) Gezeichnet ist nur $M_0 N_0$.

Strahlen. Bezeichnen nun MN und $M'N'$ die entsprechenden Curvensehnen von $M_0 N_0$ und $M_0' N_0'$, so ist $MN \parallel M'N' \parallel G\mathfrak{P}$; folglich werden MN und $M'N'$ von AB, d. i. der entspr. Geraden von $A_0 B_0$ in den Punkten R, bezw. R' halbiert. AB ist aber ein Durchmesser, weil $A_0 B_0$ als Polare von $\mathfrak{P}$ durch F geht. (7.) Demnach halbiert der Durchmesser AB die parallelen Sehnen MN und $M'N'$.

Bei der E. und P. sind die halbierten Sehnen stets innere, bei der H. sind sie innere oder äußere, jenachdem der Durchmesser reell oder imaginär ist.

Der Durchmesser und die halbierte Sehnenschar heißen einander conjugiert. (Conjug. Richtungen.)

11. Die Tangenten in A_0 und B_0 an k_0 schneiden sich in $\mathfrak{P}$; daraus folgt, dass die Tangenten in den Scheitelpunkten eines Durchmessers zu den conjugierten Sehnen parallel sind, oder dass ein Durchmesser die Berührungspunkte der Tangenten verbindet, welche der conjugierten Sehnenschar parallel sind. Darauf beruht eine Lösung der Aufgabe, zu einem Durchmesser oder einer Sehne die conjug. Richtung zu ermitteln.

(Fig. 6, 7, 8.) Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich in einem Punkte des conjugierten Durchmessers. Denn die Tangenten in M_0 und N_0 schneiden sich in dem Pole T_0[1]) von $M_0 N_0$; dieser liegt auf $A_0 F$, weil $M_0 N_0$ durch den Pol von $A_0 F$, nämlich $\mathfrak{P}$ hindurchgeht.

Bei der E. und H. sind die Punkte A_0, B_0, T_0, R_0 harmonisch, daher sind auch A, B, T, R harmonische Punkte; folglich ist $OA^2 = OR \,.\, OT$. Bei der Parabel sind A_0, F, T_0, R_0 harmonisch, daher auch $G\,(A_0, F, T_0\, R_0)$; folglich ist $AT = AR$.

12. (Fig. 6, 7.) Wenn ein Durchmesser (der E. oder H.) die mit einem 2. Durchmesser parallele Sehnenschar halbiert, so halbiert der 2. Durchmesser die mit dem 1. parallele Sehnenschar. Denn da $\mathfrak{P}$ der Pol von $F\mathfrak{Q}$ ist, so ist $\mathfrak{Q}$ der Pol von $F\mathfrak{P}$; daher werden die zu $G\mathfrak{Q}$ oder AB parallelen Sehnen von dem zu $G\mathfrak{P}$ oder MN parallelen Durchmesser CD halbiert. (10.)

Zwei Durchmesser, deren jeder die mit dem anderen parallele Sehnenschar halbiert, heißen con-

1) In Fig. 7 nicht verzeichnet.

3. **Die Eckpunkte des Parallelogramms 1234, dessen Mittellinien conjug. Durchmesser sind, liegen auf den Asymptoten.**

Auf der 1. Eigenschaft beruht eine einfache Construction der Hyperbel, wenn die Asymptoten und ein Curvenpunkt gegeben sind. Aus der 2. Eigenschaft ergibt sich eine einfache Tangentenconstruction, wenn der Berührungspunkt und die Asymptoten gegeben sind. Aus der 3. Eigenschaft folgt eine Construction der Asymptoten und mithin auch der Achsenrichtungen, wenn ein Paar conjug. Durchmesser gegeben ist.

Gleichungen der Curven zweiter Ordnung.

1. (Fig. 6.) Zwischen einer Sehne MN und dem conjugierten Durchmesser AB einer E. besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang.

Wird $M_1 N_1 \parallel M_0 N_0$ durch R gezogen, so ist

$$\frac{RM_1}{R_0 M_0} = \frac{GR}{GR_0}, \quad \frac{RN_1}{R_0 N_0} = \frac{GR}{GR_0},$$

daher

$$\frac{RM_1 \cdot RN_1}{R_0 M_0 \cdot R_0 N_0} = \frac{GR^2}{GR_0^2} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Ferner ist

$$\frac{RM}{RM_1} = \frac{G\mathfrak{P}}{M_0\mathfrak{P}}, \quad \frac{RN}{RN_1} = \frac{G\mathfrak{P}}{N_0\mathfrak{P}},$$

daher

$$\frac{RM \cdot RN}{RM_1 \cdot RN_1} = \frac{G\mathfrak{P}^2}{M_0\mathfrak{P} \cdot N_0\mathfrak{P}} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Vereinigt man die Gleichungen 1) und 2) durch Multiplication, so ergibt sich

$$\frac{RM \cdot RN}{R_0 M_0 \cdot R_0 N_0} = \frac{GR^2}{GR_0^2} \cdot \frac{G\mathfrak{P}^2}{M_0\mathfrak{P} \cdot N_0\mathfrak{P}} \quad \ldots \quad 3)$$

Analog findet man

$$\frac{RA \cdot RB}{R_0 A_0 \cdot R_0 B_0} = \frac{GR^2}{GR_0^2} \cdot \frac{G\mathfrak{Q}^2}{A_0\mathfrak{Q} \cdot B_0\mathfrak{Q}} \quad \ldots \quad 4)$$

Da nun $R_0 A_0 \cdot R_0 B_0 = R_0 M_0 \cdot R_0 N_0$, so liefert die Division von 3) durch 4) die Gleichung

$$\frac{RM \cdot RN}{RA \cdot RB} = \frac{G\mathfrak{P}^2}{G\mathfrak{Q}^2} \cdot \frac{A_0\mathfrak{Q} \cdot B_0\mathfrak{Q}}{M_0\mathfrak{P} \cdot N_0\mathfrak{P}} \quad \ldots \quad 5)$$

gierten Durchmessers in demselben Verhältnisse, wie das Quadrat des mit der Sehne parallelen Durchmessers zu dem Quadrat des conjugierten Durchmessers.

Die Gleichung III) gilt auch in dem Falle, als H mit F, I mit G zusammenfällt. Dieser Fall tritt ein, wenn $\mathfrak{P}$ ins Unendliche, $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}'$ fällt, die conjugierten Durchmesser AB, CD also die Achsen der E. sind.[1])

Setzt man $OR = x,\ RM = RN = y,$
$$OA = OB = a,\ OC = OD = b,$$
so nimmt die Gleichung III) nach leichter Umgestaltung die Form an:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \ldots \ldots \quad \text{IV)}$$
welche „Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar conjugierter Durchmesser" genannt wird.[2])

2. (Fig. 7.) Wie für die E. gilt auch für die H. die Gleichung 5). Ferner ist bei gleicher Bedeutung von H, I und K:
$$A_0\mathfrak{Q} \,.\, B_0\mathfrak{Q} = \mathfrak{U}\mathfrak{Q} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{Q} = G\mathfrak{Q} \,.\, H\mathfrak{Q}$$
und
$$M_0\mathfrak{P} \,.\, N_0\mathfrak{P} = \mathfrak{P}A_0^2 = G\mathfrak{P} \,.\, I\mathfrak{P}; \text{ daher}$$
$$\frac{RM \,.\, RN}{RA \,.\, RB} = \frac{G\mathfrak{P}}{G\mathfrak{Q}} \cdot \frac{H\mathfrak{Q}}{I\mathfrak{P}},$$
oder aus gleichen Gründen wie bei der E.
$$\frac{(\frac{1}{2}MN)^2}{RA \,.\, RB} = \frac{KH}{KI} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Zieht man durch $\mathfrak{Q}$ die Gerade I II parallel zu $G\mathfrak{P}$, welche $G\mathfrak{U}$ in I, $G\mathfrak{B}$ in II schneidet und construiert in A die Tangente 1 2, welche die Asymptoten in 1 und 2 schneidet, so entstehen die ähnlichen Dreiecke $O1A$ und $G\mathrm{I}\mathfrak{Q}$; daher ist
$$\frac{1A}{OA} = \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{I}}{G\mathfrak{Q}}.$$

Außerdem ist $\triangle \mathfrak{U}\mathrm{I}\mathfrak{Q} \infty \triangle \mathfrak{U}G\mathfrak{P}$, daher
$$\frac{\mathfrak{Q}\mathrm{I}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{U}} = \frac{G\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}} \text{ und } \mathfrak{Q}\mathrm{I} = \frac{G\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{U}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{U}\mathfrak{P}}.$$

Somit ist
$$\frac{1A}{OA} = \frac{G\mathfrak{P}}{G\mathfrak{Q}} \cdot \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{U}\mathfrak{P}} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

---

[1]) Auf die nähere Begründung leisten wir hier Verzicht.

[2]) Vgl. A. Milinowski, Geom. d. Kegelschn. Leipzig 1882, Teubner. §§. 281, 283.

Analog findet man

$$\frac{2A}{OA} = \frac{G\mathfrak{P}}{G\mathfrak{Q}} \cdot \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{B}\mathfrak{P}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

und durch Multiplication von 1) und 2)

$$\frac{1A \,.\, 2A}{OA^2} = \frac{G\mathfrak{P}^2}{G\mathfrak{Q}^2} \cdot \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{Q} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{U}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{P}},$$

oder

$$\frac{1A \,.\, 2A}{OA^2} = \frac{G\mathfrak{P}^2}{G\mathfrak{Q}^2} \cdot \frac{G\mathfrak{Q} \,.\, H\mathfrak{Q}}{G\mathfrak{P} \,.\, I\mathfrak{P}} = \frac{G\mathfrak{P}}{G\mathfrak{Q}} \cdot \frac{H\mathfrak{Q}}{I\mathfrak{P}}.$$

Da nun $1A = 2A = OC = \frac{1}{2}CD$, so ist ferner wie der E.

$$\frac{CD^2}{AB^2} = \frac{KH}{KI} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Aus I) und II) folgt

$$\frac{(2MN)^2}{RM \,.\, RB} = \frac{CD^2}{AB^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{I}$$

Das ist aber dieselbe Gleichung, die wir schon bei der kennen gelernt haben. Der dort aufgestellte Satz gilt dal auch für die H. mit der Einschränkung, dass die bezoge Sehne eine innere, der conjugierte Durchmesser also ein reeller i

Die Gl. III gilt wie bei der E. auch in dem Falle, we AB die reelle, CD die imaginäre Achse der H. ist.

Durch analoge Einführung der Zeichen x, y, a, b wie der E. nimmt die Gleichung III) die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{I}$$

welche „Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ein Pa conjugierter Durchmesser" genannt wird.

3. [illegible], Für die H. gilt ebenso wie für die E. die Gl eichung 3.

$$\frac{RA \,.\, RA'}{R_1M_1 \,.\, R_1N_1} = \frac{GR^2}{GR_1^2} \cdot \frac{G\mathfrak{P}^2}{M_1\mathfrak{P} \,.\, N_1\mathfrak{P}}$$

Da nun $RA \,.\, RA' = R_1M_1 \,.\, R_1N_1$, ist $\dfrac{GR^2}{GR_1^2} = \dfrac{G\mathfrak{P}^2}{M_1\mathfrak{P} \,.\, N_1\mathfrak{P}}$

Zieht man $GV \parallel A_1F$, wo V den Schnittpunkt von G mit AB bezeichnet, ferner $A'F'$ durch $R \parallel A_1F$, wo A' und Punkte in GA_1, beziehungsweise GF bedeuten, so lässt si die letzte Gleichung durch folgende ersetzen:

$$RM.RN = R_0A_0 . R_0F . \frac{A'R.F'R}{R_0A_0 . R_0F} . \frac{GF^2}{(\frac{1}{2}A_0F)^2},$$

$$RM.RN = 4 . \frac{A'R}{A_0F} . \frac{GV}{A_0F} . GF^2, \text{ oder}$$

$$RM.RN = 4\frac{AR}{GF} . \frac{AV}{GF} . GF^2, \text{ oder endlich}$$

$$(\tfrac{1}{2}MN)^2 = 4AR.AV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I)}$$

D. h. Das Quadrat aus der Hälfte einer Sehne ist gleich dem vierfachen Rechteck aus dem Abschnitte des conjugierten Durchmessers und dem Abstand des Scheitels von der Directrix.

Dieser Satz gilt auch in dem Falle, wenn V in die Achse fällt.

Setzt man $AR = x$, $RM = RN = y$, $AV = \frac{p}{2}$, so nimmt die Gleichung I) die Form an:

$$y^2 = 2px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

Das ist die „Gleichung der Parabel, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente im Scheitel desselben".

4. (Fig. 6.) Aufgabe. Ein Paar conjugierter Durchmesser einer Ellipse von bestimmter Neigung $\varphi < R$ zu construieren, wenn k_0 und h gegeben sind.[1])

Winkel $G\mathfrak{P}H = G\mathfrak{Q}I = R - \varphi$. Legt man daher durch F und G einen Kreis mit dem Peripheriewinkel $R - \varphi$ über arcus FG, so schneidet derselbe h im allgemeinen in 2 Punkten, deren jeder als der fragliche Punkt $\mathfrak{P}$ betrachtet werden kann. Den zugeordneten Punkt $\mathfrak{Q}$ findet man, wenn man $GH \perp \mathfrak{P}F$ zieht.

Da man aber beiderseits von FG einen Kreis der erwähnten Art construieren kann, so wären vier Lösungen zu vermuthen. Das ist aber nicht der Fall, denn $\measuredangle G\mathfrak{Q}F = R - \varphi$; daher liegt $\mathfrak{Q}$ auf dem 2. Kreise. Die Aufg. hat demnach im allgemeinen zwei Lösungen, symmetrisch zu den Achsen.

Mit wachsendem φ wird $R - \varphi$ immer kleiner, $\mathfrak{P}$ entfernt sich immer mehr von $\mathfrak{P}'$, während sich $\mathfrak{Q}$ diesem Punkte unausgesetzt nähert. Für $\varphi = R$ fällt $\mathfrak{P}$ ganz aus, $\mathfrak{Q}$ aber fällt mit $\mathfrak{P}'$ zusammen; $G\mathfrak{P}$ wird $\parallel h$, $G\mathfrak{Q} \perp h$; d. h. die conjug. Durchmesser sind diesfalls die Achsen. Die Aufg. hat also nur eine Lösung.

---

[1]) Vgl. Balsams Bearbeitung der sieben Bücher Apollonius' und des achten von Halley wieder hergest. Buches Berlin 1861. G. Reimer. 8. B. § 18.

Noch in einem zweiten Falle erhält man nur eine Lösung: wenn der durch F und G gehende Hilfskreis die h berührt, $R - \varphi$ also den größten, φ den kleinsten möglichen Wert φ_0 annimmt. Die conjug. Durchmesser sind diesfalls gleich lang und liegen symmetrisch bez. der Achsen. Wir wollen φ_0 berechnen.

$$\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}'^2 = \mathfrak{P}' F . \mathfrak{P}' G = 4 \frac{b_0^2 a_0^2}{c^2},$$

$$\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}' = \frac{2 a_0 b_0}{c}, \; tg\, \mathfrak{P}' G \mathfrak{P}_0 = \frac{2 a_0 b_0}{c} : \frac{2 a_0^2}{c} = \frac{b_0}{a_0}.$$

Daraus folgt, dass die in Rede stehenden Durchmesser in die Diagonalen des Rechteckes fallen, das die Achsen zu Mittellinien hat.

Aus der Lösung der Aufg. geht hervor, dass zwei conjug. Durchm. durch ihren Neigungswinkel — wenn von der symmetrischen Lösung abgesehen wird — unzweideutig bestimmt sind. Durch den Neigungswinkel wird daher das Längenverhältnis mitbestimmt.

5. (Fig. 6.) Aufgabe. Ein Paar conjug. Durchmesser der durch k_0 und h bestimmten E. zu construieren, wenn das Längenverhältnis derselben $\left(\frac{a}{b} = \frac{m}{n},\; m > n\right)$ gegeben ist.[1])

Es handelt sich hier darum, das Viereck $GIFH$ so zu construieren, dass $\frac{CD^2}{AB^2} = \frac{HK}{IK} = \frac{n^2}{m^2}$ wird.

Da K ein fester, leicht zu bestimmender Punkt ist, so hat man nur noch einen der Punkte H, I zu ermitteln. Beschreibt man daher über FG als Durchmesser den Kreis l und zieht durch K die kürzeste Sehne $2s$, so ist $IK . HK = s^2$, mithin der Forderung gemäß $IK^2 = s^2 \frac{m^2}{n^2}$ und $\frac{IK}{s} = \frac{m}{n}$. Man trägt daher von K aus auf KG und s die Länge m, resp. n auf, verbindet die Endpunkte und zieht durch den Endpunkt E von $2s$ eine Parallele zu dieser Verbindungslinie; dieselbe schneidet auf KG die Länge $Ki = KI$ ab. Nun beschreibt man aus K mit dem Radius Ki einen Kreis; dieser schneidet l in zwei Punkten I. Die Aufg. hat demnach im allgemeinen zwei Lösungen, welche symmetrisch zu den Achsen liegen.

---

[1]) Balsam, a. a. O. 8. B. § 8.

Lässt man m bei constantem n wachsen, so nähert sich i dem G. Fällt i mit G zusammen, so ist auch $I \equiv G$ und die Aufg. hat nur eine Lösung, die Achsen.

Nimmt m ab bis $m = n$, so wird $IK = s$ und die Aufg. hat abermals nur eine Lösung: zwei gleich lange und bez. der Achsen symmetrische Durchmesser. (Vgl. die vorhergehende Aufg.)

6. Die beiden eben behandelten Aufgaben lassen sich auch bei der Hyperbel stellen und in analoger Weise auflösen. Man findet, dass zwei conjug. Durchmesser 1. einen jeden beliebigen $\measuredangle\ \varphi$ einschließen können, 2. für $\varphi = o$ mit je einer Asymptote zusammenfallen, 3. in einem beliebigen Längenverhältnisse zu einanderstehen können, und 4. bei einer gleichseitigen Hyperbel, d. i. einer Hyperbel, deren Asymptoten aufeinander senkrecht stehen oder deren Achsen einander gleich sind, ebenfalls einander gleich sind.

(Fig. 8.) Bei der Parabel lässt sich die Forderung stellen, denjenigen Durchmesser zu construieren, der mit den conjugierten Sehnen einen bestimmten Winkel einschließt. Diese Forderung wird erfüllt, wenn $G\mathfrak{P}$ mit der Achse den gegebenen Winkel bildet. Hienach ist $\mathfrak{P}$, mithin auch A leicht zu construieren. Man findet immer zwei, bez. der Achse symmetr. Lösungen; ist der gegebene Winkel ein Rechter, so ergibt sich nur eine Lösung: die Achse.

7. Aufgabe. Aus einem Paar conjugierter Durchmesser AB, CD einer Ellipse die Hauptachse und die Brennpunkte zu ermitteln.

(Fig. 6, 9.) Zunächst sollen die Achsenrichtungen auf grund nachstehender Erwägung ermittelt werden. Fällt man von irgend einem Punkte F_1 der Hauptachse die Senkrechten F_1H_1, F_1I_1 auf die beiden Durchmesser, so ist das dadurch erhaltene Viereck $OI_1F_1H_1$ ähnlich dem Viereck $GIFH$, folglich ist $H_1K_1 : K_1I_1 = HK : KI = b^2 : a^2$. Wenn man demnach ein Viereck $OI_1F_1H_1$ construiert, das diese Proportion erfüllt, so erhält man in OF_1 die Hauptachse. Ein solches Viereck erhält man nun auf folgende Art: Man zieht YZ durch $C \perp OA$ und macht $CY = CZ = OA$. Hierauf wird um OYZ ein Kreis beschrieben und OC bis an die Peripherie zu L verlängert. Es ist dann $OC . CL = CZ^2$ oder $b . CL = a^2$, mithin $CL = \frac{a^2}{b}$

und $CL : OC = a^2 : b^2$. Zieht man nun durch C den Kreisdurchmesser MF_1 und verbindet dessen Endpunkte mit O und L, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke MF_1O und MF_1L, die sich zu einander verhalten wie $OC : CL$ oder $b^2 : a^2$. Fällt man $F_1I_1 \perp OL$, $F_1H_1 \perp OA$, so ist $OI_1F_1H_1$ das verlangte Viereck. Denn $\triangle MF_1L \sim \triangle OF_1I_1$, weil $\measuredangle M = O$ und $\measuredangle L = I_1$ ist; daher verhält sich $\triangle MF_1L : OF_1I_1 = MF_1^2 : OF_1^2$. Ebenso ist $\triangle MF_1O \sim OF_1H_1$, daher $\triangle MF_1O : OF_1H_1 = MF_1^2 : OF_1^2$. Folglich ist $\triangle MF_1O : OF_1H_1 = MF_1L : OF_1I_1$ und $\triangle MF_1O : MF_1L = OF_1H_1 : OF_1I_1$, also $\triangle OF_1H_1 : OF_1I_1$ oder $H_1K_1 : K_1I_1 = b^2 : a^2$. — OF_1 ist demnach die Hauptachse. Für die Praxis ist die Bemerkung von Belang, dass $\measuredangle ZOF_1 = F_1OY$. Hienach lässt sich die Hauptachse auf folgende einfache Art construieren:

„Man zieht YZ durch $C \perp OA$ und macht $OY = OZ = OA$. Hierauf verbindet man Y und Z mit O und halbiert den $\measuredangle YOZ$; die Winkelhalbierende ist die Hauptachse."

Diese Construction liefert stets eine und nur eine Auflösung. Denn lässt man auch die Halbmesser OA und OB bei der Construction ihre Rollen tauschen, so erhält man doch wieder dieselbe Gerade OF_1 wie zuvor. Das folgt aus der Congruenz der $\triangle OAY'$ und OCY, OAZ' und OCZ, welche beweist, dass $OY' \perp OY$, $OZ' \perp OZ$, daher die Winkelhalbierende von YOZ mit der von $Y'OZ'$ zusammenfällt.

Die Brennpunkte lassen sich leicht nach dem Satze bestimmen, dass der Kreis, welcher durch die Brennpunkte und einen Curvenpunkt geht, die Nebenachse in Punkten schneidet, welche der Tangente, bezw. der Normale in jenem Punkte angehören. Sind die Brennpunkte gefunden, so lässt sich die Länge $2a_0$ der Hauptachse aus den Vectoren eines der gegebenen Scheitelpunkte ohneweiters ermitteln.

Aus der Lösung dieser Aufgabe folgt, dass eine E. durch ein Paar conjug. Diameter bestimmt ist, sowie dass zwei beliebige einander halbierende Strecken als conjug. Durchm. einer E. aufgefasst werden dürfen.

7. Die nämliche Aufgabe lässt sich auch bei der H. stellen und auf Grund einer ähnlichen Betrachtung wie bei der E. lösen. Doch gelangt man schneller zum Ziel, wenn man sich erinnert, dass die Hauptachse den Asymptotenwinkel halbiert.

Diesen Winkel aber erhält man mittels des aus den gegebenen Durchmessern als Mittellinien construierten Parallelogramms. Im übrigen gilt hier dasselbe wie dort; nur der Unterschied findet statt, dass hier die Aufgabe zwei Auflösungen hat, so lange die Durchmesser nicht als reell, bezw. imaginär specificiert sind.

8. Bei der Parabel kann man verlangen, die Directrix und den Brennpunkt zu construieren, wenn eine Sehne MN und der conjugierte Durchmesser AR gegeben sind.

(Fig. 8.) Die Lösung ist die folgende. Man ermittelt 2. AV als 3. stetige Proportionale zu $2AR$ und MR_1 beschreibt aus A als Mittelpunkt mit dem Radius AV einen Kreis und zieht die Sehne $VG \perp MN$; G ist der Brennpunkt und die Senkrechte von V auf AR die Directrix.

Die Aufgabe hat stets eine und nur eine Lösung.

9. Die Gleichung III) der E. gestattet folgende einfache und interessante Construction der E. aus zwei conjug. Durchmessern $A_0 B_0 = 2a_0$ und $C_0 D_0 = 2b_0$.

(Fig. 10.) Man beschreibt über $A_0 B_0$ als Durchmesser einen Kreis $\mathfrak{k}$ (Scheitelkreis), errichtet in O und einem beliebigen Punkte A' von $A_0 B_0$ Senkrechte zu $A_0 B_0$, welche die Peripherie des Kreises in $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{A}$ schneiden. Construiert man nun $\triangle A'\mathfrak{A}A \sim O\mathfrak{C}_0 C_0$, so ist A ein Punkt der Ellipse k. Denn es ist

$$A'\mathfrak{A}^2 = A'A_0 \,.\, A'B_0,$$
$$A'A : A'\mathfrak{A} = OC_0 : O\mathfrak{C}_0,$$

mithin

$$A'A^2 : A'A_0 \,.\, A'B_0 = OC_0^2 : OA_0^2.$$

Der Kreis $\mathfrak{k}$ kann als die in der Zeichenfläche liegende Leitlinie einer sonst beliebigen Cylinderfläche aufgefasst werden, deren Strahlen $\mathfrak{A}A^*$ sich in die Richtung $\mathfrak{A}A$ projicieren. Wird die Cylinderfläche von einer durch $A_0 B_0$ gelegten Ebene E geschnitten, welche mit dem Cylinderstrahle $\mathfrak{A}A^*$ den Punkt A^* gemein hat, so ist die Projection der Schnittcurve k' auf die Zeichenfläche die Ellipse k. Denn um einzelne Punkte der Schnittcurve k' zu bekommen, legt man durch einzelne Strahlen $\mathfrak{A}A^*$, $\mathfrak{C}_0 C^*$... parallele Ebenen, welche die Zeichenfläche in den Parallelen $A'\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{C}_0$..... und die Ebene E in den Parallelen $A'A^*$, OC^*..... schneiden. Ist nun A die Projection von A^*, also $A'\mathfrak{A}A$ die Projection des $\triangle A'\mathfrak{A}A^*$, so ist C_0 die Projection von C^*...., weil die Raumdreiecke $A'\mathfrak{A}A^*$ und $O\mathfrak{C}_0 C^*$

paarweise parallele Seiten, und parallele Seiten parallele Projectionen haben. Die Construction der Projection von k^* fällt daher mit jener von k^0 zusammen, somit ist k die Projection von k'. Daraus lässt sich schliessen, dass die Projection des ebenen Schnittes eines Kreiscylinders auf die Grundebene eine Ellipse ist.

Zwischen l und k', somit auch zwischen l und k findet Affinität statt. A_1B_1 ist die Achse, $\mathfrak{A}A^*$, bezw. $\mathfrak{A}A$ die Richtung der Affinität. Demnach entspricht einer Sehnenschar und dem conjug. Durchmesser von k eine Sehnenschar und der sie halbierende Durchmesser von l. Daraus folgt, dass zwei conjug. Richtungen der E. zwei zu einander senkrechte Richtungen des Kreises entsprechen. Hiedurch wird eine Lösart der Aufgabe vermittelt, zu einer gegebenen Sehnenrichtung der E. die conjug. Richtung zu bestimmen. Auf der Affinität beruht auch eine Lösart der Sections- und Tactionsprobleme der Ellipse.

10. (Fig. 10.) Bezieht man ein Paar conjug. Halbmesser $OA = a$, $OC = b$ auf ein anderes Paar conjug. Halbmesser $OA_0 = a_0$, $OC_0 = b_0$ als Coordinatenachsen, und bezeichnen x_a, y_a die Coordinaten von A, x_b, y_b die Coordinaten von C, so finden folgende Relationen statt:

1. $\frac{y_b}{x_a} = \frac{y_a}{x_b} = \frac{b_0}{a_0}$.

Denn $\triangle C'O\mathfrak{C} \sim OC_0\mathfrak{C}_0$, daher ist $y_b : C'\mathfrak{C} = b_0 : a_0$. Ferner ist infolge der congruenten Dreiecke

$OC'\mathfrak{C}$ und $OA'\mathfrak{A}_0$ $C'\mathfrak{C} = OA' = x_a$.

2. Aus 1. folgt $x_a \cdot y_a = x_b \cdot y_b$ und

3. $\frac{y_a}{x_a} \cdot \frac{y_b}{x_b} = \frac{b_0^2}{a_0^2}$.

4. Aus $\frac{x_a^2}{a_0^2} + \frac{y_a^2}{b_0^2} = 1$ und $x_a = \frac{a_0}{b_0} y_b$ folgt

$$y_a^2 + y_b^2 = b_0^2.$$

Analog ergibt sich

$$x_a^2 + x_b^2 = a_0^2.$$

5. Setzt man $\sphericalangle A_0OC_0 = \varphi_0$, so ist

$$a^2 = x_a^2 + y_a^2 + 2x_ay_a\cos\varphi_0,$$
$$b^2 = x_b^2 + y_b^2 - 2x_by_b\cos\varphi_0,$$

mithin im Hinblick auf 2. und 4.

$$a^2 + b^2 = a_0^2 + b_0^2.$$

6. Substituiert man die Werte

$$y_a = x_b \cdot \frac{b_0}{a_0} \text{ und } x_a = y_b \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

für je ein y_a und x_a in der Gleichung

$$\frac{x_a^2}{a_0^2} + \frac{y_a^2}{b_0^2} = 1,$$

so ergibt sich

$$x_a y_b + y_a x_b = a_0 b_0.$$

Nun ist $\triangle\, OAC = \frac{1}{2}(x_a y_b + y_a x_b) \sin \varphi_0 = \frac{1}{2} ab \sin AOC$; folglich ist, wenn $\measuredangle AOC = \varphi$ gesetzt wird,

$$ab \cdot \sin \varphi = a_0 b_0 \cdot \sin \varphi_0.$$

11. (Fig. 11.) Von den Folgerungen, die sich aus diesen Beziehnngen ergeben, sei hier nur eine von besonderem Interesse erwähnt.

Aus 5. und 6. folgt, wenn $\varphi_0 = R$,

$$a^2 + b^2 + 2ab \sin \varphi = (a_0 + b_0)^2$$

oder

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos (R + \varphi) = (a_0 + b_0)^2 = OZ^2, \quad . \quad . \quad 1)$$

ferner

$$a^2 + b^2 - 2ab \sin \varphi = (a_0 - b_0)^2$$

oder

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos (R - \varphi) = (a_0 - b_0)^2 = C\mathfrak{C}^2 \quad . \quad . \quad 2)$$

Mithin ist $a_0 = F_1 \mathfrak{C}$ und $b_0 = F_1 C$.[1])

12. (Fig. 12, 13.) Bei der Hyperbel finden nachstehende Beziehungen statt, die sich aus der 1. wie bei der E. herleiten lassen.

1. $\frac{y_b}{x_a} = \frac{A'E}{OA'} = \frac{A'G}{OA'} = \frac{A_0 3}{OA_0} = \frac{b_0}{a_0}$ und $\frac{y_a}{x_b} = \frac{b_0}{a_0}$.
2. $x_a y_a = x_b y_b$.
3. $\frac{y_a}{x_a} \cdot \frac{y_b}{x_b} = \frac{b_0^2}{a_0^2}$.
4. $y_b^2 - y_a^2 = b_0^2, \quad x_a^2 - x_b^2 = a_0^2$.
5. $a^2 - b^2 = a_0^2 - b_0^2$.
6. $ab \sin \varphi = a_0 b_0 \sin \varphi_0$.

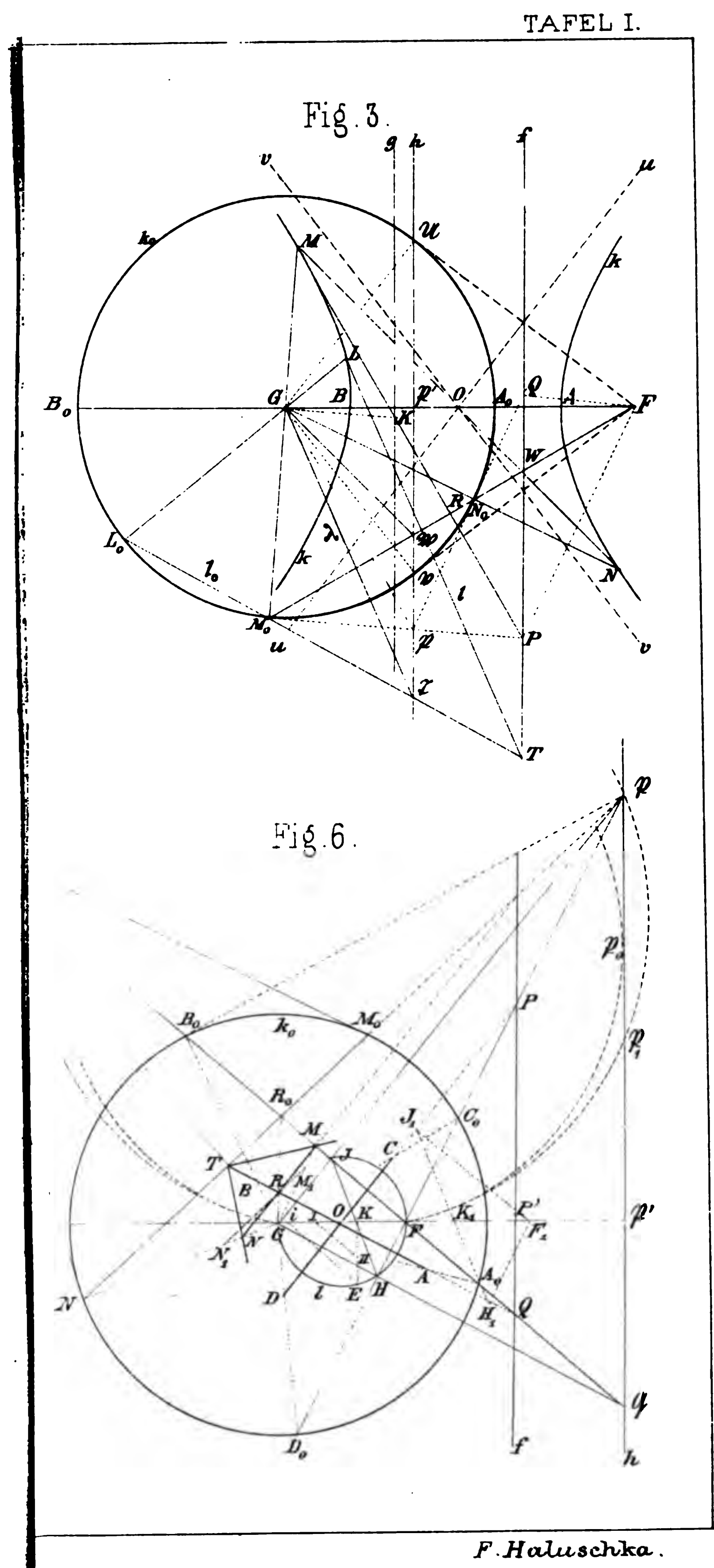
Aus 5. und 6. folgt für $\varphi_0 = R$:

$$OZ^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (2R - \varphi)$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi$$

---

[1]) Die bekannte Rytz'sche Achsenconstruction. Vgl. C. Pelz, Construction der Achsen einer Ellipse. (III. Progr. d. Staats-Realschule in Teschen 1876.) Wiener, Lehrbuch der darst. Geometrie u. a.

TAFEL I.



F. Haluschka.



IV.

n Beitrag zur Rectification der Curven.

Von

Dr. Alois Walter,

Professor am Landesgymnasium in Leoben.



Der Begriff der Länge einer Strecke oder gebrochenen Linie und der Begriff der Länge einer Curve beruhen auf zwei verschiedenen Definitionen.

Die Längenmaßzahl einer Strecke oder gebrochenen Linie gibt durch die ganzen und gebrochenen arithmetischen Einheiten, aus denen sie besteht, unmittelbar die Anzahl der Längeneinheitsstrecken und der genauen Theile derselben an, welche in ihr enthalten sind.

Auf eine krumme Linie ist dieser Begriff aber völlig unanwendbar, aus dem Grunde, weil eine krumme Linie eben keine geradlinigen Strecken enthält.

Der Begriff der Länge einer krummen Linie beruht vielmehr auf Folgendem: Denkt man sich einer krummen Linie ein System unbegrenzt vieler gebrochener Linien einbeschrieben, deren Längen, im Sinne der obigen Definition, der Reihe nach $L_1, L_2, \ldots L_n, \ldots$ heißen mögen, und deren Construction nach einem im übrigen beliebig bestimmten Gesetze, aber dabei so fortschreiten soll, dass mit unbegrenzt wachsendem Index n alle Seiten der gebrochenen Linien gegen Null convergieren, (was natürlich nur durch eine fortschreitende Vermehrung der Anzahl der Seiten erreicht werden kann), so lässt sich beweisen, erstens, dass für diese Reihe von Längenmaßzahlen $L_1, L_2 \ldots, L_n$, wenn n unbegrenzt wächst, ein Grenzwert existiert, und zweitens, dass dieser Grenzwert vollkommen unabhängig vom Gesetze ist, nach welchem die gebrochenen Linien $L_1, L_2, \ldots L_n, \ldots$ construiert wurden.

Daraus folgt, dass dieser Grenzwert eine Grösse vorstellt, welche für die krumme Linie selbst eigenthümlich und charakteristisch ist, und daher auch wohl verdient, mit einem eigenen Namen belegt zu werden; wendet man nun das oben beschriebene Verfahren auf eine Strecke oder gebrochene Linie an, was vollkommen möglich ist, so erkennt man, dass in diesem Falle der genannte Grenzwert identisch ist mit der Länge der betreffenden Strecke oder gebrochenen Linie; aus diesem Grunde wird auch bei krummen Linien diese Grösse mit dem Namen „Länge“ bezeichnet.

Die Existenz dieses Grenzwertes lässt sich auf mancherlei Art erweisen; die folgenden Zeilen bezwecken einen derartigen Beweis zu erbringen.

Unser nächstes Ziel ist es, für die Grösse L_n eine analytische Darstellung zu gewinnen.

Da nun die Länge L_n einer gebrochenen Linie gleich ist der Summe der Längen ihrer einzelnen Seiten, so ist es vor allem nöthig, eine analytische Darstellung für die Länge einer solchen Seite aufzustellen.

Wir denken uns die krumme Linie definirt durch die zwei Gleichungen

$$x = \varphi(z)$$
$$y = \psi(z);$$

der Anfangspunkt der zu berechnenden Sehne σ habe die rechtwinkeligen Coordinaten $x'y'z'$, der Endpunkt die Coordinaten $x''y''z''$, wobei $z'' > z'$ gedacht ist; dann ist

$$\sigma = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2}.$$

Wir setzen voraus, dass die Functionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ stetige und endliche Ableitungen besitzen; dann ist nach einem Satze der Differentialrechnung

$$x'' - x' = (z''-z') \cdot \varphi'(\zeta)$$

und

$$y'' - y' = (z''-z') \cdot \psi'(\eta),$$

wobei ζ und η zwei bestimmte, im allgemeinen natürlich verschiedene Werte aus dem Intervalle $z' \ldots z''$ vorstellen.

Nach Einführung dieser Werte erhält man

$$\sigma = (z''-z')\sqrt{\varphi'(\zeta)^2 + \psi'(\eta)^2 + 1}.$$

Was nun die Functionen $\varphi'(z)^2$ und $\psi'(z)^2$ anbelangt, so werden dieselben, falls sie nicht durchaus constant sind, einen Wechsel von Zu- und Abnahme aufweisen; wir denken uns nun auf unserer krummen Linie AB alle diejenigen Punkte markiert, wo $\varphi'(z)^2$, und ebenso diejenigen, wo $\psi'(z)^2$ einen solchen Wechsel vollführt; bezeichnen wir diese Zwischenpunkte mit $C_1, C_2, \ldots C_\varrho \ldots C_r$, so wird durch dieselben die krumme Linie AB in $r+1$ Stücke getheilt, von der Eigenschaft, dass im Inneren eines jeden dieser Stücke sowohl $\varphi'(z)^2$ als auch $\psi'(z)^2$ sein Verhalten nicht ändert.

Wir betrachten nun eines dieser Stücke, etwa das Stück $C_\varrho C_{\varrho+1}$; es sind da drei verschiedene Fälle möglich, nämlich erstens, $\varphi'(z)^2$ und $\psi'(z)^2$ sind im ganzen Verlaufe dieses Curvenstückes beide zunehmend oder beide abnehmend; zweitens, von den beiden Functionen ist die eine constant, die andere zunehmend, constant oder abnehmend; drittens, die eine Function nimmt zu, die andere nimmt ab.

Gleichgiltig, welcher von diesen drei Fällen nun stattfindet, stets lässt sich, wie nun gezeigt werden soll, der oben für die Sehne σ aufgestellte Ausdruck so transformieren, dass er die beiden unter dem Wurzelzeichen befindlichen Ableitungen nicht mehr mit zwei verschiedenen Argumenten, sondern vielmehr beide mit einem und demselben Argumente enthält.

Bedeuten nämlich, im Falle eins, k und g die untere und die obere Grenze von $\varphi'(z)^2$ im Intervalle $z' \ldots z''$, und ebenso $\varkappa$ und γ die untere und die obere Grenze von $\psi'(z)^2$ im selben Intervalle, so ist

$$k \leq \varphi'(\bar{z})^2 \leq g$$
$$\varkappa \leq \psi'(\bar{\bar{z}})^2 \leq \gamma,$$

daher

$$k + \varkappa \leq \varphi'(\bar{z})^2 + \psi'(\bar{\bar{z}})^2 \leq g + \gamma;$$

andererseits ist aber der kleinste Wert, den die Function $\varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2$ im Intervalle $z' \ldots z''$ annimmt, die Zahl $k + \varkappa$, und ihr größter Wert $g + \gamma$; außerdem nimmt diese Function, da sie stetig ist, auch jeden beliebigen Zwischenwert an; es gibt daher gewiss im Intervalle $z' \ldots z''$ eine Stelle $\tilde{z}$, wo

$$\varphi'(\tilde{z})^2 + \psi'(\tilde{z})^2 = \varphi'(\bar{z})^2 + \psi'(\bar{\bar{z}})^2$$

ist, so dass man demnach schreiben kann

$$\sigma = (z'' - z') \sqrt{\varphi'(\tilde{z})^2 + \psi'(\tilde{z})^2 + 1}.$$

Ganz dasselbe gilt im Falle zwei; da hier eine der *beiden Functionen* als constant vorausgesetzt ist, so kann man *als ihr Argument* ohneweiters das Argument der anderen *Function setzen.*

Ein klein wenig complicierter gestaltet sich diese Trans*formation im Falle* drei, wo die eine Function zunimmt, indem *die andere abnimmt.* In diesem Falle behelfen wir uns dadurch, *dass wir als* unabhängige Variable nicht die Coordinate z, *sondern die Coordinate* x annehmen, so dass jetzt die unsere *Curve definierenden* Gleichungen in der Form

$$y = f(x)$$
$$z = g(x)$$

erscheinen. Da nun zwei Relationen von der Form

$$y'' - y' = (x'' - x') \cdot f'(\bar{x})$$

und

$$z'' - z' = (x'' - x') \cdot g'(\bar{x})$$

bestehen, so ist jetzt

$$s = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} =$$
$$= (x'' - x') \sqrt{1 + f'(\bar{x})^2 + g'(\bar{x})^2}.$$

Nimmt nun im Intervalle $z' \dots z''$ die Function $\varphi'(z)^2$ $\frac{\text{zu}}{\text{ab}}$, indes $\psi'(z)^2$ $\frac{\text{ab-}}{\text{zu-}}$ nimmt, so nimmt im selben Intervalle $g'(x)^2 = \frac{1}{\varphi'(z)^2}$ $\frac{\text{ab}}{\text{zu}}$, und $f'(x)^2 = \psi'(z)^2 \cdot g'(x)^2$ ebenfalls $\frac{\text{ab}}{\text{zu}}$, so dass wir jetzt nichts anderes als wieder den Fall eins vor uns haben; daher können wir nun schreiben

$$s = (x'' - x') \sqrt{1 + f'(\bar{x})^2 + g'(\bar{x})^2},$$

wobei allerdings das Coordinatenintervall nicht wie früher der z-Achse, sondern der x-Achse angehört, welche Inconformität sich jedoch mit Leichtigkeit wird beheben lassen.

Wie gesagt, betrachten wir vorläufig nicht die ganze krumme Linie, sondern nur eines der Stücke $C_\varrho C_{\varrho+1}$; wir denken uns also demselben ein System unbegrenzt vieler gebrochener Linien mit gegen Null convergierender Länge der einzelnen Seiten einbeschrieben; die Längen der aufeinander folgenden gebrochenen Linien seien $l_1, l_2, \dots l_n, \dots$, und es ist nun nach den soeben gemachten Erörterungen entweder

$$l_n = \Sigma(z'' - z')\sqrt{\varphi'(\tilde{z})^2 + \psi'(\tilde{z})^2 + 1}$$

oder

$$l_n = \Sigma(x'' - x')\sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2 + g'(\tilde{x})^2}.$$

Die Bedingung, dass die Längen aller einzelnen Seiten σ der gebrochenen Linien l_n die Null zur Grenze haben sollen, wenn n unbegrenzt wächst, oder, mit anderen Worten, dass wenn ε eine willkürlich vorgegebene (beliebig kleine) Länge bedeutet, von einem bestimmten Werte des Index n angefangen bei allen nun folgenden gebrochenen Linien jede Seite σ kleiner sein soll als ε, zieht die Folgerung nach sich, dass auch die Coordinatendifferenzen $z'' - z'$, beziehungsweise $x'' - x'$, mit unbegrenzt wachsendem n die Null zur Grenze haben.

Nun lehrt die Integralrechnung, dass für eine Summe von der Form

$$\Sigma(z'' - z') \,.\, F(\tilde{z}),$$

wobei $\tilde{z}$ dem Intervalle $z' \ldots z''$ angehört, wenn sämmtliche Intervalle $z'' - z'$ gegen Null convergieren und F eine stetige und endliche Function ist, ein Grenzwert existiert, welcher vollkommen unabhängig von der Eintheilung des ganzen Intervalles der Variablen z in die Abtheilungen $z'' - z'$ ist; die Integralrechnung bezeichnet diesen Grenzwert durch das Symbol

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z) \,.\, dz;$$

demgemäß existiert auch für unsere Summe l_n ein derartiger, von der Lage der Eckpunkte der gebrochenen Linien völlig unabhängiger Grenzwert, welcher nach der Symbolik der Integralrechnung zu bezeichnen ist durch

$$\int_{z_\varrho}^{z_{\varrho+1}} \sqrt{\varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2 + 1} \,.\, dz,$$

beziehungsweise im Falle drei durch

$$\int_{x_\varrho}^{x_{\varrho+1}} \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} \,.\, dx;$$

führt man aber in dieses für den Fall drei giltige Integral als Integrationsvariable statt der Coordinate x die Coordinate z ein, so erhält man

$$\int \sqrt{[illegible]\, x^2 + [illegible]\, x^2}\; dx =$$

$$\int \sqrt{[illegible]\, x^2 + [illegible]\, x^2 [illegible]}\; dx =$$

$$\int \sqrt{\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2 + 1}\; dx.$$

[illegible] genau dieselbe Formel wie für die Fälle [illegible]; es gilt somit diese Formel ganz allgemein.

Die Länge einer dieser gebrochenen Linien kann nun geschrieben werden in der Form

$$\int \sqrt{\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2 + 1}\; dx - \varepsilon,$$

[illegible] Function von x ist, die mit unbegrenzt wachsendem [illegible] zur Grenze hat.

[illegible] von diesen Betrachtungen, die zur [illegible] Curvenstück $C_0 C_{n+1}$ gegolten haben, zur ganzen [illegible]

Bezeichnet man diese eine vom Anfangspunkte A bis zum Endpunkte B reichende gebrochene Linie [illegible], so werden die Punkte $C_1, C_2, \ldots C_r$ im allgemeinen nicht zugleich Eckpunkte dieser gebrochenen Linie sein; es werden vielmehr im allgemeinen diese Punkte C von Seiten der gebrochenen Linie [illegible] werden. Sind nun $x'_\varrho\, y'_\varrho\, z'_\varrho$ die Coordinaten des dem Punkte C_ϱ unmittelbar vorangehenden Eckpunktes, und $x''_\varrho\, y''_\varrho\, z''_\varrho$ die Coordinaten des ersten ihm folgenden Eckpunktes, und verbindet man diese beiden Punkte mit C_ϱ, so erhält man eine gebrochene Linie M_n, für welche sämmtliche Punkte C Eckpunkte sind.

Die Länge dieser gebrochenen Linie ist

$$M = \int \sqrt{\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2 + 1}\; dx + \Sigma \alpha_\varrho$$

Aus M erhält man L_n, indem man für jeden der r Punkte C die Sehne, begrenzt von den zwei Punkten $x'_\varrho\, y'_\varrho\, z'_\varrho$ und $x_\varrho\, y_\varrho\, z_\varrho$, sowie die Sehne, begrenzt von den zwei Punkten $x_\varrho\, y_\varrho\, z_\varrho$ und

$x''_\varrho\, y''_\varrho\, z''_\varrho$ subtrahiert, und dafür die Sehne, begrenzt von den zwei Punkten $x'_\varrho\, y'_\varrho\, z'_\varrho$ und $x''_\varrho\, y''_\varrho\, z''_\varrho$ addiert; es ist demnach

$$L_n = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2 + 1}\,.\,dz + \Sigma\alpha_\varrho -$$

$$- \Sigma(z_\varrho - z'_\varrho)\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2} - \Sigma(z''_\varrho - z'_\varrho)\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2} +$$
$$+ \Sigma(z''_\varrho - z'_\varrho)\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2},$$

wobei φ'^2 und ψ'^2 Werte dieser Functionen an Stellen der betreffenden Intervalle der z-Coordinate bedeuten; die Anzahl der Posten einer jeden der hier stehenden Summen ist constant.

Dies ist nun die gewünschte Darstellung für die Länge der der Curve eingeschriebenen gebrochenen Linien; aus dieser Form ersieht man, dass, wenn der Index n unbegrenzt wächst, für L_n ein Grenzwert existiert; denn das erste Glied der rechten Seite ist bezüglich n constant, während die folgenden vier Glieder für diesen Grenzübergang sämmtlich die Grenze Null besitzen.

Somit erhalten wir das Resultat

$$\lim L_n = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2 + 1}\,.\,dz,$$

und da dieses Resultat keine Spur von der Art der Construction der eingeschriebenen gebrochenen Linien enthält, ist gleichzeitig bewiesen, dass der Grenzwert von diesem Umstande vollkommen unabhängig ist und somit eine für die Curve selbst charakteristische Größe vorstellt; wie bereits gesagt, führt diese Größe den Namen „Länge der Curve“.

Wie man sieht, haben wir bei unserem Beweise, dass ein Grenzwert für L_n existiert, gleichzeitig eine zur Berechnung desselben dienliche Formel erhalten.

Betrachtet man den Anfangspunkt A unseres Curvenstückes als fest, dagegen den Endpunkt B als veränderlich, so erscheint die Länge s des Curvenstückes AB als eine Function der Coordinate z des Endpunktes; man kann nun nach dem Differentialquotienten dieser Function fragen.

Es ist, wenn das unbestimmte Integral von

$$\sqrt{\varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2 + 1}$$

mit $\Phi(z)$ bezeichnet wird,

$$s = \Phi(z) - \Phi(z_0),$$

daher

$$\frac{ds}{dz} = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \sqrt{\varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2 + 1}$$

und somit

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1.$$

Durch Multiplication mit $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$, beziehungsweise mit $\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$, erhält man die analogen Formeln

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

und

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Ist schließlich die Curve definiert durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$
$$z = \chi(t),$$

wie dies z. B. bei Problemen der Mechanik häufig der Fall ist, so liefert die Multiplication mit $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ die Formel

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Für den speciellen Fall einer ebenen Curve kann diese Untersuchung kürzer erledigt werden. Die Curve sei definiert durch eine Gleichung

$$y = f(x),$$

die Coordinaten ihres Anfangspunktes A seien $x_0\ y_0$, die ihres Endpunktes $B\ x\ y$.

Man denke sich nun genau so wie früher der Curve ein System unbegrenzt vieler gebrochener Linien $L_1, L_2, \ldots L_n, \ldots$ eingeschrieben, das Gesetz, nach welchem die Endpunkte dieser gebrochenen Linien bestimmt werden, sei wieder willkürlich bis auf die eine Bedingung, dass mit unbegrenzt wachsendem Index n die Längen aller Seiten der gebrochenen Linien nach Null convergieren sollen.

Die Länge einer solchen Seite ist

$$\sigma = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2};$$

vorausgesetzt nun, dass $f'(x)$ eine stetige und endliche Ableitung besitzt, ist

$$y'' - y' = (x'' - x') . f'(\tilde{x})$$

daher

$$\sigma = (x'' - x') \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2}$$

und somit

$$L_n = \Sigma (x'' - x') \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2}.$$

Die Bedingung, dass für n unbegrenzt wachsend die Seitenlängen nach Null convergieren sollen, hat zur Folge, dass dann auch alle Coordinatendifferenzen $x'' - x'$ nach Null convergieren; unter dieser Voraussetzung besitzt aber die hier stehende Summe L_n einen von der Wahl der Coordinatendifferenzen und somit auch von der Wahl der Eckpunkte der gebrochenen Linien unabhängigen Grenzwert, welcher in der Symbolik der Integralrechnung als

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, . \, dx$$

angeschrieben wird; dieses Integral stellt also die „Länge" einer ebenen Curve als Function der Coordinate x ihres Endpunktes dar, die Ableitung dieser Function ist daher

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

woraus

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

folgt; durch Multiplication dieser Gleichung mit $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$, beziehungsweise mit $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ erhält man die weiteren Formeln

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$$

und

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Nicht selten wird von folgendem Satze Gebrauch gemacht: Ist s die Länge eines Curvenstückes AB, dessen Anfangspunkt A als fest, dessen Endpunkt B dagegen als auf der Curve verschiebbar gedacht wird, und bedeutet σ die Länge der S e h n e

AB, so nähert sich der Quotient $\frac{s}{\sigma}$ dem Grenzwert 1, wenn die Sehne σ sich der Grenze Null nähert, also der Punkt B unbegrenzt gegen den Punkt A heranrückt.

Dieser Satz wird häufig ohne Beweis, gleichsam als unmittelbar evident, hingestellt, auf jeden Fall muss der Satz sich aber auch durch Rechnung ergeben.

Die Coordinaten des festen Punktes A seien $x_0 y_0 z_0$, die des beweglichen Punktes B $x y z$. Die Curve sei definiert durch die drei Gleichungen:

$$x = \varphi(\sigma)$$
$$y = \psi(\sigma)$$
$$z = \lambda(\sigma)$$

welche die Coordinaten der Punkte der Curve als Functionen ihres Abstandes σ vom Punkte A darstellen.

Es ist dann der Quotient

$$\frac{s}{\sigma} = \frac{\int\limits_0^\sigma \sqrt{\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2} \cdot d\sigma}{\sigma}$$

ebenfalls als Function von σ dargestellt.

Da bei diesem Bruche für $\sigma = o$ sowohl der Zähler als auch der Nenner verschwinden, so ist der Grenzwert des Bruches gleich dem Bruche, gebildet aus den Werten des Differentialquotienten des Zählers und des Nenners an der Stelle $\sigma = o$; es ist also

$$\lim \frac{s}{\sigma} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2}_{\sigma = o}}{1}.$$

Nun ist

$$\sigma^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

daher

$$\sigma = (x - x_0)\frac{dx}{d\sigma} + (y - y_0)\frac{dy}{d\sigma} + (z - z_0)\frac{dz}{d\sigma}$$

und weiters

$$1 = (x - x_0)\frac{d^2 x}{d\sigma^2} + (y - y_0)\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + (z - z_0)\frac{d^2 z}{d\sigma^2} +$$
$$+ \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2;$$

setzt man nun hier $\sigma = o$, so wird $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, und es bleibt nur

$$1 = \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2_{\sigma = o},$$

und wir erhalten somit

$$lim \frac{s}{\sigma} = 1.$$

Die hier bewiesene Eigenschaft ist derart charakteristisch für den Begriff der Länge einer Curve, dass sie geradezu hinreichend zur Definition dieses Begriffes ist.

Dies kann folgendermaßen gezeigt werden: Mit s bezeichnen wir eine einem Curvenstück AB eigenthümliche, im übrigen uns aber noch völlig unbekannte Größe, welche bloß der Bedingung

$$lim \frac{s}{\sigma} = 1$$

genügen soll, wobei σ die Länge der Sehne AB bedeutet.

Zunächst folgt aus dieser Bedingung, dass für $\sigma = o$ auch die Größe $s = o$ werden muss. Daher ist

$$lim \frac{s}{\sigma} = \frac{\left(\frac{ds}{dz}\right)_{\sigma = o}}{\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)_{\sigma = o}},$$

wenn wir alle auf die Curve bezüglichen Größen als Functionen der einen unabhängigen Variablen z ansehen; es hat also die Größe s die Eigenschaft, dass

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)_{\sigma = o} = \left(\frac{d\sigma}{dz}\right)_{\sigma = o}.$$

Nun ist aber

$$\sigma = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

aher

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{(x - x_0)\frac{dx}{dz} + (y - y_0)\frac{dy}{dz} + (z - z_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{x - x_0}{z - z_0} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{y - y_0}{z - z_0} \cdot \frac{dy}{dz} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z - z_0}\right)^2 + 1}}.$$

Wir benöthigen nun den Wert dieses Ausdruckes für $\sigma = o$: für dieses Argument ist aber

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \frac{\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_{\sigma=o}}{\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_{\sigma=o}} = \left(\frac{dx}{dz}\right)_{\sigma=o}$$

und ebenso

$$\frac{y - y_0}{z - z_0} = \frac{\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_{\sigma=o}}{\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)_{\sigma=o}} = \left(\frac{dy}{dz}\right)_{\sigma=o},$$

hieraus folgt nun

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)_{\sigma=o} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}_{\sigma=o}$$

und somit ist auch

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)_{\sigma=o} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}_{\sigma=o};$$

also an der Stelle $x_0 y_0 z_0$ hat der Differentialquotient unserer Größe s nach der Coordinate z denselben Wert wie

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1};$$

da aber die Stelle $x_0 y_0 z_0$ eine ganz willkürliche ist, so muss diese Gleichheit auch an jedem beliebigen anderen Punkte der Curve bestehen, so dass also ganz allgemein

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$$

ist. Dies ist nichts anderes als die Differentialgleichung der „Curvenlänge"; durch dieselbe ist die Größe s bis auf eine ...onsconstante bestimmt; der Wert derselben findet sich ...ler Bedingung, dass, wie schon hervorgehoben wurde, die Größe s verschwinden muss; es ist demnach die Bedingungsgleichung

$$\lim \frac{s}{\sigma} = 1$$

...öße s identisch mit der „Länge" der Curve.

V.

Über Plancurven vierter Ordnung

vom Geschlechte $p = 1$

und ihre typischen Formen.

Von

Wilhelm Binder,

Professor an der Landesrealschule und Fachschule für Maschinenwesen in Wiener-Neustadt.

Mit 40 Figuren auf 3 Tafeln.

Seit George Salmon sein „Treatise on the higher plane curves" veröffentlicht hat, sind insbesondere die gestaltlichen Verhältnisse der vorstehenden Curvengattung von Clebsch (Crelles Journal 64), sowie später auch von P. Vogel[1]) und H. Wiener[2]) untersucht worden. Auch sei etwa noch Zeuthen genannt, wenn auch dessen Untersuchungen sich wesentlich auf die allgemeinen Curven vierter Ordnung beziehen. (Math. Annalen VII.) Weit vorher waren die Specialitäten der bicircularen Curven als „aplanetische Linien" oder „Cartesische Ovalen" bekannt.[3]) Die Resultate der angeführten Autoren in dem Gebiete der bezeichneten Curven sind hauptsächlich auf dem Wege der Analytik hervorgegangen. Seither hat namentlich Ameseder[4]) die synthetische Methode eingeschlagen und damit bemerkenswerte Erfolge erzielt. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Synthesis kaum der Resultate der Analysis entrathen kann; allein ebenso feststehend ist, dass die letztere nicht immer über alle Beziehungen Aufschluss zu geben vermag, welche oftmals auf höchst einfache und elegante Weise durch die erstere vor Augen treten.

Die vorliegende Arbeit will nicht in dem Sinne aufgefasst

---

1) „Curven 4. O. vom Geschlechte 1", Dissertation, München 1880.

2) „Involutionen auf ebenen Curven", Dissertation, München 1881.

3) Siehe: Chasles „Geschichte der Geometrie", XXI. Note, deutsche Ausgabe von Sohncke.

4) „Geometr. Untersuch. d. eben. Curven 4. O. etc.", Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, II. Classe, LXXXVII. Bd., p. 47.

sein, als durch dieselbe das Gebiet der betrachteten Curvenart in Bezug ihrer gesammten Eigenschaften vollständig umfasst werden soll; diese Aufgabe würde den Rahmen einer Abhandlung, im Maßstabe der bis heute angewachsenen Literatur, weit überschreiten. Der geneigte Leser wird sich bald überzeugen können, dass der Inhalt dessen, was in dem Folgenden geboten ist, eine Studie ist, die sich besonders, indem sie an das unvergängliche oben citierte Werk Salmons anknüpft, über die Art der Erzeugung, der Formation und die wesentlichen Eigenschaften der Doppeltangenten der genannten Curven verbreitet. Bei Untersuchung dieser Fragen ist strenge die synthetische Methode eingehalten, welche uns zu einer Reihe von Ergebnissen führt, die zu Bekanntem Neues hinzufügen und so neuerdings die Fruchtbarkeit dieser Methode erweisen.

Unsere synthetischen Untersuchungen erweisen das Salmon'sche Gesetz von der „Zweitheiligkeit" einer Curve C^4_8 in dem Sinne, dass es Fälle gibt, wo der eine Curventheil imaginär wird. Allerdings ist nach der oben cit. Abh. von P. Vogel das Gebiet einer Function $f(x, y) = 0$ für complexe Werte zweifach ausgedehnt, was demnach noch einer näheren Betrachtung vorbehalten bleiben muss.

In Bezug des Verlaufes und der Formation einer ebenen C^4_8 mit zwei reellen, zwei imaginären Doppelpunkten oder mit einem Berührknoten zeigt die vorliegende Arbeit zwanzig charakteristische Typen mit ihren speciellen Eigenschaften. Soweit uns bekannt, ist absolut Neues geboten in einer Reihe von Sätzen, von denen das „classische Gesetz" in (12) und dessen Modification für eine Curve C^4_8 mit Berührknoten in (88) hervorzuheben sind; weiters die Unterscheidungen der damit verknüpften Elemente der drei Verzweigungsgattungen. Ebenso sind die Beziehungen, welche zwischen den Berührpunkten der Doppeltangenten in (18—20) ausgedrückt werden, bisher nicht bemerkt worden. Besonderes Interesse dürften gleichfalls die Eigenschaften des Fundamentalnetzes in (22), wie auch die Verzweigungscurve in (97) etc. beanspruchen.

Am Schlusse ist in (111) der für die Construction interessante Fall einer Unicursalcurve C^4_5 mit dreifachem Knoten angegeben, welche Singularität linear bisher kaum so einfach, wie in diesem Falle, gezeigt worden sein dürfte.

I.

Plancurven vierter Ordnung mit zwei reellen Doppelpunkten.

A. Erzeugung.

1. Zweideutige Tangentensysteme, die conlocal auf einem Kegelschnitte vorhanden sind, haben bekanntlich immer eine Curve vierter Ordnung, eventuell eine Degenerierte zum Resultat. Es wird sich zunächst darum handeln, solche Tangentensysteme durch eine möglichst einfache Construction auf einem gegebenen Kegelschnitte zu fixieren. Die diesbezügliche Construction muss die vorangestellte Bedingung enthalten, dass das Erzeugnis der Beziehung in zwei Punktelementen eine eigentliche oder uneigentliche Verknotung besitzt, welche als Doppelpunkte das Geschlecht desselben in bekannter Weise beeinflussen. Wir wollen zu diesem Zwecke von zwei auf einem geraden Träger coaxialen Punktenreihen, die sich in Projectivität befinden, ausgehen, wobei jedoch eine involutorische Beziehung ausgeschlossen werden muss. Man kann auf mannigfaltige Art solche projectivische Reihen feststellen, wovon wir im nachstehenden insbesondere von zwei Methoden Gebrauch machen, deren Einfachheit unserer Aufgabe am zweckdienlichsten erscheint.

2. Erste Methode. Auf einer Geraden o sind zwei Punkte AA' als Doppelelemente und ein Punktenpaar $X\xi$ als sich entsprechende Elemente von zwei projectivischen Reihen $X\xi$ angegeben, wodurch bekanntlich diese vollkommen bestimmt sind. Für die Vervollständigung dieser Reihen nehmen wir (Fig. 1) auf einem beliebigen Strahle s des einen der A-Punkte zwei Punkte SS' als Centra von Büscheln an, welche mit den Elementen der Reihen $X\xi$ perspectivisch sind. Zieht z. B. s durch A, so wird der Schnittpunkt:

$$(\,|SX|,\ |S'\xi|\,) \equiv X_1$$

mit dem A'-Punkte verbunden, wodurch man die Gerade $|X_1 A'| \equiv q$ erhält, welche die Perspectivitätsachse der Büsche SS' ist.

Die Vervollständigung der $X\xi$-Reihen ist jetzt einfach und bekannt.[1])

3. Zweite Methode. Die Annahmen der Doppelpunkte AA' und des Paares $X\xi$ auf dem o-Träger (Fig. 2) sind analog denjenigen in (2). Außerdem wählen wir einen beliebigen Constructionskreis $\varkappa$, der durch die AA'-Punkte zieht und nehmen auf demselben irgendwo einen Punkt B an. Den letzteren verbinden wir als Centrum eines, mit den Elementen der zwei auf o projectivischen Reihen, perspectivischen Strahlenbüschels durch Gerade mit den Punkten des Paares $X\xi$, wodurch auf dem Kreise $\varkappa$ ein Punktenpaar $X_1\xi_1$ herausgeschnitten wird. Ein beliebiger Punkt ν der Geraden o wird mit den Punkten $X_1\xi_1$ verbunden, welche Verbindungslinien auf $\varkappa$ ein Punktenpaar SS' erzeugen; diese letzteren sind offenbar die Centra von zwei Strahlenbüscheln, welche die Gerade $o \equiv q$ als Perspectivitätsachse besitzen. Man kann also die Vervollständigung der $X\xi$-Reihen sehr einfach dadurch bewerkstelligen, dass man einen beliebigen ν-Punkt der Geraden q mit den Centra SS' durch Strahlen verbindet, welche den Kreis $\varkappa$ in Punkten $X_1\xi_1$ treffen, die aus dem Centrum B auf den o-Träger nach $X\xi$ projiciert werden.

Soll demnach für einen beliebigen X-Punkt der entsprechende ξ auf o gesucht werden. so projicieren wir X aus dem Centrum B zunächst auf den Kreis nach X_1, sodann den letzteren Punkt aus dem Centrum S auf die Perspectivitätsachse q nach ν und verbinden ν mit dem Centrum S' durch einen Strahl, der auf dem Kreise den Punkt ξ_1 ergibt. Die Verbindungslinie $|B\xi_1|$ schneidet den o-Träger in dem verlangten Elemente ξ.

Es ist selbstverständlich, dass die Achse q mit der o-Geraden nicht zu coincidieren braucht. In letzterem Falle werden die Projectionen der reellen Schnitte $\alpha\alpha'$, welche die Achse q mit [illegible]eise $\varkappa$ gemeinsam hat, aus dem B-Centrum auf dem [illegible] die Doppelpunkte AA' enthalten müssen.[2])

Betrachtet man den Verlauf der auf o projectivischen [illegible]bilde nach jeder der zwei vorstehenden Constructions[illegible]n, so wird man leicht ersehen können, dass das Wesen [illegible]n eine gewisse Doppeldeutigkeit enthält, welche durch

[1]) E. Weyr: „Elemente d. project. Geom.“, 1. Heft, p. 98.
[2]) Schröter: „Theorie d. Kegelschnitte etc.“, p. 45 und Fig. 4.

die zwei voneinander verschieden liegenden Projectionscentra SS' bedingt wird. Diese Doppeldeutigkeit, welche sogleich gezeigt werden soll, darf nicht in dem Sinne verstanden werden, dass besagte Reihen „zweideutige" Elementargebilde vorstellen, was schon aus dem Grunde nicht zu verwechseln ist, als wir dieselben in projectivischer Beziehung, d. h. „eindeutig" gedacht haben.

5. Vermöge der Projectivität ist jedem X-Elemente der X-Reihe ein Punkt ξ der ξ-Reihe zugeordnet, wie wir in (2) und (3) gesehen haben. Wenn man jedoch den betreffenden X-Punkt als ein Element der ξ-Reihe auffasst, als welchen wir ihn mit ξ' bezeichnen wollen, so muss ihm in der X-Reihe ein Punkt X' entsprechen. Synthetisch gestaltet sich die Sache nachfolgend.

Wird ein variabler Punkt X nach der „ersten Methode" (Fig. 1) aus dem Centrum S nach X_1 auf die Gerade q und von da wieder mittelst des Centrums S' auf die Gerade o nach ξ projiciert, so wird das bezeichnete Punktenpaar $X\xi$ fixiert. Projiciert man jedoch den Punkt $X \equiv \xi'$ aus dem Centrum S' auf die q-Gerade nach X_2 und diesen letzteren Punkt wieder aus S nach X' auf die o-Gerade, so sind in diesem Sinne die Elemente des Paares XX' ebenfalls entsprechend.

Nach der „zweiten Methode" verfahren wir analog. Wurde ein entsprechendes Punktenpaar $X\xi$ auf dem o-Träger festgelegt nach (3), indem man den Punkt X aus dem Centrum B (Fig. 2) auf den Kreis $\varkappa$ nach X_1 und letzteren Punkt zunächst aus dem S-Centrum auf die q-Gerade nach ν projicierte, so wird man jetzt den X_1-Punkt aus dem Centrum S' auf die q-Gerade nach ν_1 projicieren. Die Verbindungslinie $|S\nu_1|$ trifft den $\varkappa$-Kreis in einem Punkte X'_1, welcher durch einen Strahl des Büschels B verbunden wird, wodurch auf dem o-Träger jenes Punktenelement X' ausgeschnitten wird, das dem Punkte X, respective ξ' projectivisch entsprechend ist.

6. Nach den vorausgeschickten Bemerkungen wenden wir uns nun der eigentlichen Aufgabe zu, die darin besteht: zweideutige Tangentensysteme auf einem Kegelschnitte zu fixieren. Zu diesem Behufe wählen wir in der Ebene der Trägergeraden o einen beliebigen Grundkegelschnitt k, den wir der Einfachheit in der Construction wegen in den Figuren der nachstehenden Untersuchungen immer als geschlossene Curve (Kreis)

annehmen, außer in jenen Fällen, wo dieses besonders hervorgehoben werden soll, insofern Asymptotenelemente specielle Modificationen involvieren. Dabei ist es ganz gleichgiltig, welche von den beiden Constructionsmethoden, auf die oben hingewiesen wurde, in Anwendung gebracht wird. Wir wollen aber stillschweigend, wenn nicht ausdrücklich Erwähnung geschieht, immer die erste Methode voraussetzen.

An jedem Punkte der x-Geraden ziehen an den Grundkegelschnitt k ein Paar Tangenten. Die Gesammtheit der Tangentenpaare, welche durch entsprechende Punktenelemente der projectivischen Reihen $X\xi$ bedingt sind, bildet zwei zweideutige Tangentensysteme, deren Erzeugnis eine Curve vierter Ordnung ist.

7. Obgleich die Richtigkeit des vorstehenden Satzes evident ist[1], so sind wir doch auch leicht imstande, denselben nachzuweisen, wenn wir die Anzahl der Schnittpunkte, die sich nach unserer Construction auf einer beliebigen Grundkegelschnittstangente höchstenfalls ergeben, untersuchen. Eine solche Tangente x schneidet (Fig. 1 od. 2) den Träger o in einem Punkte X, dessen entsprechender der Punkt ξ ist. Die aus ξ gehenden Tangenten schneiden auf x ein Punktenpaar $I\ II$ aus. Weil aber nach (b) dem Punkte $X \equiv \xi'$ auch ein Punkt X' projectivisch auf o ist, so treffen die aus X' an den Grundkegelschnitt ziehenden Tangenten die x-Gerade noch in einem weiteren Paare $I'\ II'$. Da man andere Punkte als die gefundenen auf x nicht erhalten kann, so ist ersichtlich, dass das Curvenerzeugnis mit der x-Geraden nur das Elementenquadrupel $I\ II\ I'\ II'$ gemeinsam hat, was bekanntlich für die Ordnung des Erzeugnisses maßgebend ist.

8. Die Doppelpunkte AA' der coaxialen Reihen $X\xi$ sind gleichzeitig analoge Elemente für das Curvenerzeugnis. Man wird dieses ohne Schwierigkeit erkennen, wenn man der Construction der Curvenpunkte der aus diesen Punkten an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangenten nachgeht. Es vereinigen sich in jedem A-Punkte ein Paar Punktenelemente; andererseits coincidieren ebenfalls in dem Berührpunkte, welchen eine aus einem A-Punkte gezogene Grundkegelschnittstangente hervorbringt, ein Paar Curvenpunkte, wie

[1] Vergl. Ameseder's cit. Abhandl., p. 74.

aus dem Verfolge der betreffenden Construction hervorgeht, d. h. diese Tangente ist auch ein gleiches Element für das Erzeugnis.

Mehr als die beiden Doppelpunkte AA' sind dem Erzeugnisse nicht eigen. Hieraus bestimmt sich nach der bekannten Formel die Classenzahl:

$$4\,(4-1)-2\,.\,2=8,$$

und wir sind berechtigt, dem Curvenerzeugnisse das Symbol: $C^4{}_8$ zu ertheilen.

9. Jede der in (7) erzeugten Punktengruppen $I\,II$ und $I'\,II'$ formiert in ihrer Variabilität auf den gesammten Tangenten des Grundkegelschnittes k eine quadratische Involution in der Plancurve $C^4{}_8$, welche Ameseder[1]) vom Geschlechte $=1$, d. i. identisch mit dem Geschlechte der Trägercurve $C^4{}_8$, bezeichnet. Die beiden Involutionen $I\,II$, $I'\,II'$ sind demnach einander begleitend und es ist offenbar der Grundkegelschnitt k ihre gemeinschaftliche Involutionscurve. Aus diesem Grunde bilden die einander entsprechenden Tangentenpaare des Grundkegelschnittes im Doppelsinne der beiden SS'-Centra zwei Scharen von Poncelet'schen Vierecken, welche dem Grundkegelschnitte umschrieben und gleichzeitig der Plancurve eingeschrieben sind.

B. Verzweigungselemente.

10. Es wurde bereits in (8) darauf hingewiesen, dass die Berührpunkte jener Tangenten, welche aus den Doppelpunkten AA' an den Grundkegelschnitt gehen, Punkte der Erzeugniscurve $C^4{}_8$ sind, und dass diese Tangenten gleichzeitig auch als solche Elemente der Curve angehören, also beiden Curven gemeinschaftlich sind. Wir nennen sie Hauptverzweigungen.

Da aus jedem Doppelpunkte zwei Tangenten an den Grundkegelschnitt möglich sind, so enthält die Plancurve vier derartige Verzweigungselemente, weshalb der Grundkegelschnitt k für die Plancurve $C^4{}_8$ ein viermal berührender Kegelschnitt ist. Bezeichnet man die Hauptverzweigungen der beiden Doppelpunkte AA', beziehungsweise mit VV_1, $V'V'_1$, so ist zu bemerken, dass die Plancurve bekanntlich keine anderen Punktenelemente mit dem Grundkegelschnitte gemein haben kann, was übrigens auch aus der obigen Definition des Grundkegel-

[1]) Siehe cit. Abhandl., S. 71.

schnittes als Involutionscurve hervorgeht. Aus letzterem Grunde wird auch klar, dass die gesammten Punktenelemente der Erzeugniscurve stets außerhalb des Grundkegelschnittes sich anordnen müssen.

11. Wenn man die Eigenschaft von Verzweigungselementen in der Weise auffasst, dass dieselben auf gemeinschaftlichen Tangenten zwischen Curve und Grundkegelschnitt entstehen, so ist einzusehen, dass es noch eine zweite Gattung solcher Elemente geben wird, die wir Nebenverzweigungen heißen. Dieselben kommen offenbar auf jenen zwei Tangenten vor, welche in den Schnitten NN_1 der o-Geraden mit dem Grundkegelschnitte an diesen ziehen. Auf jeder von diesen zwei Tangenten bildet sich selbstverständlich ein Punktenquadrupel, welche als Elemente der Plancurve $C^4{}_8$ eigen sein werden, und in dessen Elementen $\boldsymbol{v}$ diese selbst von Grundkegelschnittstangenten berührt wird.

Wir sehen in Fig. 3 die Construction nach der ersten Methode (2) durchgeführt. Man braucht nur einen N-Punkt dem bezeichneten Gesetze zu unterwerfen, was im Doppelsinne der zwei Projectionscentra SS' auf der in N gehenden Kegelschnittstangente das betreffende Quadrupel Nebenverzweigungen $\boldsymbol{v}$ resultiert. Ganz ähnlich verfahren wir nach der zweiten Methode (3) in Fig. 4.

Die charakteristische Eigenschaft einer Curvenverzweigung in den gefundenen v-Punkten erhellt, wenn man sich vor Augen hält, dass das sonst mögliche Tangentenpaar eines beliebigen anderen Punktes des o-Trägers in einem N-Punkte eine Coincidenz bildet.

12. Man kann von jedem Doppelpunkte einer Plancurve $C^4{}_8$, außer den als Hauptverzweigungstangenten bezeichneten, noch ein zweites Tangentenpaar an die Curve ziehen. Dem allgemeinen Begriffe nach müssen dessen Elemente ebenfalls als „Verzweigungen" angesehen werden, ohne dass jedoch, wie in den beiden früheren Fällen, dieselben dem Grundkegelschnitte angehören. „Die betreffenden Berührpunkte $\boldsymbol{\varphi}$ liegen mit den beiden Hauptverzweigungen des anderen Doppelpunktes auf der Polaren a des letzteren", welche merkwürdige Eigenschaft wir als: „das classische Gesetz der Plancurve $C^4{}_8$" bezeichnen. Die Verzweigungen φ dieser Art seien „begleitende" genannt.

Anmerkung. Obgleich Salmon[1]) den Satz ausspricht: „Die Berührungspunkte der von einem Doppelpunkte aus an die Curve gehenden Tangenten liegen in einer Geraden“, so werden die folgenden Untersuchungen nachweisen, dass die Richtigkeit desselben nur in dem Falle eintrifft, als der betreffende Doppelpunkt ein „Berührknoten“ der Curve ist, und dass der Salmon'sche Satz als Specialfall nicht mit der allgemeinen Eigenschaft der Plancurven $C^4{}_8$, welche wir vorstehend als „das classische Gesetz“ bezeichnet haben, zu verwechseln ist.

13. Eine Hauptverzweigungstangente repräsentiert bekanntlich zwei Elemente, so dass die vier Tangenten dieser Art acht Elemente zählen; diese bilden mit den acht Tangenten in den Nebenverzweigungen zusammen sechzehn zwischen dem Grundkegelschnitte und der Plancurve gemeinschaftliche Tangenten, womit neuerdings die Classenzahl $\frac{16}{2} = 8$ der Curve erfolgt.

Die Bestätigung der Classe der Curve finden wir übrigens auch nachstehend. Einem beliebigen Punkte P der Ebene entspricht nach Steiner[2]), wenn dieser Punkt als Pol der Plancurve behandelt wird, eine erste Polare. Diese ist in unserem Falle eine Curve dritter Ordnung, welche die beiden Knotenpunkte der Plancurve als einfache Elemente in sich begreift; sie durchsetzt folglich ihre Basiscure $C^4{}_8$ nur mehr in acht Punkten, weil jeder der Knotenpunkte $A A'$ zwei Elemente vertritt, was zusammen für beide Curven bekanntlich $3 . 4 = 12$ gemeinschaftliche Punkte gibt. In diesen acht Punkten ziehen aus dem P-Pole die an die Curve $C^4{}_8$ möglichen Tangenten, wie es vermöge ihrer Classification sein muss.

Liegt der Polpunkt P auf der Plancurve $C^4{}_8$ selbst, dann berührt die Cubik (erste Polare) die erstere in jenem Punkte P und es erfolgen zwischen beiden Curven nur mehr sechs Schnittpunkte, so dass sich aus dem P-Punkte ebensoviele Tangenten, ausgenommen die Tangente in ihm selbst, die man für zwei Elemente bekanntlich zu zählen hat, ziehen lassen. Singularlagen des Punktes P auf der Plancurve $C^4{}_8$ bedingen entsprechende Singularitäten der ersten Polare; doch verzichten wir, näher darauf einzugehen.

---

[1]) „Analyt. Geom. d. höh. eb. Curven“, übersetzt von Fiedler, p. 267.
[2]) „Gesammelte Werke“, p. 496.

C. Knotentangenten.

14. Wir haben in (10) gesehen, dass der Grundkegelschnitt k die Plancurve C^4_8 in den vier Hauptverzweigungen $V V_1$, $V' V'_1$ berührt, welche man mittelst der zwei aus den reellen Knotenpunkten $A A'$ an ihn ziehenden Tangentenpaare $v v_1$, $v' v'_1$ erhält (Fig. 5).

Dieses Tangentenquadrupel v bildet ein vollständiges Vierseit, dessen Gegeneckenpaare $\varrho \varrho'$, $\varrho_1 \varrho'_1$ und dessen Diagonalen die Verbindungslinien:

$$| A A' | \equiv o, \quad | \varrho \varrho' | \equiv z', \quad | \varrho_1 \varrho_1' | \equiv z$$

sind. Fasst man die Figur als vollständiges Viereck auf, so treffen sich dessen Gegenseiten in den Diagonalpunkten

$$(v v') \equiv \varrho, \; (v_1 v'_1) \equiv \varrho', \; (| \varrho_1 \varrho'_1 |, \; | A A' |) \equiv Z'.$$

Die Diagonalen $o z z'$ des Vierseits $v v_1 v' v'_1$ schneiden einander in dem Punktentripel $O Z Z'$, indem das Punktenpaar $Z Z'$ auf dem Träger $| A A' | \equiv o$ liegt, während der Punkt O, der Pol der o-Geraden bezüglich des Grundkegelschnittes k ist. Gleichzeitig sind die Punkte $Z Z'$ für diesen Kegelschnitt conjugierte Elemente, was sagen will: die Geraden $z z'$ sind die Polaren des Paares $Z Z'$ und ziehen durch das Polcentrum O.

Man wird übrigens bemerken, dass das Punktentripel $O O Z'$ auch das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks der Hauptverzweigungen $V V_1 V' V'_1$ ist, woraus ebenfalls eine einfache Construction des Paares $Z Z'$ folgt.

Ebenso leicht wird eingesehen, dass man das Paar $Z Z'$ auch noch dadurch zu fixieren imstande ist, wenn man die in (11) angezeigten Nebenverzweigungen v wechselweise durch Strahlen verbindet, was aus der polaren Beziehung zwischen der o-Geraden und dem Pole O hervorgeht.

15. Jeder Knotenpunkt $A A'$ der Plancurve C^4_8 ist der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, dessen Elemente die betreffenden Knotenstrahlen sind. Ziehen wir einen beliebigen Strahl x des Büschels A, so schneidet er die zwei vorhin bezeichneten Geraden $z z'$ in Punkten $X X'$; die Verbindungslinien $| A' X |$, $| A' X' |$ kann man als Elemente des Büschels A' dem Strahle x entsprechend zuweisen. In dieser Weise entspricht jedem Elemente des A-Büschels ein Paar Elemente des A'-Büschels und vice versa, so dass beide Büschel zweideutig sind. Allein wir erkennen auch sehr leicht die eigenthümlich reducierte Lage

dieser Büschel AA', indem das Geradenpaar zz' sozusagen ihr Erzeugnis bildet.[1]) Die Verbindungslinien $|AA'| \equiv o$, $|AO|$, $|A'O|$ sind in den zweideutigen Strahlenbüscheln AA' Doppelelemente, und insbesondere sind in der ersteren zwei solche Elemente identisch vereinigt, was eine einfache Betrachtung erweist. Denn nach Salmon[2]) besteht zwischen den vier Tangenten, die man aus jedem Knotenpunkte AA' an die Plancurve $C^4{}_8$ ziehen kann, eine Projectivität, weil die Doppelverhältnisse dieser Tangentenquadrupel gleich sind. Man erhält demgemäß als Erzeugnisse der vier Projectivitäten im allgemeinen vier Kegelschnitte, welche insgesammt durch die beiden Knotenpunkte AA' laufen. Jeder solche Kegelschnitt vermag jedoch, wie man ohne Schwierigkeit einsehen kann, in ein Paar Gerade zu degenerieren, deren eine dann der o-Träger ist.

16. Einem Hauptverzweigungsstrahle v eines Doppelpunktes A entsprechen in dem zweideutig verwandten Büschel A' die gleichartigen Elemente $v'v'_1$ und wechselweise. Analog verhält es sich mit den in (12) charakterisierten begleitenden und in (11) bezeichneten Nebenverzweigungen, resp. ihren Tangenten. Unser Gesetz kommt nun auch für die in den reellen Doppelpunkten AA' an die Curve gehenden Tangentenpaare zur Anwendung, woraus die Beziehung folgt: „Einer Knotentangente entsprechen die beiden Knotentangenten des anderen Doppelpunktes."

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir in der Lage, bei Angabe einer einzigen Knotentangente die drei übrigen linear zu ermitteln. Man braucht nur die Schnitte ζ der gegebenen Tangente auf dem Geradenpaare zz' mit dem anderen Doppelpunkte zu verbinden etc. (Fig. 5).

17. Schließlich sei darauf hingewiesen, dass man einen Knotenpunkt A der Plancurve $C^4{}_8$ immerhin auch als das Centrum einer Strahleninvolution formieren kann, deren conjugierte Elemente wie folgt gefunden werden. Ist x Strahl eines Doppelpunktes A, so treffen die zwei entsprechenden des anderen Doppelpunktes als Elemente der in (15) angegebenen zweideutigen Büschel das Geradenpaar zz' in den Punkten XX' bezüglich.

---

[1]) Vergl. hier E. Weyr: „Beiträge zur Curvenlehre", p. 47.

[2]) „Analyt. Geom. d. höh. eben. Curven", deutsche Übers. von Fiedler, p. 296.

Die Verbindungslinie XX' | $\equiv x_1$ zieht durch den ersteren Doppelpunkt A und bildet das in der Involution dieses Punktes gesuchte conjugierte Element. Offenbar ist in jedem Falle die o-Gerade einerseits und die Verbindungslinie des betreffenden A-Punktes als Centrum der Involution mit dem Pole O andererseits ein Asymptotenelement dieser Involution.

Anmerkung. Vergleicht man das bisher gefundene mit den Ameseder'schen Resultaten in der cit. Abhandl.,[1] so findet man unseren Fall identisch mit dem Specialfalle der Anmerkung b, auf Seite 52. Unser Grundkegelschnitt k ist der fixe Kegelschnitt des Systems III. Die Elemente des Tripels OZZ' sind die Cayley'schen Punkte, von denen O ein Doppelpunkt ist, während ZZ' einfache Elemente sind. Die Seiten des gemeinschaftlichen Diagonaldreiseits ozz' sind die Hesse'schen Geraden, von denen wieder der o-Träger doppelt zu zählen ist, und welche den Salmon'schen Kegelschnitten (15) äquivalent sind.

Zieht man durch einen Cayley'schen Punkt einen Strahl, so trifft er das Curvenerzeugnis $C^4{}_8$ in einem Punktenquadrupel, dessen Elemente durch jenen Punkt und die conjugierte Hesse'sche Polare in Paaren je einer Harmonität getrennt erscheinen. Aus diesem Grunde sind die Hesse'schen Geraden harmonische Polaren und die betreffenden Cayley'schen Punkte harmonische Centra, wohlgemerkt: nicht für das Curvenerzeugnis, was nur dann der Fall wäre, sofern das Centrum auf der Curve selbst liegen würde. Dieser letztere Fall tritt dann ein, wenn die Curve $C^4{}_8$, wie später gezeigt werden soll, einen Berührknoten besitzt.

D. Doppeltangenten.

18. Die Untersuchung über das Vorhandensein von Doppeltangenten einer planen Curve $C^4{}_8$ gibt nach den Plücker'schen Charakteren die Maximalzahl = 8. Diese lassen sich dreimal gruppieren: „Eine Gruppe umfasst ein Quadrupel Doppeltangenten, welche den Cayley'schen Doppelpunkt O (Fig. 5) gemeinsam als Centrum besitzen, während die Elemente der beiden anderen Gruppen

[1] „Geom. Unters. d. eb. Curven 4. O. etc.", II., Mitth. d. Situngsber. d. kais. Akad. d. Wissensch., LXXXVII Bd, I. Abth. 1883.

jedesmal in den Cayley'schen ZZ'-Punkten sich paarweise treffen." Hiebei findet in der ausgesprochenen Gruppierung die weitere gesetzmäßige Beziehung statt: „Jeder einzelne des Cayley'schen Punktentripels ist das Centrum einer Strahleninvolution, in welcher die durch ihn ziehenden Doppeltangenten Paare von conjugierten Elementen bilden."

Die Involution in O wird durch den Grundkegelschnitt k bedingt, so dass die durch O an diesen ziehenden Tangenten in den Punkten NN_1 (11) Doppelelemente dieser Involution sind. In der Involution Z sind hingegen das Geradenpaar oz' und in der Involution Z' das Geradenpaar oz die bezüglichen Asymptotenelemente.

19. Eine bemerkenswerte Beziehung findet zwischen den Doppeltangenten, welche durch die Cayley'schen Centra ZZ' gehen, statt: „Je zwei solche Tangenten treffen sich wechselseitig auf einer der Polaren aa' der Knotenpunkte AA' in Punkten α." In dieser Weise formieren nämlich ein Paar Doppeltangenten des einen der Cayley'schen Punkte ZZ' mit dem Polarenpaare aa' ein vollständiges Viereck $\alpha\alpha_1\alpha'\alpha'_1$, dessen Diagonaldreieck OZZ' ist.

Andererseits finden wir zwischen je einem Paare nicht conjugierter Doppeltangenten der Involution O in (18) und dem Doppeltangentenpaare eines der Z-Punkte eine analoge Beziehung, indem sie auch wieder die Seitenpaare eines vollständigen Vierecks bilden, dessen Diagonaldreieck identisch OZZ' ist. Darnach schneiden sich also die Verbindungslinien je eines Schnittpunktenpaares, welches aus je einem nicht conjugierten Tangentenpaare des Centrums O und einem Tangentenpaare eines der Z-Punkte erhalten wird, in dem bezüglich anderen Z-Punkte. (Man vergleiche die betreffenden Constructionen in den Fig. 5 u. 6.)

20. Jede Doppeltangente berührt bekanntlich die Plancurve $C^4{}_8$ in einem Punktenpaare BB'. Zwischen den Berührpunkten B besteht ein gesetzmäßiger Zusammenhang, der sich in folgender Form aussprechen lässt: (Fig. 6.)

„In der Involution O sind die wechselweisen Verbindungslinien von zwei Berührpunkten B eines Paares nicht conjugierter Doppeltangenten Elemente

einer der beiden Involutionen ZZ'. Hingegen sind die Verbindungslinien solcher Berührpunktenpaare, die auf jenen Doppeltangenten liegen, welche als conjugierte Elemente einer der ZZ'-Involutionen angehören, entweder Strahlen einer der anderen der beiden letzteren, oder sie sind Elemente der Strahleninvolution O."

Und andererseits geben wir das folgende Gesetz:

„Die Berührpunkte B der acht Doppeltangenten einer Plancurve C^4_8 lassen sich derartig paaren, dass sich die Verbindungslinien von je zwei Paaren auf den Seiten des Polarendreiseits ozz' der Cayley'schen Punkte OZZ', d. i. auf den Hesse'schen Geraden, in β-Punkten (Fig. 6) treffen und gleichzeitig Tangenten des Grundkegelschnittes k sind."

21. Es ist anzunehmen, dass die Realität der acht Doppeltangenten einer ebenen Curve C^4_8 einerseits mit der Lage und Realität des Cayley'schen Punktenpaares ZZ', andererseits mit der Position des Grundkegelschnittes k und der gegen diesen situierten Doppelpunkte AA' der Curve zusammenhängt, wovon ersichtlich wieder die Lage des Cayley'schen Doppelcentrums O ins Mitleid gezogen wird.

Nach dem Satze in (18) ist der Cayley'sche Doppelpunkt O das Centrum von einem Quadrupel Doppeltangenten, welche acht einfache Elemente involvieren, weshalb aus diesem Punkte vermöge der Classe der Curve C^4_8 keine weiteren Tangenten gehen können. Hingegen haben wir jeden der Cayley'schen Punkte ZZ' als Träger von nur einem Doppeltangentenpaare erkannt, woraus zu schließen ist, dass man vorkommendenfalls aus einem solchen Punkte wegen der Classenzahl der Plancurve noch vier einfache Tangenten an sie ziehen wird können. Die Berührpunkte δ dieser vier Tangenten sind offenbar nichts anderes, als die Schnittpunkte, welche die betreffende conjugierte Hesse'sche Polare zz' auf der Curve hervorbringt. Man hat also den Satz: „Von den ZZ'-Punkten ziehen an die Plancurve C^4_8 außer den Doppeltangentenpaare noch Tangentenquadrupel, deren Berührpunkte (reell oder paarweise imaginär) auf den zz'-Gerade liegen." Und weiters: „Die Verbindungslinien der

Elementenpaare sind Tangenten des Grundkegelschnittes und schneiden sich paarweise auf dem Hesse'schen Dreiseit *sos'*." (Fig. 15.)

E. Fundamentale Curvennetze des Grundkegelschnittes.

22. Man beurtheilt bekanntlich die Ordnung eines Curvenerzeugnisses nach der Anzahl der Schnittpunkte, welche eine beliebige Gerade der Ebene mit demselben gemeinschaftlich hat. Wir wissen bereits aus dem Vorangegangenen, dass eine Gerade der Ebene höchstens vier solche Punkte besitzen kann, und es wird somit nunmehr von Interesse sein, in welcher Weise dieselben gefunden werden können.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass zwischen den Punkten des Curvenerzeugnisses $C^4{}_8$ und dem Tangentensysteme des Grundkegelschnittes k eine Beziehung vorhanden ist, welche die vorstehenden Constructionen klar gestellt haben, die aber alleinig nicht ausreichen kann, um die besprochene Aufgabe einer allgemein giltigen Lösung zuzuführen. Denn nur in der Specialannahme, als die betreffende Gerade, deren Durchschnittspunkte mit der Plancurve zu ermitteln sind, eine „Grundkegelschnittstangente" ist, haben wir eine Ausführung der Aufgabe erkannt.

Es wird also unser Augenmerk darauf zu richten sein, die Beziehungen des Systems der gesammten Geraden in der Ebene des Curvenerzeugnisses mit dem System des Grundkegelschnittes k in einer anderen Weise in Zusammenhang zu bringen, wodurch das vorgesetzte Problem dem gewünschten Ziele zugeführt wird.

23. Jede Gerade g der Ebene einer Plancurve $C^4{}_8$ kann als Punktenträger betrachtet werden. Von einem beliebigen Punkte Y des Trägers g ziehen an den Grundkegelschnitt k ein Paar Tangenten (Fig. 7), welche auf der Geraden o jede für sich, wie wir annehmen wollen, ein Element X der X-Reihe in (2) herausschneiden. Nun involvieren aber nach (4) die coaxialen Reihen auf o eine Doppeldeutigkeit, sofern jedem Elemente X der X-Reihe ein bestimmtes ξ-Element der ξ-Reihe projectivisch ist; sobald aber der X-Punkt als Element ξ' der ξ-Reihe aufgefasst wird, entspricht ihm bekanntlich ein anderer Punkt X' der X-Reihe. Diese Doppeldeutigkeit manifestiert sich synthetisch folgend: Wird ein variabler X-Punkt aus dem Centrum S (z. B. nach der ersten Methode [2]) nach X_1 auf die Perspec-

tivitätsachse q, und von da wieder auf den o-Träger vermittelst des Centrums S nach ξ projiciert, so erhalten wir das entsprechende Punktenpaar $X\xi$. Projiciert man jedoch $X \equiv \xi'$ aus S' nach X_2 auf q und letzteren Punkt aus S nach X' auf o, so sind in diesem Sinne die Elemente des Paares XX' ebenfalls perspectivisch entsprechend.

Für die Plancurve C^4_8 als Erzeugnis der Beziehung in (6) ist die vorstehende Zweideutigkeit ohne Bedeutung, weil sich die Curve insofern als identisches Resultat herausstellt. Für das unmittelbar Folgende werde jedoch ein bestimmter Sinn in Bezug der beiden Projectionscentra SS' festgehalten.

24. Unter der letzteren Voraussetzung suchen wir zu dem Schnittpunkte X, welchen die eine der Tangenten (Fig. 7), die man aus dem Punkte Y der Geraden g an den Grundkegelschnitt k gezogen hat, auf dem o-Träger hervorbrachte, den entsprechenden ξ-Punkt in der vorhin angedeuteten Weise mittelst des Centrums S, welches Centrum nun unverändert in der nachfolgenden Construction in diesem Sinne in Action tritt. Die Kegelschnittspolaren $y x$ des Paares $Y\xi$ begreifen in ihrer Variabilität zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte, wie man sofort sieht, die Pole G, O des Trägerpaares g, o sind. — Diese Strahlenbüschel G, O sind zwei-zweideutig. Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, erinnere man sich zunächst, dass von dem Y-Punkte der Geraden g an den Grundkegelschnitt k noch eine zweite Tangente zieht, welche auf dem o-Träger einen Punkt Z hervorbringt, dem in gleicher Behandlung wie oben dem X-Punkte für das Centrum O ein Strahlenelement z als Polare des entsprechenden ζ-Punktes auf o zukommt, während die Polare y als Element des Büschels G identisch verbleibt. Hieraus folgt die Zweideutigkeit des Strah[illegible] O für jedes y-Element des Büschels G.

[illegible]sst sich aber von einem X-Punkte (resp. einem [illegible]uf o an den Grundkegelschnitt k noch eine zweite [illegible]ehen, welche die Gerade g in einem anderen Punkte [illegible] woraus man ohne Schwierigkeit zunächst erkennt, [illegible] Polaren x als Strahl des Büschels O außer dem [illegible]ente y noch die Polare y' des Y'-Punktes als zweites [illegible]t des Büschels G entsprechend ist, womit also [illegible]eutigkeit des letzteren evident ist.

25. „Die beiden zweideutigen Strahlenbüschel G, O erzeugen eine unicursale Curve vierter Ordnung vom Symbole $C^4{}_6$, in welcher der Pol G einen einfachen Doppelpunkt, der Pol O aber einen Berührknoten bilden."

Der Nachweis dieses Satzes veranlasst folgende Untersuchung. Dass vor allem das vorliegende Erzeugnis vierter Ordnung sein muss, ist eine bekannte Thatsache; es kann sich also wesentlich nur um die Festsetzung des Defectes, respective der Classe und die Art der Doppelelemente des Curvenerzeugnisses handeln.

Um zum Ziele zu gelangen, gehen wir von dem den zwei erzeugenden Büscheln OG gemeinsamen Strahle, d. i. die Verbindungslinie $|OG|$, aus. Derselbe ist offenbar nichts anderes, als die Polare w des Schnittpunktes W der beiden Trägergeraden og. Dieser W-Punkt drückt aber eine Coincidenz zwischen einem Elemente der X-Reihe auf o und einem Y-Elemente der g-Geraden aus, woraus geschlossen werden muss, dass das entsprechende x-Strahlenelement des Büschels O ebenfalls eine Coincidenz zum Ausdruck bringt. Bezeichnen wir dieses letztere als Gerade τ, so ist ersichtlich, dass diese Gerade zwei zusammenfallende Tangenten ausdrückt und dass somit der O-Pol wirklich als ein Knoten des Erzeugnisses angesehen werden muss, in dem sich zwei Curventheile in Contact befinden, d. h. er ist ein Berührknoten der Curve. Die Coincidenzknotentangente τ in O erhalten wir nach der Grundconstruction, wenn man den W-Punkt aus dem S-Centrum auf die q-Gerade nach W_1 und von da aus S' auf den o-Träger nach $\bar{\omega}$ projiciert. Die Polare von $\bar{\omega}$ bezüglich des Grundkegelschnittes ist die fragliche Gerade τ.

Um die Eigenschaft des Knotenpunktes G zu erfahren, unterwerfen wir die Verbindungslinie $|OG| \equiv w$ als Strahlenelement des O-Büschels der Construction. Nach (24) entsprechen demselben zwei Elemente $\gamma\gamma_1$ des Büschels G, welche ersichtlich Tangenten des Erzeugnisses sein müssen. Dieselben erhält man, wenn man den Punkt $(og) \equiv W$ jetzt aus dem Centrum S' auf den q-Träger nach W_2 und letzteren aus dem Centrum S wieder auf den o-Träger nach $\bar{\omega}'$ projiciert. Die aus dem Punkte $\bar{\omega}'$ an den Grundkegelschnitt möglichen Tangenten geben Berührungspunkte, deren Verbindungslinien mit dem G-Pole die zwei

Tangenten $\gamma\gamma_1$ dieses Punktes hervorbringen, wodurch dieser als einfacher Doppelpunkt des Curvenerzeugnisses vorkommt.

Das Vorstehende erweiset die Richtigkeit, dass das Curvenerzeugnis der zwei charakterisierten Büschel in den beiden Singularpunkten OG zusammen drei Doppelpunkte zählt, sofern bekanntlich der Berührknoten zwei Elemente dieser Art ausdrückt, weshalb die Curve unicursal vom Symbole C^4_6 ist.

26. Die erzeugte Hilfscurve C^4_6 zeigt zunächst die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie mit dem Grundkegelschnitte k die vier Berührpunkte $VV_1\,V'V'_1$, welche die aus den Doppelpunkten AA' an ihn gezogenen Tangenten als Hauptverzweigungen in (10) hervorbringen, gemeinschaftlich hat. Außer diesem Punktenquadrupel kann die Curve C^4_6 bekanntlich höchstens noch vier Punktenelemente mit dem Grundkegelschnitte gemeinsam haben. Unsere Fig. 7 zeigt hieher gehörig die Punkte 1 2 3 4 an, und wir kommen später auf deren Bedeutung zurück.

Der Vollständigkeit wegen besprechen wir vorerst noch die Construction der der Hilfscurve C^4_6 eigenthümlichen Verzweigungselemente. Die Tangenten, welche als Strahlen des Büschels G an den Grundkegelschnitt ziehen, berühren ihn selbstverständlich in den Schnittpunkten MM' der g-Geraden. Behandeln wir die X-Schnittpunkte dieser Tangenten mit dem o-Träger nach der Grundconstruction (6), so finden wir die Verzweigungspunkte $\mu\mu'$, in denen die Unicursalcurve C^4_6 von den aus dem Doppelpunkte G gezogenen, mit dem Grundkegelschnitte in MM' gemeinsamen Tangenten berührt wird.

Dahingegen berühren in dem Punktenpaare NN_1 die aus dem Centrum O an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangenten diesen. Wird analog die Grundconstruction auf das Punktenpaar NN_1 angewendet, indem man berücksichtigt, dass diese nun selbst X-Elemente auf dem o-Träger sind, so ergeben sich die Verzweigungspunkte $\nu\nu_1$, das sind diejenigen, in denen die Unicursalcurve C^4_6 aus den durch den Berührknoten O gezogenen Tangenten berührt wird, ohne dieselben etwa mit der in O vorkommenden Berührknotentangente τ (25) zu verwechseln.

27. Wenn eine Curve vierter Ordnung mit einem Kegelschnitte $4.2 = 8$ Punkte gemein hat, so enthalten die in (26) erwähnten Punktenquadrupel $VV_1\,V'V_1$, 1 2 3 4 die gesammten

Schnittelemente zwischen der Curve C^4_6 und dem Grundkegelschnitte k.

Jeder Punkt der Hilfscurve C^4_6 entspricht im Sinne der auseinander gesetzten Construction einem bestimmten Punktenelemente der Trägergeraden g, weshalb man gewissermaßen die Curve C^4_6 als eine Abbildung der g-Geraden ansehen kann. Da wir diese g-Gerade ganz beliebig in der Ebene vorausgesetzt haben, so entspricht jeder Geraden der Ebene, welche man sich als dem Systeme der Plancurve C^4_8 angehörig denken kann, im allgemeinen eine derartige Curve C^4_6 als Bild im Systeme des Grundkegelschnittes k:

Die gesammten Curven C^4_6 formieren ein Netz, welches fundamental vorhanden ist und in welchem die Elemente des Quadrupels $V V_1 V' V'_1$ als einfache, der O-Punkt aber als gemeinschaftliches Doppelelement die Basispunkte sind.

Die Beschränkung, welche nach (24) in Bezug der Verwendung des S-Centrums bei Erzeugung eines Individuums C^4_6 des vorstehend charakterisierten Curvennetzes in die Construction hineingelegt wurde, bedingt also zwischen den beiden Systemen der Plancurve C^4_8 und des Grundkegelschnitts sozusagen eine „biquadratische Beziehung (Verwandtschaft)".

28. Die Punkte des in (26) bezeichneten Quadrupels 1 2 3 4 lassen sich in Zusammenhang mit den zuletzt gewonnenen Resultaten ohne Schwierigkeit als die Bilder der Schnittpunkte I II III IV, welche die g-Gerade auf der Plancurve C^4_8 hervorbringt, deuten, und wir erhalten die Schnittpunkte einfachst mittelst der in den Punkten 1 2 3 4 gezogenen Grundkegelschnittstangenten.

Hält man sich die in (23) bemerkte Punktenreihe Y auf der g-Geraden vor Augen, so weiß man, dass eine aus einem Y-Elemente an den Grundkegelschnitt gezogene Tangente den O-Träger in einem X-Elemente trifft. Bestimmt man nach der Grundconstruction das betreffende ξ-Element, so ziehen von demselben zwei Tangenten an den Kegelschnitt k, welche auf dem g-Träger ein Punktenpaar $\eta\eta'$ ausschneiden, dessen Einzelelemente dem Y-Punkte zugeordnet sind. Ebenso entspricht aber einem η-Punkte außer dem Y-Punkte noch ein anderer Punkt Y' auf g, wie eine kurze Überlegung einsehen lässt, welch letzteren man erhält, wenn man aus dem ursprünglichen

X-Punkte des o-Trägers die zweitmögliche Tangente an den Grundkegelschnitt zieht und mit g verschneidet.

Das Resultat dieser Untersuchung ist, dass sich auf dem g-Träger zwei doppeldeutige Punktenreihen gestalten, deren Doppelelemente offenbar die vorhin bezeichneten Punkte I II III IV sind, weil in jedem dieser vier Punkte ein Y-Punkt mit dem einen seiner entsprechenden η-Punkte in Coincidenz kommt und umgekehrt.

29. Lässt man die Einschränkung, welche in (24) dem Centrum S ertheilt wurde, fallen, indem die gleiche Rolle selbstständig für das Centrum S' stattfindet, so erkennt man unschwer, dass der Geraden g in dem Fundamentalnetze (27) zum zweitenmal eine Unicursalcurve vierter Ordnung als Bild entspricht, welche wir unterschiedlich mit dem Symbole $C^4{}_6{}'$ bezeichnen. Diese Curve als Individuum des benannten Curvennetzes besitzt offenbar die gleichen Knotenpunkte $O\,G$, und zwar wie vorher, auch den O-Pol als Berührknoten und den G-Punkt als einfachen Doppelpunkt. Die oben gezeigten Constructionen der übrigen Singularitäten wiederholen sich mit den entsprechenden Modificationen. Außer dem Basisquadrupel $V\,V_1\,V'\,V'_1$ hat die letztere Curve mit dem Grundkegelschnitte höchstenfalls noch vier andere Punkte 1′2′3′4′ gemeinschaftlich, deren Tangenten des Grundkegelschnittes auf der g-Geraden identisch das obige Schnittpunktenquadrupe III III IV erzeugen.

Zwischen den Quadrupeln 1 2 3 4, 1′ 2′ 3′ 4′ besteht die Correspondenz, dass die Verbindungslinien der gleichbezifferten Punkte Strahlenelemente des Doppelpunktes G und als solche die Polaren der Punktengruppe I II III IV des g-Trägers in Bezug des Grundkegelschnittes sind.

Wir können also jetzt das mehrfach besprochene Curvennetz in seiner Vollständigkeit dahin definieren, dass wir sagen: „Die Individuen des Netzes ordnen sich in Paaren $C^4{}_6$ $C^4{}_6{}'$, deren jedes eine Gerade g der Plancurve $C^4{}_8$ abbildet.“

30. Die Ordnung der Netzindividuen erleidet eine Degeneration, sobald das betreffende Geradenbild g in der Plancurve $C^4{}_8$ eine Speciallage annimmt. Als eine solche müssen wir auch die Tangention der g-Geraden mit dem Grundkegelschnitt bezeichnen, was schon daraus hervorgeht, dass wir die Schnitt-

punkte einer deraitigen Tangente mit der Erzeugniscurve $C^4{}_3$ direct linear nach der Grundconstruction zu ermitteln imstande sind. Im nachfolgenden wollen wir die wichtigsten Speciallagen einer Geraden auf der Plancurve in Beziehung der entsprechenden Doppelabbildung im Fundamentalnetze des Grundkegelschnittes unserer Untersuchung anheimstellen, wobei sich ergeben wird, dass dieses Curvennetz wieder in Einzelnetze von Curvenpaaren zerfällt, deren Individuen bis zum Kegelschnitte herab degenerieren.

a) Die Grundkegelschnittstangente.

31. Um das Bild einer Tangente g des Grundkegelschnitts k kennen zu lernen, müssen zunächst die in (24) angeführten Strahlenbüschel $G\,O$ studiert werden. Zu diesem Behufe betrachten wir wieder die g-Gerade als Träger einer Punktenreihe Y. Eine aufmerksame Beobachtung zeigt, dass man nunmehr von einem beliebigen Y-Punkte bloß eine Tangente an den Grundkegelschnitt ziehen kann, weil sich die zweite mit der gegebenen g-Geraden identificiert. Dem X-Punkte dieser Tangente entspricht wie dort in Bezug des einen Centrums S ein $\mathfrak{x}$-Punkt auf dem Träger o, dessen Polare x als Element des erzeugenden Büschels O zugeordnet ist der Polaren y des Y-Punktes, welch letztere selbstverständlich ein Element des erzeugenden Strahlenbüschels G ist. Hiebei ist nicht außeracht zu lassen, dass der Punkt G (Fig. 8) als Pol der g-Tangente diesfalls der Berührungspunkt der letzteren mit dem Grundkegelschnitte ist.

Nun wissen wir aber weiters, dass von dem X-Punkte an den Grundkegelschnitt noch eine zweite Tangente möglich ist, welche die g-Gerade in einem Y'-Punkte trifft, so dass diesem letzteren die Polare y' als Strahl des G-Büschels zukommt. Die Strahlen $y\,y'$ entsprechen demnach gleichzeitig dem Strahle x, was uns die Büschel $G\,O$ in ein-zweideutiger Beziehung erscheinen lässt. Das Erzeugnis dieser Art ist bekanntlich eine Curve dritter Ordnung vom Symbole $C^3{}_4$, in welcher der Tangierungspunkt G, des zweideutigen Büschels Mittelpunkt, Knotenpunkt ist, während der Mittelpunkt O des eindeutigen Büschels als einfaches Punktenelement auftritt.

32. Verfolgt man die Grundconstruction des vorliegenden Falles für die gesammten Elemente der Y-Reihe auf dem

g-Träger, so stellt sich heraus, dass die Hauptverzweigungen $V V_1 V' V'_1$ der Plancurve C^4_8 dem gegenwärtigen Erzeugnisse C^3_4 angehören und nachdem dieses auch bei dem Pole O der Fall ist, so ergibt sich die Cubik C^3_4 als Individuum des Fundamentalnetzes (27).

Die Tangenten $\gamma\gamma_1$ des Doppelpunktes G werden so wie in (25) erhalten. Wir projicieren nämlich den gemeinschaftlichen Punkt $(go) \equiv W$ aus dem Centrum S' nach W_2 auf die q-Gerade und mittelst S den W_2-Punkt nach $\bar{\omega}'$ auf den o-Träger. Die Berührpunkte 1′ 2′ der aus $\bar{\omega}'$ an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangenten werden mit dem Doppelpunkte verbunden, wodurch sich das Paar $\gamma\gamma_1$ ergibt.

Auch die Construction der Tangente τ des O-Punktes erfährt keine wesentliche Veränderung, indem man nach (25) den W-Punkt aus dem Centrum S nach W_1 auf q und von da vermittelst S' auf o nach $\bar{\omega}$ projicirt, wo dann τ die Polare von $\bar{\omega}$ bezüglich des Grundkegelschnittes vorstellt. Man hat jetzt nur die einzige Modification, dass die Gerade τ für den O-Punkt eine einfache Tangente der Cubik bedeutet. Diese τ-Tangente hat übrigens ihren Tangentialpunkt T auf der Trägertangente g, wovon man sich leicht überzeugen kann. Hieraus folgt weiters, dass die Tangente g mit ihrem Bilde C^3_4 keinen anderen Punkt gemeinschaftlich haben kann, indem der Doppelpunkt G mit dem T-Punkte ein gerades Elemententripel constatieren. Schließlich kann man auch bemerken, dass der Tangentialpunkt T Pol der Verbindungslinie $| G\bar{\omega} |$ für den Grundkegelschnitt sein muss.

33. Eine Curve dritter Ordnung hat mit einem Kegelschnitte $3.2 = 6$ gemeinschaftliche Elemente. Der Grundkegelschnitt k (Fig. 8) enthält mit der erzeugten Cubik die vier Basispunkte V des Fundamentalnetzes (27) und außerdem den G-Punkt als Doppelelement, womit sämmtliche gemeinschaftlichen sechs Elemente consumiert werden. Wodurch werden aber dann die vier Schnittpunkte $I II I' II'$, welche die Grundkegelschnittstangente g als Secante der Plancurve C^4_8 mit der letzteren hervorbringt, abgebildet? Die Beantwortung dieser Frage erfolgt im Zusammenhange mit der Grundconstruction in (7) durch folgenden Satz: „Die Schnittpunkte 1 2 der τ-Tangente des O-Punktes, sowie die Schnittpunkte 1′2′ der beiden Doppelpunktstangenten $\gamma\gamma_1$ des G-Punktes mit dem Grundkegelschnitte bilden das Punkten-

quadrupel $I II I' II'$ ab, indem dieses letztere mittelst der in den Punkten $1\,2\,1'\,2'$ ziehenden Kegelschnittstangenten auf der g-Geraden resultiert.

34. Wir wissen nach (29), dass der Kegelschnittstangente g in Fig. 8 in dem Fundamentalnetze außer der erhaltenen Cubik C^3_4 noch ein zweites Individuum dieser Art $C^{3\prime}_4$ in Bezug des Centrums S' als Bild entspricht. Diese Curve $C^{3\prime}_4$ hat natürlich den G-Punkt ebenfalls als Knoten; allein, eine kurze Überlegung lässt uns finden, dass die Verbindungslinien $|\,1G\,|$, $|\,2G\,|$ diesmal die Knotentangenten sind, während die Polare $|\,1'2'\,| \equiv \tau'$ des auf o gefundenen $\tilde{\omega}'$-Punktes die Tangente der Cubik im Netzbasispunkte O sein muss. Identisch zeigt wieder das Punktenquadrupel $1\,2\,1'\,2'$ die Bilder der Schnitte $I\,II\,I'\,II'$ an.

b) Der Knotenstrahl.

35. Sei ein beliebiger Strahl g eines Doppelpunktes A der Plancurve C^4_8 in Fig. 9 angenommen, welcher Strahl wieder Träger einer Punktenreihe Y ist. Aus jedem Y-Elemente ziehen an den Grundkegelschnitt k ein Paar Tangenten, deren Schnittpunkte X auf der o-Geraden Elemente der X-Reihe sind. Die Construction wird nun für jede dieser zwei Tangenten nach (24) eingeleitet, wodurch für eine derselben ein Polarenpaar yx erhalten wird, dessen Elemente in den Polpunkten $G\,O$ zwei-zweideutige Büschel formieren. Die Strahlenbüschel $G\,O$ sind aber diesesmal in eigenthümlich reducierter Lage zweiter Ordnung,[1]) so dass ihre Mittelpunkte $G\,O$ nicht als Elemente dem von ihnen hervorgebrachten Erzeugnisse angehören, wodurch das letztere als Kegelschnitt K^2 degeneriert.

Man überzeugt sich gelegentlich der Vervollständigung der Punktenconstruction des Kegelschnittes K^2 leicht, dass dieser die Hauptverzweigungen (10) des anderen Doppelpunktes A', d. s. die Berührpunkte $V'\,V'_1$, welche mit den aus A' an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangenten stattfinden, in sich enthält. Außerdem kann der Kegelschnitt K^2 mit dem Grundkegelschnitte bekanntlich höchstens noch zwei gemeinschaftliche Punkte $1\;2$ besitzen. Da nach unseren vorhergegangenen Ableitungen der Kegelschnitt K^2 als Bild der Doppelpunktsgeraden g aufzufassen ist, so müssen folgerichtig die

---

[1]) E. Weyr: „Beiträge zur Curvenlehre“, S. 49.

Punkte 1 2 die Bilder der zwischen der Plancurve $C^4{}_8$ und dem Strahle g incidenten Schnittpunkte $I\,II$ ausmachen, und es erfolgen dieselben auf g durch die in 1 2 an den Grundkegelschnitt ziehenden Tangenten.

36. Conform unserer Betrachtung in (29) wird in Bezug des anderen Centrums S' dem Knotenstrahle g ein zweiter Kegelschnitt $K^{2\prime}$ bildlich entsprechen, der auch wieder die Hauptverzweigungen $V' V'_1$ enthält, den Grundkegelschnitt aber weiters in einem verschiedenen Punktenpaare 1′ 2′ durchsetzt, welche identisch mittelst der bezüglichen Grundkegelschnittstangenten die Schnittelemente $I\,II$ abbilden. Dass die Verbindungslinien | 1 1′ |, | 2 2′ | Strahlen des G-Büschels sein müssen, geht aus dem Früheren hervor.

Die beiden Systeme von Kegelschnittspaaren $K^2 K^{2\prime}$, die sich als Doppelbilder der Knotenstrahlen g des Doppelpunktes A manifestieren, bilden für diesen Doppelpunkt ein Kegelschnittsnetz mit den Basispunkten $V' V'_1$. Analog wird dem Doppelpunkte A' ein solches Kegelschnittsnetz mit den Basispunkten $V V_1$ zukommen und wir folgern daraus, dass zwischen den Knotenstrahlen der Doppelpunkte $A A'$ der Plancurve $C^4{}_8$ und dem Grundkegelschnitte k eine quadratische Verwandtschaft besteht. Es lässt sich also der Satz aussprechen:

„In einer Plancurve vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ entsprechen den Strahlen eines Doppelpunktes Individuenpaare eines Kegelschnittsnetzes, dessen Basispunkte die Hauptverzweigungen des anderen Doppelpunktes sind.“

37. In dem vorbezeichneten Kegelschnittsnetze eines Doppelpunktes der Plancurve $C^4{}_8$ kommen Singularitäten vor, welche den Curventangenten entsprechen, die als Strahlen dem betreffenden Doppelpunkte eigen sind. Solcher gibt es drei Gattungen, die wir nachstehend einzeln besprechen wollen.

38. α) Die Hauptverzweigungstangente. Ihr entsprechen in dem Kegelschnittsnetze $V V_1$ ein Paar Individuen, welche identisch den Grundkegelschnitt k (Fig. 10) in dem bezüglichen Verzweigungspunkte V' einfach berühren, sofern der letztere dem Doppelpunkte A' seine Entstehung vermittelst der Tangente g verdankt. Man bemerkt hiebei abweichend

diesen V'-Punkt als Büschelscheitel, durch welchen die beiden Individuen $K^2 K^{2\prime}$, gleichzeitig die g-Gerade berührend, ziehen.

39. β) Die begleitende Verzweigungstangente. Sie bildet sich im Netze als ein Paar von Kegelschnitten $K^2 K^{2\prime}$ ab, wovon jeder mit dem Grundkegelschnitte k (Fig. 11) außer den beiden Netzbasispunkten $V' V'_1$ noch einen Punkt f gemein hat, in welchem er diesen einfach berührt. Dieser Berührpunkt f ist das Bild des betreffenden φ-Verzweigungspunktes der Art in (12), den man durch die in jenem Berührpunkte gezogene Grundkegelschnittstangente auf der Polaren a' des anderen Knotenpunktes A' der Plancurve erhält.

40. γ) Die Knotentangente. Das Kegelschnittsnetz eines Knotenpunktes A der Plancurve C^4_8 weist zwei Paare von Individuen auf, deren jedes einer der beiden Knotentangenten bildlich zugeordnet erscheint. Ein Kegelschnitt K^2 eines solchen Paares, welcher also einseitig das Bild einer Tangente g der Curve in dem einen Doppelpunkte A ist, durchsetzt den Grundkegelschnitt k in vier Punkten. Zwei davon werden durch die Netzbasispunkte, d. s. die Hauptverzweigungen $V' V'_1$ des anderen Doppelpunktes (36), consumiert; ein dritter Punkt ist das eine Hauptverzweigungselement V desjenigen Doppelpunktes, in welchem die gegebene Knotentangente g (Fig. 12) vorausgesetzt wurde. Der vierte gemeinschaftliche Punkt τ ist aber nichts anderes als das Bild des Tangentialpunktes T der bezüglichen Knotentangente, welchen selbst man somit als Schnitt der letzteren mit derjenigen Grundkegelschnittstangente erzielt, die in dem gedachten vierten Durchsetzungspunkte τ möglich ist. Dass auch das zweite Kegelschnittsindividuum $K^{2\prime}$ des obigen Paares das zuletzt erhaltene Resultat identisch gibt, ist selbstverständlich, und ebenso wird eingesehen, dass dasselbe als dritten Punkt mit dem Grundkegelschnitte den anderen Hauptverzweigungspunkt V_1 desjenigen Doppelpunktes enthalten wird, durch welchen die Knotentangente g angenommen wurde. Die bezügliche Gerade $|\tau\tau_1|$ ist ein Strahl von G.

c) Die Asymptotenelemente.

41. Unter den Geraden der Ebene einer Curve C^4_8 nimmt die unendlich ferne Gerade $g\infty$ eine bekanntlich deshalb ausgezeichnete Rolle ein, weil durch sie die Asymptotenelemente der Curve fixiert sind. Indem wir zu dem Fundamentalnetze (27)

44. γ) Die Inflexion. Weil bekanntlich eine Wendetangente g einer Plancurve vierter Ordnung drei Elemente zur Coincidenz bringt, so wird das Bild einer derartigen Geraden ein Curvenpaar $C^4{}_6$ im Fundamentalnetze (29) repräsentieren müssen, von welchem jedes Individuum den Grundkegelschnitt in einem Punkte 1 osculiert und in einem zweiten Punkte 2 einfach durchsetzt. Der erstere ist offenbar das Bild des Inflexionspunktes I, während der letztere das Bild des Tangentialpunktes II der Wendetangente g vorstellt.

F. Bestandtheile und Formen der Plancurve $C^4{}_8$.

45. Dass eine ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten nur zweitheilig sein kann, ist bekannt.[1]) Man begreift jedoch, dass die Art und der Verlauf, wodurch die Formation der beiden Bestandtheile hervorgeht, wesentlich mit dem Vorkommen der unendlich fernen Elemente der Curve zusammenhängt. Hält man sich aber die Erzeugung einer Plancurve $C^4{}_8$, wie sie eingangs dieser Schrift durch zweideutige Tangentensysteme vorausgesetzt wurde, vor Augen, so wird eingesehen, dass auch der Verlauf der zugrunde gelegten projectivischen Punktenreihen auf einem o-Träger, welcher die zwei Doppelpunkte der Plancurve incident hat, von wesentlicher Einflussnahme für die Formung und Gestaltung der letzteren, respective ihrer Bestandtheile, sein muss, was jedoch ersichtlich wieder auf die Asymptotenelemente zurückführt.

Aus (41) wissen wir, dass auf einer Plancurve $C^4{}_8$ höchstens vier unendlich ferne Punkte vorkommen können, die selbstverständlich paarweise reell oder imaginär sind. Es kann nun ein Bestandtheil der Curve so beschaffen sein, dass er die gesammten Asymptotenelemente reell besitzt, in welchem Falle er dann aus zwei Ästen nothwendig zusammengesetzt sein muss, die sich in den beiden Doppelpunkten verknoten; offenbar ist der zweite Bestandtheil der Curve bei dieser Voraussetzung in sich geschlossen ein Oval. Würde aber die Verknotung nur in einem der Doppelpunkte stattfinden für denjenigen Bestandtheil, der die vier Asymptotenelemente enthält, so kann der zweite, obgleich in sich geschlossen, im anderen Doppelpunkte

[1]) Salmon-Fiedler: „Analyt. Geom. d. höh. Curv. etc.", p. 270.

e[illegible] notung ebenfalls eingehen, ohne dass er ein Oval da[illegible]

[illegible]ererseits ist nicht ausgeschlossen, dass jeder Bestandth[illegible] Plancurve für sich ein Paar Asymptotenelemente absor[illegible] und als Curvenzug einem der Knotenpunkte zugetheilt ist. [illegible]esondere wird es auch möglich sein, dass beide Bestandth[illegible]e gemeinschaftlich sich in den Doppelpunkten verknoten und zusammen nur ein einziges Paar Asymptoten reell aufweisen, während das andere imaginär ist; oder dass beide Bestandtheile durchwegs imaginäre Asymptoten haben und jeder in sich geschlossen einen C[illegible] anzeigt, der sich jedesmal in einem Doppelpunkte verk[illegible] [illegible]c. etc.

46. Prägnant wird die Art des Verlaufes einer Curve $C^4{}_8$ durch die Lage des Grundkegelschnittes k gegenüber der Verbindungslinie der Doppelpunkte: $| A A' | \equiv o$ ausgedrückt, weil hiedurch die Art dieser Doppelpunkte selbst bedingt erscheint. Im allgemeinen gilt diesbezüglich als Norm: „Ein A-Punkt ist für die Plancurve $C^4{}_8$ ein eigentlicher Knoten oder ein isolierter Punkt (Einsiedler), je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Grundkegelschnittes, im zweiten Falle auch auf dem letzteren, situiert ist.“[1])

Das vorstehende Gesetz bedingt κατ' ἐξοχήν die Formbildung unseres Erzeugnisses, wodurch eine Reihe von Typen entstehen, deren wichtigste Charaktere im folgenden besprochen werden sollen.

47. Typus I. (Fig. 13.) Der o-Träger trifft den Grundkegelschnitt k in imaginären Punkten. Die zwei Curvenbestandtheile bestehen jeder aus zwei Ästen, wovon der eine sich in einem der eigentlichen Doppelpunkte A verknotet. Die vier Curvenäste berühren den Grundkegelschnitt in den Hauptverzweigungen $V V_1 V' V'_1$ (10) reell. Die zwei Äste eines Bestandtheiles der Plancurve $C^4{}_8$ vereinigen sich in zwei Asymptotenelementen, so dass die Curve vier reelle Asymptoten besitzt, somit keinen im Endlichen abgeschlossenen Zug aufweist.

Die vier begleitenden Verzweigungen $\varphi \varphi_1 \varphi' \varphi'_1$ (12) sind sämmtlich reell und mit den Hauptverzweigungen $V V_1 V' V'_1$ nach dem „classischen Gesetze“ in (12) auf den Polaren $a a'$ der Doppelpunkte $A A'$ situiert; die Nebenverzweigungen (11) sind insgesammt imaginär.

[1]) Ameseder: „Geom. Untersuch. etc.“, II., p. 76.

Die Plancurve $C^4{}_8$ zeigt die acht Doppeltangenten des Cayley'schen Punktentripels OZZ' nach unseren Entwicklungen in (18—20).

48. Typus II. (Fig. 14.) Der Grundkegelschnitt k wird von dem Doppelpunktenträger o nicht geschnitten. Die Doppelpunkte AA' der Plancurve $C^4{}_8$ sind eigentliche Elemente, in welchen sich der eine Bestandtheil derselben beidemal verknotet. Dieser Bestandtheil setzt sich aus zwei Ästen zusammen, die das einzige reelle Asymptotenpaar der Curve enthalten; das zweite Asymptotenpaar ist imaginär.

Von den Verzweigungsgattungen sind die Nebenverzweigungen (12) imaginär, wogegen die übrigen reell vorhanden sind. Die begleitenden φ (11) befinden sich auf dem einen Aste des ersten Bestandtheiles der Curve, während die Hauptverzweigungen V ausschließlich dem zweiten Bestandtheile angehören. Dieser letztere ist ein Oval (45), welches somit die allgemeine Eigenschaft (10) vertritt, dass der Grundkegelschnitt die Plancurve viermal berührt.

Die Curve besitzt keine eigentlichen Doppeltangenten. Infolge dessen kann man (21) aus jedem der Cayley'schen Punkte ZZ' vier Tangenten an dieselben ziehen, deren Berührpunkte δ auf dem Hesse'schen Geradenpaare zz' liegen. Die Verbindungslinien von Paaren dieser acht Berührpunkte sind Tangenten des Grundkegelschnittes. (Die Construction von Punkten der vorliegenden Curventype ist nach der „zweiten Methode" in (3) mittelst des Hilfskreises $\varkappa$ in der Figur durchgeführt, wobei der o-Träger als Perspectivitätsachse q der Strahlenbüschel SS' in Coincidenz gedacht wurde, wie in Fig. 2.)

49. Typus III. (Fig. 5.) Die o-Gerade schneidet den Grundkegelschnitt k in reellen Punkten NN' derart, dass die beiden Doppelpunkte AA' in Bezug desselben einseitig außerhalb liegen.

Dieser Fall zeigt uns alle Gattungen der Verzweigungs- sowie die vier Asymptotenelemente des Curvenerzeugnisses $C^4{}_8$ reell an. Die zwei Bestandtheile der Curve charakterisieren sich folgendermaßen: Der eine ist ein in sich endlich geschlossener Zug und verknotet sich in einem Doppelpunkte A; ihm gehört ein Paar der Hauptverzweigungen an. Der zweite Bestandtheil besteht aus vier Ästen, die sich in den vier Asymptotenpunkten

ver[illegible]n; das eine Astpaar verknotet sich in dem zweiten Do[illegible]unkte A', während das andere Astepaar den Grundkegelschnitt in den restlichen zwei Hauptverzweigungen berührt. Die acht Doppeltangenten sind reell mit eigentlichen Berührpunkten vorhanden. Weil die Hesse'schen Geraden zz' die Curve nicht treffen, so kann man aus den Cayley'schen Punkten ZZ' außer den Doppeltangentenpaaren in (18) keine weiteren Tangenten an dieselbe ziehen (21).

50. Typus IV. (Fig. 15.) Die Annahme der Doppelpunkte AA' und ihrer Verbindungslinie o gegenüber dem Grundkegelschnitte k ist analog derjenigen in (49). Wir bemerken jedoch ein verschiedenes Resultat im Verlaufe des betreffenden Curvenerzeugnisses, welches durch die abweichende Situation der Centra SS' und der damit zusammenhängenden projectivischen Punktenreihen, die a priori auf dem Träger o vorausgesetzt sind, bedingt ist, wie in (45) bemerkt wurde. Die zwei Curvenbestandtheile zerfallen in zwei Paare von Ästen; das eine Paar verknotet sich gemeinsam in den Doppelpunkten AA' und enthält die vier Hauptverzweigungen $V V_1 V' V'_1$ am Grundkegelschnitte; demselben kommt auch ein Quadrupel Nebenverzweigungen v zugute. Das zweite Ästepaar des anderen Bestandtheiles enthält die gesammten begleitenden, sowie das restliche Paar Nebenverzweigungen v. Jeder Bestandtheil der Plancurve C^4_8 aber repräsentiert ein Paar der vier reellen Asymptotenelemente.

Dieser Curventypus hat keine Doppeltangenten. Weil aber das Hesse'sche Polarenpaar zz' die Plancurve in reellen Punktenquadrupeln trifft, so sind (21) aus jedem Caylay'schen Punkte ZZ' vier Tangenten an jene möglich. Die Verbindungslinien von Paaren dieser Quadrupelelemente sind wieder Tangenten des Grundkegelschnittes k, wie aus der Fig. 15 eingesehen werden kann.

51. Typus V. (Fig. 6.) Die Verbindungslinie der Doppelpunkte AA' trifft den Grundkegelschnitt k in reellen Punkten NN_1; jene liegen jedoch wechselseitig in Bezug des Grundkegelschnittes und dieser ist, wie bisher, als Ellipse (Kreis) vorausgesetzt.

Die Plancurve C^4_8 besteht aus zwei vollständig im Endlichen in sich geschlossenen Theilen, die, ohne Ovalen zu bilden, jeder für sich in einem der Doppelpunkte eine Verknotung for-

mieren. Das Erzeugnis hat demnach durchwegs imaginäre Asymptotenelemente. Dahingegen sind alle drei Verzweigungsgattungen vollständig reell und ein Gleiches ist bei den acht Doppeltangenten in der Gruppierung nach (18) der Fall. Insbesondere haben wir auch das Gesetz (20), dass die Berührpunkte B der Doppeltangenten in paarweiser Verbindung Linien anzeigen, welche sich in β-Punkten auf den Seiten des Polarendreiecks OZZ' schneiden und gleichzeitig Grundkegelschnittstangenten sind, in der Figur dargestellt.

52. Typus VI. Bei sonst gleichen Abnahmen, wie in (51), sei der Grundkegelschnitt k als Hyperbel gedacht.

Die Plancurve $C^4{}_8$ dieser Annahme ist dem Typus I. in (47) in ihrem Verlaufe analog, wie man sich leicht überzeugen kann. Jeder Curventheil besteht nämlich aus zwei Ästen, die von den vier reellen Asymptoten ein Paar absorbieren; der eine Ast davon verknotet sich in einem der Doppelpunkte AA'. Zum Unterschiede von Typus I. enthält Typus VI. die sämmtlichen Elemente aller drei Verzweigungsgattungen reell. Die acht Doppeltangenten des Cayley'schen Punktentripels OZZ' sind wie in Fig. 13 reell mit eigentlichen Berührpunkten.

53. Typus VII. Die Annahmen sind wieder, wie in (51) nur abweichend die Situation der SS'-Centra gegenüber der Perspectivitätsachse q, was man aus Fig. 16 bemerken kann.

Man bekommt als Bestandtheile von $C^4{}_8$ zwei continuierliche Curvenzüge, die sich gegenseitig in den Doppelpunkten AA' verknoten. Jeder Curventheil zielt identisch nach den zwei reellen Asymptotenpunkten, indem das andere Punktenpaar dieser Art imaginär ist.

Die Hauptverzweigungen V sind alle vier reell, weshalb der Grundkegelschnitt k die Plancurve viermal berührt; hingegen erscheinen begleitende Verzweigungen imaginär. Von den Nebenverzweigungen gibt es auf jeder in den N-Punkten gehenden Grundkegelschnittstangente nur ein reelles Paar. Die betrachtete Curventype hat keine Doppeltangenten. Die Hesseschen Polaren zz' treffen die Curve ebenfalls nur in je einem einzigen Punktenpaare, weshalb man (21) aus den zwei Cayleyschen Punkten ZZ' jedesmal auch nur ein einziges Tangentenpaar an die Plancurve ziehen kann.

54. Als Übergangsfall muss die Annahme gelten, wenn die AA'-Punkte auf dem Grundkegelschnitte k selbst (Fig. 17) in Position kommen. Das Curvenerzeugnis zerfällt dann in **zwei** sich und den Grundkegelschnitt in den AA'-Punkten doppelt berührende Kegelschnitte $C^2C^{2\prime}$, wobei die o-Gerade die Berührungssehne und der O-Punkt den Berührungspol bilden.

Die Richtigkeit dessen geht daraus hervor, dass es (10) evident ist: „Kein Punkt des Erzeugnisses kann vermöge der Grundconstruction innerhalb des Grundkegelschnittes (6) liegen." Wenn nun die AA'-Punkte eigentliche Doppelelemente des Erzeugnisses der Beziehung sein sollen, wie dies a priori vorausgesetzt ist, so begreift es sich ohne Schwierigkeit, dass in diesen Punkten, weil gleichzeitig dieselben zwei reelle Nebenverzweigungselemente (11) coincidierend angeben, ein Contact von den beiden Bestandtheilen des Curvenerzeugnisses stattfinden muss, was aber wieder mit Rücksicht darauf, dass eine Curve vierter Ordnung bekanntlich nicht mehr als einen Berührknoten enthalten kann, die Berechtigung der obigen Behauptung zum Erfolge hat.

55. Typus VIII. (Fig. 18.) Die Doppelpunkte AA' liegen gleichzeitig innerhalb des Grundkegelschnittes k.

Wir wissen aus (46), dass diesfalls die AA'-Elemente isolierte Punkte (Einsiedler) des Curvenerzeugnisses C^4_8 sind. Daraus folgt aber sofort, dass die Hauptverzweigungen (10) imaginär werden, was sagen will: Der Grundkegelschnitt wird von der Curve nicht berührt. Diese besteht, wie die Type VII, aus zwei continuierlich verlaufenden Zügen, deren jeder wieder das einzige Paar reeller Asymptotenelemente incident hat, indem das andere Paar imaginär ist. Ganz analog unterscheiden wir nur je ein reelles Nebenverzweigungspaar vv_1 (11) auf den Tangenten der N-Punkte des Grundkegelschnittes; hingegen sind die begleitenden Verzweigungen φ (12) auf den Polaren aa' reell mit den betreffenden Hauptverzweigungen V nach dem classischen Gesetze vorhanden.

Von den Doppeltangenten gibt es nur zwei Paare der Cayley'schen Punkte ZZ'; das Quadrupel des Cayley'schen Doppelpunktes O ist imaginär. Weil aber die Hesse'schen Polaren zz' die Curve in reellen Punktenpaaren treffen, so kann

man aus den Punkten ZZ' außerdem noch je ein Tangentenpaar (21) an diese ziehen.

56. Typus IX. (Fig. 19.) Die AA'-Punkte liegen abwechselnd außer- und innerhalb des Grundkegelschnittes k.

Schon oben ist gesagt, dass der im Innern des Grundkegelschnittes gelegene Doppelpunkt A' ein Einsiedler sein muss. Von den beiden Curventheilen ist der eine imaginär; der zweite besteht aus vier Ästen, wovon sich ein Paar in dem eigentlichen Doppelpunkte A verknotet, während das andere Ästepaar die zwei einzigen reellen Hauptverzweigungen VV_1 enthält, in denen es den Grundkegelschnitt berührt. Dieses letztere Ästepaar besitzt auch das einzige Paar begleitender Verzweigungen $\varphi'\varphi'_1$, welche durch die Curventangenten aus dem isolierten Doppelpunkte A' hervorgehen und nach dem classischen Gesetze (12) mit den Elementen VV_1 auf der Polaren a liegen.

Jeder der vier Curvenäste besitzt ein Paar der vier reell vorkommenden Asymptotenelemente. Von den Nebenverzweigungen ν ist nur das Quadrupel auf der einen Tangente eines N-Punktes am Grundkegelschnitte reell. Infolge dessen werden auch die Cayley'schen Punkte ZZ' und ihre Hesse'schen Polaren zz' imaginär, weshalb man nur aus dem O-Pole und zwar bloß ein Paar Doppeltangenten an die Plancurve $C^4{}_8$ ziehen kann (18).

Mit Berufung auf (20) findet zwischen den vier Berührpunkten B der zwei reellen Doppeltangenten nachstehende Beziehung statt. Betrachten wir sie als vollständiges Viereck, dessen eines Seitenpaar die beiden Doppeltangenten sind, so sind dessen zwei andere Seitenpaare Tangenten des Grundkegelschnittes k und zwei Diagonalpunkte $\beta\beta'$ liegen auf dem o-Träger, während der dritte Diagonalpunkt der O-Pol ist.

Jene zwei den Grundkegelschnitt k tangierenden Seitenpaare des vollständigen Vierecks B berühren ihn in Punkten, von denen wir behaupten, dass ihre Verbindungslinien paarweise den o-Träger in einem Punktenpaare treffen, dessen Elemente conjugierte Pole der Involution O in (20) sind und nichts anderes vorstellen als diejenigen Schnittpunkte, welche das reelle Doppeltangentenpaar auf der Geraden o erzeugt.

57. Typus X. Die Annahme bezüglich der Doppelpunkte AA' bleibe dieselbe wie in (56): die Situation der SS'-Centra

gegenüber der q-Achse in Fig. 20 ist jedoch eine wesentlich andere.

Man sieht auf den ersten Blick, dass das Curvenerzeugnis C^4_8 wieder aus zwei Theilen besteht, die sich in dem eigentlichen Doppelpunkte gegenseitig durchsetzen, einen continuierlichen Lauf zeigen und den Grundkegelschnitt k in je einem Hauptverzweigungselemente VV_1 berühren.

Jeder Theil enthält das eine der zwei reellen Asymptotenelemente; das andere Asymptotenpaar ist imaginär. Von den begleitenden Verzweigungen ist das Paar $\varphi\varphi_1$ auf der Polaren a' des isolierten Doppelpunktes A' reell; der Knoten A' besitzt keine derartigen Verzweigungen.

Von den Nebenverzweigungen ν ist auf jeder N-Tangente ein Paar reell vorhanden, weshalb auch die Cayley'schen Punkte ZZ' (14) bestimmbar sind. Es sind aber nur von dem einen Z'-Punkte ein Paar Tangenten an die Erzeugniscurve möglich. Doppeltangenten besitzt dieser Curventypus nicht.

58. Typus XI. Vorausgesetzt ist abermals eine derjenigen in (56) analoge Annahme der Doppelpunkte AA' in Fig. 21.

Wir erhalten nur ein reelles Theilerzeugnis der Plancurve C^4_8 als ein im Endlichen abgeschlossenes Gebilde, das keine Asymptotenelemente besitzt und sich im eigentlichen Doppelpunkte A verknotet. Dasselbe berührt demnach den Grundkegelschnitt in den zwei einzigen Hauptverzweigungen VV_1, aus welcher Ursache auch nur die zwei reellen begleitenden Verzweigungen $\varphi'\varphi'_1$ des Einsiedlers A' auf der Polaren a nachgewiesen werden.

Die ZZ'-Punkte sind wie bei Typus IX in (56) nicht vorhanden und bloß aus dem Cayley'schen Doppelpunkte O gehen an die Plancurve C^4_8 ein Paar Doppeltangenten. Die Berührpunkte B der letzteren sprechen dieselben Beziehungen aus, wie solche in (56) angemerkt wurden, was man leicht aus Fig. 21 einsehen kann. Von Nebenverzweigungen ν ist nur ein Quadrupel reell.

59. Zunächst reiht sich unserer Betrachtung der Fall an: „Der eine A-Punkt liegt auf dem Grundkegelschnitte k selbst, indessen der andere Punkt A' entweder a) außerhalb oder b) innerhalb des Grundkegelschnittes liegt.“

Das Resultat des betreffenden Curvenortes nach unserer Grundconstruction ist insofern überraschend und von Interesse,

als zwar das Erzeugnis in Bezug der Ordnung constant als eine Curve vierter Ordnung erscheint, dessen Classe jedoch um zwei Einheiten sich vermindert, so dass man eine Unicursalcurve vom Symbole C^4_6 erhält. Dabei charakterisiert sich der auf dem Grundkegelschnitte angenommene A-Punkt als Berührknoten,[1]) in welchem bekanntlich zwei Curvenzüge Contact haben und die gemeinschaftliche Tangente dieses Singularpunktes ist, wie leicht erkannt wird, gleichzeitig Grundkegelschnittstangente.

60. Fall a) (Fig. 22). Der A'-Punkt ist ein eigentlicher Knoten, von welchem an die Unicursalcurve C^4_6 ein Paar Verzweigungstangenten ziehen, in deren Berührpunkten $V' V'_1$ (Hauptverzweigungen [10]) unter Einem eine Tangention mit dem Grundkegelschnitte stattfindet. Weil der letztere im Berührknoten A a priori mit dem Erzeugnisse C^4_6 eine zweipunktige Berührung eingeht, so ist klar, dass er für dasselbe als viermal berührender Kegelschnitt aufzufassen ist.

Nebenverzweigungen ν im Sinne unserer Definition (11) gibt es nur ein reelles Paar auf der einen N-Punkttangente; ein zweites solches Paar vereinigt der Berührknoten A, weshalb ja auch dadurch dessen höhere Singularität, wie schon in (54) angezogen wurde, bedingt wird.

61. Fall b) (Fig. 23). Der A'-Punkt ist Einsiedler. Vom Berührknoten A gehen an die Unicursalcurve C^4_6 ein Paar Tangenten, deren Berührpunkte $\varphi \varphi_1$ (in unserem Sinne begleitende Verzweigungen [12]) auf der Kegelschnittspolaren a' des Einsiedlers vorhanden sind und für die Curve Verzweigungselemente sind. Nachdem die Verzweigungselemente des isolierten Punktes A' imaginär sind, ist der Grundkegelschnitt k ein die Curve C^4_6 bloß im A-Knoten zweimal berührender Kegelschnitt, und es ist ferner wieder die daselbst vorkommende Tangente dieses Kegelschnittes die bezügliche Knotentangente wie im Falle a). Ebenso kommen auf der Tangente des N-Punktes nur zwei reelle Nebenverzweigungen $\nu \nu_1$ vor; ein anderes derartiges Elementenpaar coincidiert im Berührknoten A.

62. Zum Schlusse untersuchen wir den Specialfall: „wo der o-Träger von dem Grundkegelschnitte k in einem Punkte K tangiert wird“.

---

[1]) Salmon-Fiedler: „Analyt. Geom. d. höh. Plancurv. etc.“, p. 29.

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass die Beziehung der erzeugenden, auf dem Grundkegelschnitt k confocal gedachten Tangentensysteme (S) eine projectivische ist, deren Resultat ein Kegelschnitt C^2 sein muss. Dieser wird offenbar den Grundkegelschnitt doppelt berühren, und zwar in jenen Y-Punkten, die man aus den beiden AA'-Punkten an den ersteren durch die bezüglichen Tangenten erhält. Bringt man das Grundconstructions-Gesetz in seinem Doppelsinne SS' für den X-Punkt zur Anwendung, so findet man unmittelbar auf dem σ-Träger zwei Punkte, welche dieser letztere mit dem Erzeugnisse C^2 gemeinsam haben kann, und die man im Sinne unserer Definition in 11) als Nebenverzweigungen ansehen könnte. Analog wird man auf dem Polarenpaare $\sigma\sigma'$, das durch die AA'-Punkte bezugs des Grundkegelschnittes bedingt ist, noch Punkte des Kegelschnittes C^2 nachweisen können, welche den sogenannten Verzweigungen 12) conform sind, und in welchen sich aus den AA'-Punkten Tangenten an C^2 ziehen etc.

63. Wir haben a. a. O.[1] gezeigt, dass die Tangentialpunktenpaare einer Unicursalcurve C^4_3, die nach einer Steiner'schen Verwandtschaft auf einem Kegelschnitte abgebildet werden, daselbst ein symmetrisches System vierten Grades ausmachen, dessen Directionscurve im allgemeinen vom Symbole: D^6_4 ist, und dass diese letztere die Inflexionselemente der Curve C^4_6 anzeigt. Man könnte einen analogen Vorgang bei den Plancurven C^4_6 beobachten, wodurch man zu ähnlichen Resultaten gelangen müsste. Allerdings ist ersichtlich dabei eine quadratische Beziehung ausgeschlossen. Die einzuschlagende Methode würde Aufschluss über die zwölf Inflexionen, welche nach den Plücker'schen Charakteren unserem Erzeugnisse (als Typus IV der Salmon-Fiedler'schen Zusammenstellung: Analyt. Geom. d. höh. Plancurv. etc. S. 261) ankommen, geben.

An dieser Stelle sei darüber nur das folgende erwähnt. Oben ist gesagt worden (13), dass man von einem beliebigen Punkte einer Plancurve C^4_6 im Allgemeinen sechs Tangenten an dieselbe ziehen kann, wobei die in diesem Punkte mögliche Tangente nicht mitgezählt ist. Man kann aber diese Tangente zu den erwähnten sechs Tangenten in Beziehung bringen, und dann wird der betrachtete variable Curvenpunkt mit den Be-

[1] Zeitschrift f. Mathem. u. Phys. XXXIV. 3. Heft, p. 172.

rührpunkten der aus ihm an die Curve gehenden sechs Tangenten eine Beziehung bilden, weclhe in beiden Fällen für die gleichartigen Curvenelemente sechsdeutig ist. Nun enthält aber jede Curventangente, wie wir gesehen haben, zwei Tangentialpunkte, deren Tangenten man ebenfalls der ersteren zuweisen kann, und in gleicher Weise kann man den Berührpunkt jener Curventangente ihrem Tangentialpunktenpaare entsprechend anordnen, was aber ersichtlich die Gesammtheit der gleichartigen Curvenelemente diesfalls in zweideutiger Beziehung erscheinen lässt. Diese Betrachtung constatiert zwischen den Elementen einer Plancurve $C^4{}_8$ eine zwei-sechsdeutige Beziehung. Denkt man sich dieselbe nun conlocal auf den Grundkegelschnitt abgebildet, so entstehen zwei Systeme, deren Directionscurve [1]) (als Ortscurve) von der Ordnung: $6 + 2 = 8$ ist, welche mit dem Grundkegelschnitt k acht gemeinschaftliche Berührungspunkte besitzt. Diese sind ersichtlich die Bilder der auf der Plancurve reell vorkommenden Inflexionselemente.

Die Richtigkeit des vorstehenden Ergebnisses kann nicht angezweifelt werden, obgleich es nicht mit der Plücker'schen Angabe von 12 Inflexionen stimmt. Wir verweisen jedoch diesbezüglich auf Salmon,[2]) welcher ebenfalls angibt, „dass ihm kein Beispiel einer Curve vierter Ordnung mit mehr als acht reellen Inflexionspunkten bekannt ist". Man muss annehmen, dass bei einer Plancurve $C^4{}_8$ a priori vier Inflexionselemente imaginär sind, sofern die Plücker'sche Regel überhaupt Geltung haben soll.

Zu gleichen Resultaten gelangt man, wenn die auf dem Grundkegelschnitte conlocalen zwei-sechsdeutigen Punktensysteme durch Strahlenbüschel SS', deren Centra auf diesem Kegelschnitte beliebig wo angenommen sind, verbunden werden.[3]) Deren Erzeugnis ist wieder eine Curve $(6 + 2) = 8$. Ordnung, welche den Scheitel S des zweideutigen Büschels zum Doppelpunkt und den Scheitel S' des sechsdeutigen Büschels zu einem sechsfachen Punkte hat. Diese Curve S^8 durchsetzt offenbar den Grundkegelschnitt k in $2.8 = 16$ Punkten. Von diesen werden

---

[1]) E. Weyr, „Curvenlehre etc.", p. 6.
[2]) „Analyt. Geom. d. höh. eb. Curv. etc.", p. 270.
[3]) E. Weyr: „Beiträge zur Curvenlehre", p. 44.

durch die Scheitel SS' bekanntlich $6 + 2 = 8$ absorbiert, während die restlichen acht Elemente dem obigen Ergebnisse entsprechen.

Man kann übrigens auch den nachstehenden Weg beobachten.[1]) Von den zwei zwei-sechsdeutigen Systemen des Grundkegelschnittes k ist das zweideutige ein symmetrisches Punktensystem $6(2-1) = 6$. Grades, d. i. dasjenige, welches den Tangentialpunktenpaaren auf der Plancurve $C^4{}_8$ bildlich entspricht. Die Directionscurve dieses Systems ist[2]) 6. Classe und $6(6-1) = 30$. Ordnung. Sie hat $2.6 = 12$ Doppelpunkte erster Art, in welchen sie von Tangenten des Grundkegelschnittes berührt wird, und sie durchsetzt diesen in den $2.6(6-1) = 60$ Verzweigungen (abgerechnet die Singularitäten, welche jedenfalls im symmetrischen Systeme vorkommen), denen ebensoviele Coincidenzen zweiter Art zukommen. Unter den letzteren werden sich die Bilder der Inflexionselemente der Plancurve $C^4{}_8$ befinden.

II.

Plancurven vierter Ordnung mit zwei imaginären Doppelpunkten.

64. Projectivische Punktenreihen, welche coaxial wie in (1) einem geraden Träger o angehören, haben wir bisher mit reellen Asymptotenelementen vorausgesetzt. Dieses hatte zur Folge, dass eine Erzeugniscurve $C^4{}_8$ ein Paar Doppelpunkte besaß, die mit den Asymptotenelementen der zugrunde liegenden projectivischen Reihen identisch waren und als eigentliche Knoten oder als isolierte Doppelpunkte der Curve auftraten. Es bleibt demnach der weiteren Untersuchung vorbehalten, jenen Fall zu studieren, in welchem die projectivischen Reihen auf dem o-Träger und also auch das bezügliche Erzeugnis der Grundconstruction (6) imaginäre Doppelelemente enthalten.

Dass dieses Erzeugnis der gemachten Voraussetzung an seinen wesentlichen Eigenschaften als Curve vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ keinen Eintrag erleidet, ausgenommen etwa bestimmte Specialisierungen in der Lage des Grundkegelschnittes, auf die wir speciell a. g. O. hinweisen werden, ist

---

[1]) E. Weyr: „Beiträge zur Curvenlehre", p. 23.

[2]) Ebendort p. 13.

einleuchtend und auch bekannt. Es werden jedoch gewisse Modificationen der Construction stattfinden müssen, welche die typische Form des Erzeugnisses dieser Art bedingen und feststellen, und welche auch solche charakteristische Eigenschaften aussprechen, auf die bisher unseres Wissens kaum aufmerksam gemacht worden ist.

65. Vor allem wird man einsehen, dass die Construction der projectivischen Grundreihen auf dem o-Träger nach der „Ersten Methode" in (2) in dem vorliegenden Falle von imaginären Doppelelementen keine Anwendung finden kann und wir uns deshalb ausschließlich nur der „Zweiten Methode" in (3) bedienen dürfen. Damit aber diese zweite Constructionsmethode für die gegenwärtige Annahme ihren geeigneten Ausdruck findet, muss man die Perspectivitätsachse q gegenüber dem Hilfskreise $\varkappa$ (Fig. 2) als eine uneigentliche Secante wählen, weil nur in dieser Voraussetzung auf der Trägergeraden o imaginäre Asymptotenelemente entstehen. Dabei ist es ganz gleichgiltig, ob man die q-Achse mit der o-Geraden, wie in Fig. 2, coincidieren lässt, oder ob diese beiden Geraden, wie in Fig. 4, sich nicht identificieren. Für die betreffende Plancurve C^4_8 als Erzeugnis entsprechender Tangentenpaare nach (6) ist jedoch die Lage des Grundkegelschnittes gegen den Reihenträger o wohl zu unterscheiden (46), worauf wir späterhin ohnedies zurückkommen.

66. Wir wissen, wie gesagt, aus (6), dass sich entsprechende Elemente der zwei Tangentensysteme eines Grundkegelschnittes k, welche also aus den entsprechenden Punktenpaaren $X\xi$ des o-Trägers an jenen ziehen, im Sinne der zwei SS'-Centra in Quadrupeln treffen.

Um die Construction entsprechender Elemente der Reihen $X\xi$ auf einem o-Träger nach der zweiten Methode (3) bei der in (65) gemachten Bedingung bezüglich der Lage der q-Achse gegen den Hilfskreis $\varkappa$ in ihrer Modification zu zeigen, betrachte man die Fig. 27. Ein beliebiger Punkt ν der Perspectivitätsachse q wird mit den beiden SS'-Centra des Hilfskreises durch Strahlen in Verbindung gesetzt. Der Strahl des S-Centrums trifft den Kreis in X_1 und jener des S'-Centrums in ξ_1. Die Projectionen von $X_1\xi_1$ aus dem Centrum B des Hilfskreises $\varkappa$ geben auf dem Träger o ein Paar projectivisch entsprechender Elemente $X\xi$.

Will man für einen X-Punkt den ξ-Punkt finden, so zieht man also in Umkehrung des Vorstehenden durch X den B-Strahl, wodurch X_1 erhalten wird; letzteren Punkt verbinden wir mit dem S-Centrum, wodurch auf q der ν-Punkt entsteht; der Strahl $| S'\nu |$ lässt am Kreise den ξ_1-Punkt zurück und nun ist wie vorhin durch den Strahl $| B\xi_1 |$ der ξ-Punkt auf o bestimmt.

Man sieht aber leicht die Zweideutigkeit der Construction wieder bestätigt, wenn man den vorhin bezeichneten Punkt X_1 jetzt mit dem S'-Centrum verbindet; die betreffende Linie schneidet auf der q-Achse einen Punkt ν_1 aus und die Verbindungslinie $| S\nu_1 |$ trifft den Kreis in einem Punkte X'_1. Die Projection X' von X'_1 aus dem B-Centrum auf der o-Geraden ist, wie eingangs bewiesen wurde, ebenfalls dem X-Punkte projectivisch, sofern dieser letztere als Element der ξ-Reihe gedacht wird und mit ξ' bezeichnet wird.

67. Legen wir nun in der Ebene einen Grundkegelschnitt k fest (Fig. 24), so ist nach der Fundamentalconstruction (6) der geometrische Ort derjenigen Schnitte, welche durch Tangentenpaare, die aus entsprechenden Punkten X, ξ (respective $\xi' \equiv X, X'$) an den Grundkegelschnitt ziehen, erhalten werden, eine Plancurve C^4_8, deren beide Doppelpunkte auf der o-Geraden als Doppelelemente der daselbst vorkommenden elliptischen Reihen X, ξ imaginär sind.

Man sieht sofort ein, d a s s d e r G r u n d k e g e l s c h n i t t n i e m a l s v o n d e m E r z e u g n i s s e C^4_8 b e r ü h r t w e r d e n k a n n, weil es weder Hauptverzweigungen (10) noch begleitende Elemente dieser Art (12) reell geben kann.

Nebenverzweigungen (11) erscheinen bekanntlich reell oder imaginär, je nachdem der Grundkegelschnitt von der o-Geraden in NN_1-Punkten geschnitten wird oder nicht. In Fig. 24 sind diese Elemente als Quadrupel $\nu\nu_1\nu'\nu'_1$, $\nu''\nu''_1\nu'''\nu'''_1$ in ihrer Maximalzahl reell.

68. Auf einer Plancurve C^4_8 vorliegender Art ist das Cayley-sche Punktentripel OZZ' (14) i m m e r r e e l l. Man wird in dem gegebenen Falle mit reellen Nebenverzweigungen dasselbe leicht construieren können; doch ist uns keine Methode bekannt, wie man dessen Elemente, sowie die Hesse'schen Polaren zz' erhält, wenn die Nebenverzweigungen ν insgesammt imaginär oder nur das eine Quadrupel auf einer N-Tangente des Grundkegelschnittes reell sind.

Aus dem Cayley'schen Doppelpunkte O kann man an eine Plancurve $C^4{}_8$ mit imaginären Doppelpunkten keine Tangente ziehen. Wohl aber ist dieses möglich bei dem Punktenpaare ZZ', und zwar kann der Fall eintreten, dass man aus einem Punkte dieses Paares die Maximalzahl von acht Tangenten, welche der Classe der Curve entspricht, zu ziehen imstande ist, wie beispielsweise in betrachteter Fig. 24. Allerdings wird es darunter Doppeltangentenpaare geben können, wie aus (18) bekannt ist. Man weiß auch aus (21), dass die δ-Berührpunkte immer auf der bezüglichen Hesse'schen Polaren sich befinden. In gleicher Weise ergibt sich die Bestätigung der in (20) ausgesprochenen Gesetze über die Verbindungen der Berührpunkte B von auf der Curve vorkommenden Doppeltangenten etc. etc.

69. Selbstverständlich gelangt das „classische Gesetz" (12) einer Plancurve betrachteter Art, wegen der in (67) imaginären Haupt- und ihrer begleitenden Verzweigungen, nicht zum Ausdruck. So wie jedoch sämmtliche Nebenverzweigungen, so können auch die Asymptotenelemente, deren es nach (41) nicht mehr als vier geben kann, vollständig oder paarweise reell und imaginär sein. Dadurch ist die Form und der Verlauf einer Plancurve $C^4{}_8$ mit imaginären Doppelpunkten wesentlich beeinflusst. Wie wir in den vorangegangenen Untersuchungen gezeigt haben, wird die Formation einer $C^4{}_8$ hauptsächlich durch die Lage des Grundkegelschnittes zur Trägergeraden o bedingt, weshalb auch jetzt wieder darauf Rücksicht zu nehmen ist, und wir werden nachstehend die daraus folgenden wichtigsten Typen des Erzeugnisses $C^4{}_8$ mit imaginären Doppelpunkten charakterisieren, indem wir die Numeration fortlaufend mit dem Vorangegangenen führen.

70. Typus XII. (Fig. 24). Der Grundkegelschnitt k wird von dem o-Träger in reellen NN'-Punkten geschnitten. Dieses hat zur Folge, dass alle acht Nebenverzweigungen ν vorkommen. Jeder der beiden Bestandtheile des vorliegenden Curventypus $C^4{}_8$ zerfällt in zwei Äste, welche ein Paar der vier Asymptoten consumieren.

Von dem im Innern des Grundkegelschnittes liegenden Cayley'schen Punkte Z ziehen an die Curve vier Tangenten, welche sie in den Schnitten δ der Hesse'schen Polaren z tangieren. Im conjugierten Z'-Punkte vereinigen sich ein Quadrupel Tangenten, welche ihre Berührpunkte δ' auf der Hesse'schen

Geraden z' haben, und weiters ein Paar Doppeltangenten, deren Berührpunkte auf Strahlen des O-Poles liegen. Zur Erklärung für die Construction nach (3) sei bemerkt, dass in der Fig. 24 ein Zusammenfallen der Geraden $q \equiv o$ angenommen ist, was jedoch für die allgemeine Charakteristik des Curventypus belanglos ist.

Wird der Constructionskreis $\varkappa$ mit dem Grundkegelschnitte k identificiert, so wird unter der eingangs vorausgesetzten Annahme der o-Geraden gegenüber dem Grundkegelschnitte ebensowenig der Typus des Curvenerzeugnisses $C^4{}_8$, wie er vorhin charakterisiert wurde, alteriert, sondern dadurch nur eine symmetrische Gestaltung desselben bedingt, was man aus Fig. 28 ersehen kann.

71. Typus XIII. Die o-Gerade trifft den Grundkegelschnitt k nicht. Demnach sind sämmtliche Nebenverzweigungen (11) imaginär (Fig. 25). Das Curvenerzeugnis $C^4{}_8$ besitzt auf der unendlich fernen Geraden der Ebene keine reellen Elemente und besteht deshalb aus zwei in sich abgeschlossenen Theilen, wovon der eine den anderen umzieht. Der von dem anderen umschlossene Curventheil bildet ein Oval ohne Inflexionen, während der umschließende Theil eine doppeltmeniskenförmige Gestalt mit vier reellen Inflexionselementen zeigt. Die letztere Eigenschaft bedingt jedenfalls das Vorhandensein von Doppeltangenten, wie leicht einzusehen ist. In der That gibt es auch in dem einen Z'-Elemente der Cayley'schen Punkte ein Paar Doppeltangenten der Plancurve $C^4{}_8$, deren Berührpunkte B nach der Beziehung in (20) auf Strahlen der beiden übrigen Cayley'schen Centra ZO liegen. Andererseits treffen sich die aus den B-Punkten gehenden Grundkegelschnittstangenten in β-Punkten der Hesseschen Polaren zz'.

Aus jedem Punkte des Paares ZZ' ziehen überdies ein Quadrupel Tangenten an die Plancurve, die sie in den Schnitten $\delta\delta'$ der zz'-Polaren berühren. Die Verbindungslinien je eines Paares der letzeren Berührpunkte schneiden einander auf der o-Geraden.

Man erkennt das vorliegende Curvenerzeugnis gewissermaßen als den Gegensatz des Curventypus XII in (70), weil den reellen nur imaginäre Asymptotenelemente gegenüberstehen, wie etwa die Fig. 13 und 15 der Fig. 6 als in dieser Beziehung

typisch entgegengesetzte Beispiele von Plancurven C^4_8 mit reellen Doppelpunkten angesehen werden können.

72. Typus XIV. Die Annahme der o-Geraden ist analog derjenigen in (71). Wir erhalten in Fig. 26 als einen Bestandtheil des Erzeugnisses C^4_8 ein Oval, welches den Grundkegelschnitt umzieht. Der andere Curventheil setzt sich aus zwei Ästen zusammen, die miteinander ein einziges Paar reeller Asymptotenelemente aufweisen. Die sonstigen Beziehungen über Curventangenten des Cayley'schen Punktentripels OZZ' sind wesentlich dieselben wie bei der Type XIII, was in der Figur sehr anschaulich vor Augen tritt.

Dieser Curventypus stellt sich sozusagen als Pendant des Typus II in Fig. 14 gegenüber, insofern der Verlauf der beiden Curventheile ein ähnlicher ist.

73. Typus XV. Die Situation des Grundkegelschnittes k ist abermals dieselbe gegen den o-Träger wie in (71). (Fig. 27.)

Wir identificieren den Grundkegelschnitt k diesfalls mit dem Hilfskreise $\varkappa$. Das Curvenerzeugnis C^4_8, als Resultat der Construction in (6), bringt als Theilbestandstücke zwei Ovalen hervor, welche einander sowie den Grundkegelschnitt umschließen. Dass man aus diesem Grunde keine eigentlichen Doppeltangenten auf der Curve unterscheiden kann, liegt auf der Hand. Wohl aber werden aus den beiden immerhin vorkommenden Cayley-schen Punkten ZZ' Tangentenquadrupel an die Curve möglich sein, welche in ihren Elementen die Curve in Punkten berühren, die auf den Hesse'schen Polaren zz' liegen müssen.

Die zwei Ovalbestandtheile der Plancurve können auch ein Paar Kegelschnitte vorstellen, welche mit dem Grundkegelschnitte eine imaginäre doppelte Berührung bilden.

74. Berührt der Reihenträger o den Grundkegelschnitt k in einem Punkte K, so treten analoge Beziehungen wie in (62) hervor. Die Erzeugniscurve wird ein Kegelschnitt C^2, der mit dem Grundkegelschnitt eine imaginäre doppelte Berührung eingeht. Dieses ergibt sich auch aus dem Umstande, dass die erzeugenden Tangentensysteme (6) im vorliegenden Falle, wie man unschwer bemerken wird, projectivisch sind.

Man wird auch die o-Gerade wie dort als den Träger der einzigen zwei reellen Nebenverzweigungen wieder erkennen, die erhalten werden, wenn der K-Punkt der Grundconstruction im Doppelsinne der SS'-Centra unterzogen wird. Beispielsweise trifft

der Str[illegible] | SK | die Perspectivitätsachse q in einem Punkte v: dieser letztere wird aus dem Centrum S' auf $k \equiv \varkappa$ projiciert, und es schneidet die Verbindungslinie des erhaltenen Projectionspunktes mit dem Centrum B den o-Träger in einem der genannten Nebenverzweigungselemente.

Bicirculare Plancurven C^4_8.

75. Wir gelangen nun im Verfolge der bisher eingeschlagenen Wege zu dem wichtigen Falle, in welchem die Doppelelemente einer C^4_8 die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene sind. Dieser Fall hat vielfache Untersuchungen erfahren.[1]) Um ihn in Übereinstimmung mit unserer Erzeugungsweise zu bringen, muss man die unendlich ferne Gerade $o\infty$ als den Träger der zwei projectivischen Grundreihen $X\xi$ nach der zweiten Methode in (3) betrachten, welche Reihen elliptisch sind, weil die Doppelpunkte der Curve gleichzeitig die Doppelelemente dieser Reihen, also die besagten imaginären Kreispunkte vorstellen.

Für einen beliebigen Grundkegelschnitt k der Ebene ist das Erzeugnis der bezeichneten Annahme in Anwendung der Grundconstruction (6) eine bicirculare Curve vierter Ordnung (Fig. 29).

Es wird nur von der Natur des Grundkegelschnittes abhängen, ob die Erzeugniscurve C^4_8 reelle oder imaginäre Nebenverzweigungen (11) aufzuweisen hat; denn dass die beiden anderen Gattungen von Verzweigungselementen (10) und (12) nur imaginär vorkommen und also auch der Grundkegelschnitt keine eigentliche Berührung mit dem Erzeugnisse besitzt, ist aus dem Vorhergehenden begründet.

76. Aus dem Umstande, dass die bicirculare Erzeugniscurve C^4_8 mit der Trägergeraden $o\infty$ nur die imaginären Kreispunkte als Doppelelemente incident hat und demnach keine weiteren Punkte mit derselben gemeinschaftlich haben kann, was vermöge der Ordnungszahl $= 4$ ersichtlich ist, schließt man

[1]) Vergl. Salmon-Fiedler: „Analyt. Geom. d. höh. Plancurv. etc.“, p. 298 u. s. f.; ferner Casey: „On bicircular Quartics“ in den „Transactions of the Royal Irish Academy“, Bd. 24, p. 457, und Siebeck: „Über eine Gattung von Curven vierten Grades etc.“ in „Crelles Journal“, Bd. 57, p. 359 u. Bd. 59, p. 173.

ohne Schwierigkeit auf ausschließlich imaginäre Asymptotenelemente. Hieraus aber folgt unmittelbar, dass die beiden Bestandtheile der bicircularen Curve in sich geschlossene Ovale (45) sind, wovon übrigens der eine auch eine doppelt meniskenartige Form annehmen kann. Bevor wir die charakteristische Typenformation derartiger Curven näher besehen, sei noch auf eine Degeneration aufmerksam gemacht.

77. Wenn der Grundkegelschnitt k als Parabel angenommen wird, in welchem Falle er also die Trägergerade $o\infty$ tangiert, so wird das Erzeugnis ein Kegelschnitt C^2, indem die Beziehung nothwendig wieder wie in (74) projectivisch erscheint. Dieser Kegelschnitt kann nur eine Hyperbel sein, welche mit dem Grundkegelschnitte k eine imaginäre doppelte Berührung eingeht. Die Asymptotenrichtungen dieser Erzeugung erhält man, wenn der unendlich ferne Punkt $K\infty$ der Basisparabel der Grundconstruction im Sinne der beiden SS'-Centra des Hilfskreises $\varkappa$ unterworfen wird.

78. Typus XVI. (Fig. 30). Der Grundkegelschnitt k ist Hyperbel.

Eine kurze Überlegung zeigt, dass die acht Nebenverzweigungen ν (11) reell vorhanden sein müssen und dass sie sich auf den Hyperbelasymptoten yy_1 quadrupelweise situieren werden. Ihre Tangenten, welche gemeinschaftliche Elemente zwischen dem Grundkegelschnitte und der bicircularen Erzeugniscurve $C^4{}_8$ sind, treffen sich, außer auf der Geraden $o\infty$, auf dem Hesseschen Polarenpaare zz'.

Um die Construction der Nebenverzweigungen ν anzudeuten, bedenke man, dass eine Asymptote y des Grundkegelschnittes k eine Tangente ist, welche ihn in einem Punkte auf der Geraden $o\infty$ berührt; als solche bildet sie gleichzeitig ein Element der erzeugenden Tangentensysteme (6). Zieht man demnach aus dem B-Centrum des Constructionskreises $\varkappa$ zu dieser Asymptote einen Parallelstrahl, so trifft dieser den Kreis in einem Punkte Y. Nach der Grundconstruction (3) hat man durch die Projectionscentra SS' in entsprechender Modification zu den Verbindungen $|SY|$, $|S'Y|$ gleichlaufende Gerade zu ziehen, welche den Hilfskreis $\varkappa$ in den Punkten $Y'Y''$ schneiden. Die Tangentenpaare des Grundkegelschnittes, die den Strahlen $|BY'|$, $|BY''|$ parallel gehen, treffen die y-Asymptoten in dem gesuchten Quadrupel $\nu\nu_1\nu'\nu'_1$ Nebenverzweigungen.

79. Die beiden Ovalbestandtheile der erzeugten Curventype gestalten sich in der Weise, dass der eine ein eigentliches Oval von ellipsenartiger Form bildet, welcher von dem anderen Bestandtheile, der eine doppelt meniskenförmige Gestalt annimmt, vollständig umschlossen erscheint.

Die Formation des letzteren Curventheiles bedingt für die bicirculare Curve C^4_8, wie schon in (71) hervorgehoben wurde, das Vorhandensein eines Paares reeller Doppeltangenten mit vier sie paarweise begleitenden Inflexionen.

80. Der symmetrische Verlauf des Curvenerzeugnisses C^4_8 zeigt einen Mittelpunkt an, der sich mit demjenigen des Grundkegelschnittes k identificiert. Wir wissen, dass der letztere der Pol der Geraden $o\infty$ ist. Aus diesem Grunde trifft jeder in diesem Pole O gehende Strahl die beiden Curvenbestandtheile in zwei Punktenpaaren, deren Elemente in jedem gleichweit von O abstehen, so dass jedesmal auf einem Mittelpunktsstrahle gewissermaßen ein Paar Diameter ineinander fallen.

Sucht man nach (14) mittelst der Nebenverzweigungen v die Cayley'schen Punkte ZZ' und deren Hesse'schen Polaren zz', so ergibt sich bei einiger Überlegung, dass das Geradenpaar zz' nichts anderes vorstellt, als das mit ihm coincidierende Achsenpaar des Grundkegelschnittes k, weshalb das Punktenpaar $Z\infty Z'\infty$ auf der Geraden $o\infty$ durch Strahlen des O-Poles, die unter einem rechten Winkel zu einander geneigt sind, fixiert wird. Mit anderen Worten: Die Achsen des Grundkegelschnittes sind identisch Achsen der Plancurve ihrer Lage nach.

Die Schnitte der Achsen zz' des Grundkegelschnittes k bilden gleichartige Elemente der Plancure C^4_8: nämlich Scheitel, deren Tangenten den Achsen zz' parallel laufen. Die hieraus entspringenden Consequenzen für metrische Beziehungen, welche sich insbesondere auf die Brennpunktseigenschaften bicircularer Curven beziehen, sind als bekannt vorauszusetzen.[1])

81. Es wurde vorher angemerkt, dass das vorliegende Erzeugnis einer bicircularen Plancurve nicht mehr als ein Paar Doppeltangenten nachweisen lässt, wie solches überhaupt bei Curven mit imaginären Doppelpunkten als allgemeine Eigenschaft anzusehen ist. Denn würde man etwa eine dritte

---

[1]) Salmon-Fiedler: „Analyt. Geom. d. höh. Plancurv.", p. 298.

Tangente voraussetzen wollen, so könnte dieselbe, wegen der Eigenschaft in (14), nur mehr auf dem eigentlichen Ovalbestandtheile vorkommen, der von dem anderen umschlossen wird. Da eine solche Annahme wegen der Form des Ovales unmöglich ist, indem ja auch die betreffende Tangente dann offenbar den anderen Bestandtheil in einem Punktenpaare schneiden würde, so ergibt sich die Absurdität der Annahme von selbst.

82. Typus XVII. Der Grundkegelschnitt sei Ellipse (Kreis). Fig. 29.

Wir haben das diesfalls vorliegende Curvenerzeugnis der bicircularen C^4_8 aus zwei eigentlichen Ovalen bestehend, wovon das eine das andere vollkommen umschließt und selbstverständlich auch der Grundkegelschnitt k mit eingeschlossen erscheint. Die Ursache des Resultates von zwei Ovalen liegt darin, dass sämmtliche Nebenverzweigungen (11) diesmal, im Gegensatz zu dem vorhin betrachteten Falle, imaginär erscheinen müssen, indem der Grundkegelschnitt k keine reellen Asymptotenelemente besitzt. Dieses hat zur weiteren Folge, dass die Curventype keine Inflexionen aufweisen kann, und ebensowenig können Doppeltangenten vorkommen.

Die beiden Ovale der bicircularen Curve können eventuell homothetische Kegelschnitte[1]) sein, und zwar entweder ein Paar Ellipsen (Fig. 29) oder ein Paar Kreise (Fig. 31). In beiden Fällen haben sie den Pol O der Geraden $o\infty$ als gemeinschaftlichen Mittelpunkt mit dem Grundkegelschnitte k identisch, weshalb man sie als zwei sich in den unendlich fernen imaginären Kreispunkten doppelt berührende Kegelschnitte auffassen muss.

83. In Folge der Mittelpunktseigenschaften des O-Poles für die beiden Ovalbestandtheile einer bicircularen Plancurve C^4_8 vom betrachteten Typus sind die Hesse'schen Polaren zz' (14) Achsen der Strahleninvolution, welche in diesem Punkte analog wie bei Kegelschnitten vorhanden ist, und die gleichen Eigenschaften über die conjugierten Diameter, Scheitel, etc. wie bei Typus XVI in (78) finden hier ihre Wiederholung.

84. Die Specialisierung der in (9) allgemeinen Eigenschaft über Poncelet'sche Vierecke, einer Plancurve C^4_8 überhaupt, für bicirculare Typen erfolgt durch Einsicht in die Grund-

---

[1]) Staudigl: „Neuere Geometrie", p. 198.

construction dahin, dass diese Figuren Parallelogramme einer Schar bilden, deren Individuen wie dort dem Grundkegelschnitte umschrieben sind, während ihre Ecken auf dem Erzeugnisse liegen.

85. Schließlich sei noch auf die Modification hingewiesen, welche im Falle einer bicirculären Curve C^4_8 das Fundamentalnetz in (29) erleidet. Infolge der imaginären Hauptverzweigungen (67) besitzt das Netz nur einen einzigen Basispunkt, nämlich den Pol O der Trägergeraden o. Wir erhalten also Paare von Unicursalcurven $C^4_6 C^4_6{}'$ als Individuen des Fundamentalnetzes, welche, als Bilder der g-Geraden in der Ebene einer Plancurve C^4_8 mit imaginären Doppelpunkten überhaupt, sich insgesammt im O-Pole durchsetzen, welcher letztere speciell bei bicircularen Curven der Mittelpunkt des Grundkegelschnittes ist.

Es ist klar, dass in dem Fundamentalnetze O keine Kegelschnitte vorkommen, weil ja die Doppelpunkte der Plancurve C^4_8 als imaginär angenommen sind; wohl aber wird den Grundkegelschnittstangenten nach (31) ein System von Curvenpaaren C^3_4 bildlich entsprechen müssen.

III.

Plancurven C^4_8 mit Berührknoten.

86. Fallen die zwei reellen Doppelpunkte einer Plancurve vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ zusammen, so entsteht eine Curve dieser Art mit einem Berührknoten, in welchem zwei Äste der Curve gegenseitig in Contact sind. Ordnung und Geschlecht der Curve werden durch diese Eigenschaft nicht alteriert, weil bekanntlich[1]) ein Berührknoten eine Singularität bedeutet, welche höherer Ordnung ist, wo die ihm zukommende Tangente vier aufeinander folgende Curvenpunkte vereinigt.

Der Berührknoten kann ein eigentlicher oder Einsiedler sein; im letzteren Falle ist auch seine Curventangente eine isolierte Gerade. Es unterliegt keinem Zweifel, dass eine Plancurve dieser Gattung, sofern wir sie als das Erzeugnis von zwei zweideutigen Tangentensystemen eines Kegelschnittes nach der Grundconstruction in (6) betrachten, allerdings entsprechende Abweichungen von den dort gefundenen Resultaten

[1]) Salmon-Fiedler: „Analyt. Geom. d. höh. Plancurv. etc.", p. 29.

zeigen wird, welche jedoch im allgemeinen wesentlich den Charakter solcher Curven nicht verändern.

87. Um die Beziehungen festzustellen, werden wir vorerst die unserer Construction zugrunde liegenden projectivischen Reihen $X\xi$ auf einem o-Träger und die damit zusammenhängenden beiden Methoden in (2) und (3) besprechen müssen. Man erkennt auf den ersten Blick, dass für den vorliegenden Fall, weil nach der Voraussetzung die Doppelpunkte der Plancurve C^4_8 in einem einzigen Punkte A coincidieren sollen, auch die Doppelelemente der projectivischen Grundreihen $X\xi$ auf dem Träger o identisch mit A zusammenfallen. Hieraus folgt für die erste Methode (2) die Modification, dass (Fig. 1) sowohl der Centraträger s, als auch die Perspectivitätsachse q Strahlen des A-Punktes sein müssen; hingegen wird für die zweite Methode (3) sehr einfach der Fall eintreten müssen, dass (Fig. 2) die Perspectivitätsachse q eine Tangente des Hilfskreises $\varkappa$ wird. Die Construction zur Vervollständigung entsprechender Elemente der auf dem o-Träger conlocalen Grundreihen $X\xi$ erleidet durch vorstehende Specialisierungen keine wesentliche Veränderung.

88. Wird demgemäß (Fig. 32) in der Ebene des o-Trägers ein beliebiger Grundkegelschnitt k angenommen, so formieren nach (6) die Tangentenpaare, die man aus entsprechenden Punktenpaaren $X\xi$ des o-Trägers an diesen Kegelschnitt zieht, zwei zweideutige Systeme, deren geometrischer Ort eine Plancurve C^4_8 ist, die in dem A-Punkte einen Berührknoten enthält.

Der Verfolg der Construction lässt uns die letztere Eigenschaft des A-Punktes, sowie auch die obige Behauptung, dass der o-Träger gleichzeitig die Knotentangente vorstellt, ohne erhebliche Schwierigkeit einsehen. Man sieht aber weiter, dass der Grundkegelschnitt k das Erzeugnis in zwei Punkten VV_1, den Hauptverzweigungen unserer Ableitungen in (10), einfach berührt, er also für dasselbe ein doppelt berührender Kegelschnitt ist.

Weil die Hauptverzweigungen VV_1 auf der Polaren a gelegen sind, so folgt nach (12), dass auf dieser Geraden noch ein Paar begleitende Verzweigungselemente $\varphi\varphi_1$ vorkommen müssen, die also ebenfalls Berührungspunkte von aus dem A-Punkte ziehenden Curventangenten sind. Die Folge davon ist, dass die a-Gerade als eine harmonische Polare des Knoten-

punktes A vorkommt, eine Eigenschaft, von der bereits in der Anmerkung (12) Erwähnung geschehen ist und die Salmon unserer Anschauung nach irrthümlich überhaupt einer Plancurve C^4_8 zugeschrieben hat. Wir nennen die a-Gerade: Salmon'sche Polare, und indem wir auf unser in (12) ausgesprochenes „classisches Gesetz" hinweisen, geben wir den Satz:

„Von dem Berührknoten einer Plancurve vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ ziehen an dieselbe vier Tangenten, deren Berührpunkte auf der Salmonschen Polaren liegen."

Die Realität der Berührpunkte der Tangenten des vorstehenden Satzes hängt selbstverständlich mit der Eigenschaft des Berührknotens A als eigentlicher oder isolierter Punkt der Curve zusammen. Im letzteren Falle werden die als Hauptverzweigungen charakterisierten Berührpunkte imaginär erscheinen, weshalb man dann von A aus nur ein Paar Tangenten an die Plancurve wird ziehen können, welche den begleitenden Verzweigungselementen entsprechen.

89. In Bezug der Nebenverzweigungen (11) einer Curve betrachteter Art liegt es auf der Hand, dass diese insgesammt oder paarweise reell und imaginär sein können, was von der Lage des Berührknotens A sowie auch von derjenigen des o-Trägers gegen den Grundkegelschnitt abhängen wird.

Nicht so einfach erledigt sich die Frage über die Anzahl und Realität der Asymptotenelemente. Dass diese in ihrer Maximalzahl = vier oder in einem Paare reell vorkommen, werden wir weiter unten zeigen; wir kennen aber kein Beispiel einer Curve C^4_8 mit Berührknoten, welche ausschließlich imaginäre Asymptoten besitzt. Man wird auch durch eine einfache geometrische Überlegung dahin gelangen, dass dieser Fall nicht möglich ist, wenn man bedenkt, er könnte nur dann eintreten, sofern ein Berührknoten als ein imaginärer Punkt erscheint. Die Absurdität der letzteren Annahme ergibt sich jedoch durch die Unmöglichkeit derselben in Bezug der Grundconstructionen in (2) und (3), indem die Perspectivitätsachse q nach (2) immer die o-Gerade in einem reellen Punkte schneiden oder nach (3) den Hilfskreis k berühren wird. Man muss somit sagen:

„Eine Plancurve C^4_8 mit Berührknoten enthält wenigstens zwei Asymptoten."

90. Sucht man das Cayley'sche Punktenpaar ZZ' nach der Construction (14), so wird man ohne Schwierigkeit zur Einsicht kommen, dass das eine Element desselben sich mit dem Knoten A vereinigt und folglich das andere Z-Element der Schnitt, welchen die a-Polare auf dem o-Träger hervorbringt, ist. Als weitere Folge dieser Eigenschaft ergibt sich die Coincidenz der a-Polaren mit der einen der Hesse'schen Polaren zz'.

Für die Existenz von Doppeltangenten können wir uns jetzt auf die Sätze in (18) berufen, indem wir sofort erklären: „Die vier Doppeltangenten des O-Poles sind immer imaginär.“ Weil weiters, wie wir soeben gesehen haben, der eine von den Cayley'schen Punkten ZZ' in den Berührknoten A fällt, von diesem aber nach dem classischen Gesetze (88) bereits vier Tangenten an die Plancurve ziehen, so sind noch zwei Doppeltangenten des letzteren möglich, die offenbar mit der Knotentangente, wie ja bekannt ist, zusammenfallen. Es bleiben also eventuell noch die zwei Doppeltangenten des anderen Z-Punktes übrig, weshalb man, wenn von der Eigenschaft der Knotentangente abgesehen wird, den Satz aussprechen kann:

„In einer Plancurve C^4_8 mit Berührknoten gibt es höchstens zwei eigentliche Doppeltangenten.“

91. Wir wissen aus (17), dass man aus demjenigen Cayley'schen Z-Punkte, welcher nicht in den Knotenpunkt A fällt, an die Erzeugniscurve vier Tangenten ziehen kann, deren Berührpunkte auf der bezüglichen Hesse'schen Polaren z liegen. Zwei von diesen Berührpunkten fallen offenbar mit dem Knotenpunkte A zusammen; es bleiben also noch die beiden anderen $\delta\delta_1$ übrig, welche die bemerkenswerte Eigenschaft haben: „Dass ihre wechselweisen Tangenten des Grundkegelschnittes die a-Polare (als Hesse'sche Gerade) in den zwei begleitenden Verzweigungen $\varphi\varphi_1$ schneiden.“ Hieraus folgt eine lineare Construction der letzteren.

a) Das Fundamentalnetz.

92. Dieselben Principien, welche wir in (22) u. s. f. aufgestellt haben, werden wir jetzt zur Anwendung bringen, wenn wir die Curve C^4_8 mit dem Berührknoten A voraussetzen, und es wird sich zeigen, welche Wirkung dieser Singularfall auf

das betreffende Fundamentalcurvennetz des Grundkegelschnittes k hervorbringt.

Wesentlich wird das dort erhaltene Resultat insofern nicht alteriert, als die Individuenpaare, welche sich in dem auseinandergesetzten Sinne zu Bildern der Geraden g der Ebene gestalten, im allgemeinen Unicursalcurven vierter oder dritter Ordnung, respective Kegelschnitte sind, je nachdem eine g-Gerade eine beliebige Gerade, eine Grundkegelschnittstangente oder einen Knotenstrahl bedeutet. Die Unterscheidung des vorliegenden Falles betrifft hauptsächlich die Basispunkte des Fundamentalnetzes, und in dieser Beziehung wird man leicht ersehen, dass infolge des Zusammenfallens von je zwei Hauptverzweigungen in das Punktenpaar VV_1, das ganze Netz der Curvenpaare $C^4_6 C^4_6{}'$ als Basispunkte nurmehr ein Punktentripel VV_1O enthält.

Von dem Tripel VV_1O wissen wir aus (27), dass der O-Punkt für jedes Netzindividuum C^4_6 Berührknoten ist; die Coincidenzen in den Basispunkten VV_1 bedingen aber, wie man leicht einsicht, Berührungen dieser Curvenindividuen mit dem Grundkegelschnitte k. Somit resultiert:

„Die Curvenindividuen C^4_6 des Fundamentalnetzes werden von dem Grundkegelschnitte k mindestens doppelt berührt."

93. Eine Curve C^4_6, als Individuum des Netzes, hat außer den beiden Basispunkten VV_1, welche vier Elemente consumieren, höchstens noch vier mit dem Grundkegelschnitte k gemeinschaftliche Punkte 1 2 3 4 (Fig. 33), welche sich wie in (28) als Bilder der Schnitte $I\ II\ III\ IV$ darstellen, die die Plancurve C^4_8 mit der betreffenden g-Secante besitzt.

Ist der Grundkegelschnitt dreimal von der C^4_6 berührt, so zeigt letztere das Bild einer einfachen Curventangente g, wobei (Fig. 34) der dritte Berührpunkt 1 den Berührpunkt I, die beiden noch möglichen Schnitte 23 jedoch die Tangentialpunkte $II\ III$ abbilden.

Für eine Doppeltangente g der Plancurve C^4_8 ist das entsprechende Netzindividuum C^4_6 eine Curve, welche von dem Grundkegelschnitt viermal berührt wird; eine Inflexionstangente jedoch bildet sich als eine C^4_6 ab, die den Grundkegelschnitt in den Punkten VV_1 einfach berührt, in einem Punkte 1 osculiert und in einem zweiten Punkte 2 schneidet. Der Oscu-

lationspunkt bildet (44) das Inflexionselement I und der Schnittpunkt 2 den Tangentialpunkt II der Wendetangente ab.

94. Grundkegelschnittstangenten entsprechen im Fundamentalnetze wie in (31), Curven C^3_4. Sie besitzen identisch mit den Individuen C^4_6 die gleichen Basispunkte $O\,V\,V_1$, welche sich derart gestalten, dass eine Cubik zwar wieder in den Elementen $V\,V_1$ eine doppelte Berührung mit dem Grundkegelschnitte aufweist, aber den O-Punkt nur als ein einfaches Element besitzt. Sonst sind die Beziehungen analog jenen in (32) zu halten, wobei insbesondere die Doppelrolle der Paarindividuen $C^3_4\,C^3_4{}'$ im Auge zu behalten ist, welche die Linearconstruction der Schnittpunkte einer Grundkegelschnittstangente mit der Plancurve C^4_8 nach der Grundconstruction bedingt.

95. Die Knotenstrahlen des A-Punktes involvieren im Fundamentalnetze nach (36) ein separates Kegelschnittsnetz. Wir finden, dass ein Individuum K^2 dieses Netzes ebenfalls die beiden Hauptverzweigungen $V\,V_1$ als Basispunkte enthält. Außer diesen kann es nur noch zwei Punkte 1 2 mit dem Grundkegelschnitte k gemeinsam haben, welche dann die Schnittpunkte $I\,II$ des betreffenden Knotenstrahles g (Fig. 35) abbilden.

Von den Knotenstrahlen des A-Punktes sind die singulären Lagen besonders zu betrachten. Als solche erscheinen vor allem Haupt- und begleitende Verzweigungstangenten, denn die coincidierenden Knotentangenten identificieren sich mit dem o-Träger.

Einer begleitenden Verzweigungstangente g entspricht im Netze ein Kegelschnitt K^2 (respective ein Paar $K^2\,K^{2\prime}$), welcher den Grundkegelschnitt k einfach berührt. Der Berührpunkt ist Bild des betreffenden φ-Punktes (12). Ein solcher Kegelschnitt hat jedoch die Basispunkte $V\,V_1$ nur als einfache Elemente für sich, wie aus der reducierten (35) Beziehung, die stattfindet, begreiflich wird. Die Berührpunkte der zwei Bildkegelschnitte $K^2\,K^{2\prime}$ liegen auf einem Strahle des A-Punktes und dieser Strahl ist die Polare des φ-Punktes bezugs des Grundkegelschnittes k. Ebenso kommen der zweiten begleitenden Verzweigungstangente g_1, welche auf der Plancurve den Berührpunkt φ_1 hat, ein Paar Bildkegelschnitte $K^2_1\,K^2_1{}'$ zu. Die Berührpunkte der vier Bildkegelschnitte K^2 gehören einem vollständigen Vierecke an, dessen Diagonalpunkte die Elemente des Tripels $A\,O\,Z$ sind.

In dem fundamentalen Kegelschnittsnetze lassen sich ferner zwei Individuenpaare K^2 von der Eigenschaft nachweisen, dass jedes Paar den Grundkegelschnitt identisch in einem der beiden Hauptverzweigungspunkte VV_1 osculiert und in dem anderen schneidet. Ein solcher Punkt ist demnach sein eigenes Bild und die in ihm gehende Hauptverzweigungstangente wird durch jedes der beiden K^2-Individuen abgebildet. Dass in der That eine Osculation eines K^2-Individuums auf dem Grundkegelschnitte eintritt, geht daraus hervor, dass sich in dem betreffenden V-Punkte der Berührpunkt des Individuums vereinigt, was bekanntlich drei Elemente ausmacht.

96. Wir wollen noch auf einige Fälle der Individuen des Fundamentalnetzes (92) aufmerksam machen, welche des Interesses wegen Erwähnung verdienen. Wird nach der Abbildung der Knotentangente gefragt, so kann man sagen, dass sich hiefür im Polpunkte O concentrisch zwei doppeldeutige Strahlenbüschel herausstellen, in welchen uns eine kurze Überlegung die Polare $a \equiv z'$ offenbar als einen aus zwei zusammenfallenden Doppelelementen bestehenden Strahl ersehen lässt, welcher den Grundkegelschnitt in den Bildern VV_1 des Knotens A trifft.

Erscheint die g-Gerade der Ebene als Salmon'sche Polare $z' \equiv a$ (88), so erhält man im Fundamentalnetze ein Curvenpaar $C^4_6 C^4_6{}'$, in welchem jedes Individuum den Grundkegelschnitt k doppelt osculiert, was natürlich nur in den Punkten VV_1 möglich ist. Die beiden Osculationspunkte VV_1 repräsentieren zusammen sechs Elemente; es bleiben somit noch zwei Punkte, welche ein solches Bildindividuum C^4_6 mit dem Grundkegelschnitte k gemeinschaftlich hat: „Diese bilden die begleitenden Verzweigungen $\varphi\varphi_1$ ab." Dass übrigens jedes Individuum C^4_6 bezeichneter Gattung den O-Pol als Berührknoten, hingegen den A-Punkt als einfachen Knoten besitzt, geht aus dem Vorhergegangenen, sowie aus der Annahme der g-Geraden in dem vorliegenden speciellen Falle zur Evidenz hervor.

Endlich sei auch noch auf das Bild der unendlich fernen Geraden $g\infty$ der Ebene hingewiesen, welches nach (41) die Asymptotenelemente der Plancurve C^4_8 mit dem Berührknoten verzeichnet (Fig. 36). Dieses Bild ist im eindeutigen Sinne eine Curve C^4_6 des Fundamentalnetzes (92), welche den Grundkegelschnitt nach (89) in höchstens vier und zumindest in zwei

Punkten U schneidet, die den Erklärungen zufolge den Asymptotenelementen entsprechen. Dass der einfache Knoten G dieser Curve mit dem Mittelpunkte des Grundkegelschnittes coincidiert, liegt auf der Hand.

b) Die Verzweigungscurve.

97. Nimmt man einen variablen Knotenstrahl r an, so lassen sich aus seinen beiden Curvenpunkten $R R_1$, die er (Fig. 37) außer dem A-Punkte incident hat, an den Grundkegelschnitt k zwei Tangentenpaare ziehen, die also ein dem letzteren umschriebenes Vierseit bilden. Von den sechs Gegenecken dieser variablen Figur liegt der Voraussetzung gemäß das eine Paar $R R_1$ auf der Plancurve C^4_8 selbst; ein zweites Paar ist auf der Salmon'schen Polaren $a \equiv z'$, wie aus den Eigenschaften derselben, als harmonische Polare des A-Punktes (88) begreiflich ist; das dritte Paar $R' R'_1$ formiert einen geometrischen Ort.

Projiciert man das Punktenpaar $R' R'_1$, das sich, wie man leicht einsieht, auf einem Knotenstrahle r' befinden muss, weil der A-Punkt ein Diagonalpunkt des vollständigen Viereckes $R R_1 R' R'_1$ ist, auf den angenommenen Strahl r aus dem Cayley'schen Punkte Z, so erhält man abermals ein Paar Punkte $R'' R''_1$, welche dem besprochenen Curvenorte angehören. Auf diese Weise formieren die Geraden der Punkte $A Z$ zwei Strahlenbüschel, welche zweideutig sind, die aber wegen des ihnen gemeinsamen Strahles $| A Z | \equiv o$ in der eigenthümlich reducierten Lage sich befinden,[1]) dass das Centrum A dem Curvenorte als ein zweifacher Doppelpunkt, d. i. ein Berührknoten, das Centrum Z jedoch dem Erzeugnisse nicht angehört.

98. Das gefundene Resultat müsste auf eine Curve vierter Ordnung hinweisen; wenn man jedoch der Construction auf den Grund geht, so findet man Fig. 38, dass die Hauptverzweigungen $V V_1$ dem Curvenerzeugnisse als Doppelpunkte angehören, woraus geschlossen werden muss, dass dasselbe: in zwei Kegelschnitte zerfällt, welche sich im A-Punkte gegenseitig berühren und in den $V V_1$-Punkten einfach durchsetzen. Die Berührungstangente ist die Hesse'sche Polare $z \equiv | A O |$.

---

[1]) E. Weyr: „Beiträge zur Curvenlehre", p. 49.

Wird die Construction der Punktenelemente des Erzeugnisses weiter verfolgt, so ergibt sich, dass dieses insbesondere auch diejenigen Punktenquadrupel $I\,II\,I'\,II'$, $III\,IV\,III'\,IV'$ incident hat, die als Elemente der Plancurve $C^4{}_8$ auf dem Tangentenpaare liegen, das aus dem Cayley'schen Polpunkte Z an den Grundkegelschnitt möglich ist, welche Quadrupel einfach linear durch die Grundconstruction (6) aufgefunden werden.

99. Der Einfachheit wegen bezeichnen wir das geometrische Ortserzeugnis der erwähnten zwei Kegelschnitte mit dem Symbole K^4. Die weitere Untersuchung zeigt, dass diesem Erzeugnisse auf dem Grundkegelschnitte auch die Doppelbilder der begleitenden Verzweigungselemente $\varphi\varphi_1$ der Plancurve $C^4{}_8$ eigen sind. Dieses Ergebnis im Zusammenhalte mit demjenigen in (98) zeigt für das Erzeugnis K^4 die merkwürdige Eigenschaft an, dass dasselbe auf dem Grundkegelschnitte k alle eigentlichen Verzweigungselemente des Berührknotens A der Plancurve $C^4{}_8$ abbildet, weshalb wir dasselbe auch folgerichtig die Verzweigungscurve nennen werden.

Die Verzweigungscurve K^4 behält unter allen Umständen ihre Eigenschaft, dass der A-Punkt für sie, er möge nun für die zugrunde liegende Plancurve $C^4{}_8$ ein eigentliches oder ein isoliertes Element sein, ein Berührpunkt ist, wie man auch in den Fig. 38 und 37 einsehen kann.

100. Die vorstehenden Beziehungen sprechen, nebenbei gesagt, für eine sehr einfache lineare Construction der Aufgabe: „Von einem beliebigen Knotenstrahle r Fig. 37 ist ein Curvenpunkt R bekannt; man bestimme auf diesem Strahle den zweiten Curvenpunkt R_1." Wir ziehen aus R das Grundkegelschnittstangentenpaar; aus dessen Schnitten mit der Salmon'schen Polaren $a \equiv s'$ geht jedesmal eine zweite Tangente an den Grundkegelschnitt k, welche den Träger r des Paares RR_1 in dem gesuchten R_1-Punkte identisch trifft.

101. Die harmonischen Eigenschaften der Salmon'schen Geraden $a \equiv s'$ führen uns bei eingehender Betrachtung zu weiteren wichtigen Ergebnissen. Jeder Knotenstrahl r (radius vector) ist ein Element einer durch den A-Punkt auf dem Grundkegelschnitte k hervorgerufenen quadratischen Involution, wie ja bekannt ist. In dieser Weise fassen wir die beiden involutorischen Grundgebilde näher ins Auge, deren eines durch

die Strahlen $r \equiv | R R_1 |$ im Centrum A, während das andere ihm perspectivische durch die Punkte ξ auf der Salmon'schen Geraden a repräsentiert wird. Es geht sofort aus (97) hervor, dass jener Strahl r', welcher der Träger des Punktenpaares $R' R'_1$ ist, das conjugierte Element von r in der Strahleninvolution A vorstellt. Daraus ist zu schließen, dass nicht nur das erzeugende Büschel A in (97), sondern auch dasjenige des Centrums Z, wie logisch folgt, Involutionsgebilde sind, und da nach E. Weyr[1]) das projectivische Resultat ein einziger Kegelschnitt wäre, so wäre auf den ersten Blick die dort gefundene Erzeugniscurve K^4 zu corrigieren. Dieses ist aber nicht der Fall, wenn gleichzeitig die Eigenschaft des den beiden Büscheln (respective Involutionen) gemeinschaftlichen Strahles $| A Z | \equiv o$ berücksichtigt und ferners auch bedacht wird, dass man immerhin Involutionsgebilde als zweideutige Gebilde auffassen muss.

Legt man sich (Fig. 37) die Figur $R' R'_1 R'' R''_1$ in (97) zurecht, so findet man, dass deren Verbindungslinien ein vollständiges Viereck anzeigen, in welchem die Paare $R' R'_1$, $R'' R''_1$ Gegenecken sind; das dritte Gegeneckenpaar setzt sich aus den Punkten $Z \xi$ zusammen, welche auf der Salmon'schen Geraden $a \equiv z'$ liegen, und die Diagonalen dieser vollständigen Figur sind die Geraden $a r r'$ (Diagonaldreieck). Dazu muss bemerkt werden, dass für dieses variable Viereck die Diagonale a constant bleibt, während das Paar $r r'$ in der Weise sich verändert, dass immer beide Elemente conjugiert der Strahleninvolution A angehören und somit für die gesammten Figuren dieser Art constant der A-Punkt Diagonalenschnitt verbleibt. Ebenso ist der Cayley'sche Z-Pol identisch gemeinsam, während der ξ-Punkt diesen Figuren veränderlich sich auf der a-Polaren fortbewegt.

102. Einem ξ-Punkte des Involutionsträgers $a \equiv z'$ entspricht conjugiert ein ξ_1-Element: „Verbindet man den ξ_1-Punkt mit den Elementen des (Fig. 37) Quadrupels $R' R'_1 R'' R''_1$, so sind diese Verbindungslinien Tangenten an die Verzweigungscurve K^4."

Dieses bemerkenswerte Gesetz findet somit auch seine Anwendung für den Fall, wenn der r-Strahl in die Trägergerade o übergeht, welchem dann in der Strahleninvolution A offenbar

[1]) „Beiträge zur Curvenlehre", p. 50.

begleitenden Verzweigungen $\varphi\varphi_1$, wie das Tangentenpaar, das aus dem Berührknoten A an diesen Kegelschnitt geht, diese Gerade in den Hauptverzweigungen VV_1 trifft."[1])

Ist nun einer der Kegelschnitte $K^2 K^{2\prime}$ durch fünf beliebige Bestimmungsstücke, wozu man auch die in (102) angeführten Tangentenelemente eines ζ_1-Punktes zu rechnen hat, markiert, so kann man jetzt die o-Gerade als eine Secante ansehen, welche den betreffenden Kegelschnitt K^2 in zwei Punkten schneidet, deren einer als der A-Punkt bekannt ist, während der andere R^0 zu suchen ist — eine Elementarconstruction,[2]) die ohne Schwierigkeit ausgeführt wird. Mit Hife des obigen Satzes findet man sodann unmittelbar die gesuchten Elemente $\varphi\varphi_1$ auf der Geraden a.

106. Schließlich sei noch auf eine interessante Eigenschaft aufmerksam gemacht. Wir haben in (102) angeführt, dass von einem ζ_1-Punkte der Salmon'schen Polaren a an die Verzweigungscurve ein Tangentenquadrupel zieht. Es ist begreiflich, dass die ζ_1-Punkte die gesammten Elemente der Geraden a als Punktenträger erfüllen. Unter diesen wurde bereits der O-Pol als eine Singularität hervorgehoben, indem von ihm Tangenten an die Verzweigungscurve K^4 ziehen, welche ihre Berührpunkte auf dem o-Träger in $AR^0R^0_1$ haben, weshalb man diesen Träger als eine harmonische Polare des O-Poles in Bezug der Verzweigungscurve ansehen muss. Außer dem O-Pole bildet der Z-Pol, d. i. der Schnitt (ao), eine zweite Singularität von der Eigenschaft, dass von ihm, als einem ζ-Punkte, an das Doppelpaar $K^2 K^{2\prime}$ ein Paar Doppeltangenten gehen. Es ist aber sehr leicht einzusehen, dass das Paar OZ nichts anderes als die Doppelelemente der Punkteninvolution vorstellt, welche nach (101) durch den A-Punkt auf der a-Polaren hervortritt. Aus diesem Grunde müssen sich auch die Geraden, die man erhält, wenn man die Berührpunkte der zwei in Z gehenden Doppeltangenten miteinander verbindet, im O-Pole oder im A-Punkte schneiden.

---

[1]) Anmerkung. Es ist anzunehmen, dass eine analoge Beziehung zwischen den Verzweigungselementen, die auf den Polaren einer Plancurve C^4_8 mit zwei Doppelpunkten liegen, und den Tangenten des Grundkegelschnittes, welche diese Verzweigungselemente incident haben, besteht, wodurch der Satz verallgemeinert erschiene.

[2]) Siehe Reye: „Geometrie der Lage", I. Bd., p. 61.

nach der Construction (97) ergänzen, sofern es sich um jeden der Theilkegelschnitte $K^2 K^{2\prime}$ für sich handelt.

Für die Construction der begleitenden Verzweigungen $\varphi \varphi_1$ kommen linear zwei Aufgaben zur Betrachtung, die sich jedoch auf bekannte Elementarconstructionen zurückführen lassen.

104. 1. Aufgabe. Es sei vorausgesetzt, dass (wie in Fig. 38) reelle Hauptverzweigungen $V V_1$ gegeben sind. In diesem Falle ist die Salmon'sche Polare $a \equiv z'$ eine eigentliche gemeinschaftliche Secante zwischen dem Grundkegelschnitte k und jedem der beiden Kegelschnitte $K^2 K^{2\prime}$ der Verzweigungscurve. Nun braucht man nur noch drei von den in (103) bemerkten Bestimmungsstücken, worunter insbesondere auch der A-Punkt und seine den beiden Kegelschnitten $K^2 K^{2\prime}$ gemeinschaftliche Tangente, d. i. die Hesse'sche Polare z, auszuwählen, um nach Schröter[1]) die Construction der zwei übrigen gemeinschaftlichen Punkte ff', welche zwischen dem Grundkegelschnitte k und dem einen der Theilkegelschnitte $K^2 K^{2\prime}$ stattfinden, durchzuführen, wodurch somit die Bilder der $\varphi \varphi_1$-Elemente auf linearem Wege erhalten werden, indem die betreffenden Tangenten in jenen Bildern an den Grundkegelschnitt die Salmon'sche Gerade in den begleitenden Verzweigungen $\varphi \varphi_1$ der Plancurve $C^4{}_8$ schneiden.

105. 2. Aufgabe. Sind die Hauptverzweigungen $V V_1$ (wie in Fig. 37) imaginär, so ist doch bekanntlich die Salmon-sche Polare a als deren Träger immer reell und es ließe sich die vorstehende Lösung nach der 1. Aufgabe, wenn auch etwas umständlicher, trotzdem erzielen. Doch wird man überhaupt das gestellte Problem weit einfacher durch nachstehende Construction der Lösung zuführen, wenn man von den in (102) bezeichneten Schnittpunkten $R^0 R^0{}_1$, welche der o-Träger mit den beiden Theilkegelschnitten $K^2 K^{2\prime}$, außer dem gemeinschaftlichen Berührknoten A, enthält, ausgeht. Denn in dieser Beziehung können wir nachträglich den folgenden, für die dermalen betrachteten Plancurven $C^4{}_8$ höchst wichtigen Satz aussprechen:

„Die Tangentenpaare, welche aus den $R^0 R^0{}_1$-Punkten an den Grundkegelschnitt ziehen, treffen die Salmon'sche Gerade a identisch gerade so in den

---

[1]) „Theorie d. Kegelschnitte etc.". p. 238.

Der vorliegende Fall ist bedingt durch die Annahmen, dass die Knotentangente o den Grundkegelschnitt k in reellen Punkten NN_1 trifft und der A-Punkt als eigentlicher Berührknoten der Curve C^4_8 außerhalb dieses Kegelschnittes liegt.

109. Typus XIX. (Fig. 39.) Der Berührknoten A ist ein Einsiedler, d. h. er befindet sich im Innern des Grundkegelschnittes k und die Knotentangente o schneidet nothwendig letzteren wieder in reellen NN_1-Punkten.

Die Curve C^4_8 besteht aus zwei Theilen, die, jeder für sich, einen continuierlichen Zug mit einem Paare Asymptoten vorstellen, welche beiden Zügen identisch eigen sind. Der Verlauf und die Form gleichen dem Typus VIII in Fig. 18 (55). Entsprechend der Lage des A-Punktes gibt es keine Hauptverzweigungen, was sich dadurch zeigt, dass die Curve vom Grundkegelschnitte nicht berührt erscheint. Das auf der Salmon'schen Polaren a begleitende Paar $\varphi\varphi_1$ ist jedoch, wie immer, reell. Von den acht Nebenverzweigungen ν sind die Elemente nur paarweise auf den N-Tangenten reell, so dass die Plancurve mit dem Grundkegelschnitte nur vier gemeinschaftliche Tangenten bildet.

Der betrachtete Curventypus repräsentiert den einzig möglichen Fall, bei welchem ein Paar Doppeltangenten vorkommen (90). Diese ziehen aus dem Cayley'schen Punkte $Z \equiv (ao)$ und die Verbindungslinien ihrer Berührpunkte B gehen durch die Punkte AO entsprechend den in (20) aufgestellten Gesetzen, wenn man die diesbezügliche Modification, indem der A-Punkt nach (90) eine Coincidenz mit einem Cayley-schen Punkte Z' begreift, berücksichtigt. Aus Z gehen außer dem besagten Doppeltangentenpaare nur noch zwei Curventangenten, deren Berührpunkte $\delta\delta_1$ in Übereinstimmung mit (21) auf der Hesse'schen Polaren z liegen.

110. Typus XX. (Fig. 32.) Die Knotentangente o schneidet den Grundkegelschnitt k nicht. Dieses hat zur Folge, dass der A-Punkt unter allen Umständen ein eigentlicher Berührknoten des Curvenerzeugnisses C^4_8 ist. Wir erhalten als das letztere eine Type, welche recht augenscheinlich sich als Übergangsfall zwischen den Curventypen II in (48) Fig. 14 und XIV in (72) Fig. 26 darstellt.

Der eine Bestandtheil des vorliegenden Typus zeigt, wie in jenen zwei Fällen, ein Oval; dieses wird in den reellen

Hauptverzweigungen $V V_1$ vom Grundkegelschnitte, also doppelt berührt. Der andere Curventheil combiniert sich aus einem Paare von Ästen, die im A-Punkte den Knotencontact bilden und das einzige Paar reeller Asymptoten incident haben. Auf dem einen dieser Äste kommen auch die begleitenden Verzweigungen $\varphi \varphi_1$ nach der Modification (88) unseres „classischen Gesetzes" auf der Salmon'schen Polaren a vor.

Doppeltangenten besitzt der Curventypus nicht; wohl aber ziehen wieder aus dem nicht in A coincidierten Z-Punkte ein Paar Tangenten an die Plancurve, deren Berührpunkte $\delta \delta_1$ auf der Hesse'schen Polaren $z \equiv | A O |$ liegen, und wenn man wieder, so wie in den früheren Fällen, aus diesen Berührpunkten an den Grundkegelschnitt k die Tangentenpaare zieht, so treffen sich ihre Elemente in anderer Paarung einerseits in den begleitenden Verzweigungen $\varphi \varphi_1$ der Salmon'schen Polaren $a \equiv z'$, andererseits in Punkten $R^0 R^0_1$ der Knotentangente o, die als Elementenpaar mit dem Punktenpaare AZ auf dem o-Träger eine Harmonität anzeigen, welches Gesetz übrigens allgemein ist.

111. Es wird sich den vorausgegangenen Annahmen des Grundkegelschnittes k entgegen dem o-Träger zunächst der Fall anreihen, dass der A-Punkt auf diesem Kegelschnitte selbst liegt, die o-Gerade aber sonst noch in einem N-Punkte diesen schneidet (Fig. 40).

Verfolgt man das Constructionsgesetz (6), so ergibt sich ein höchst interessantes Resultat: „Das Curvenerzeugnis ist unicursal vom Symbole C^4_5 mit einem in A dreifachen Knoten."

Es vereinigen sich nämlich in A zwei Doppelpunkte mit einer Spitze, welchen zwei Tangenten zukommen: die Knotentangente, welche den einen Zweig der Curve berührt und gleichzeitig Grundkegelschnittstangente ist, als welche sie auch das reelle Paar Nebenverzweigungen vereinigt, und weiters die Spitzentangente, die sich mit der o-Geraden identificiert. Aus diesen Gründen zählt das Erzeugnis zur Type VIII der Plücker'schen Classification.[1])

Die gesammten Verzweigungen aller drei Gattungen, mit Ausnahme jenes Quadrupels der Tangente des von A verschie-

---

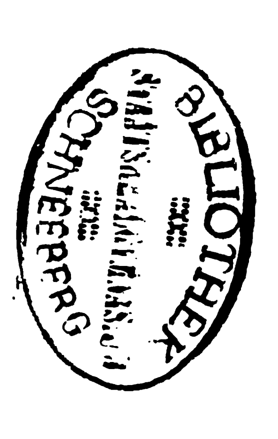
[1]) Salmon-Fiedler: „Analyt. Geom. d. höh. Plancurv.", p. 261.

denen zweiten N-Punktes, von welchem übrigens ein Paar imaginär ist, coincidieren im A-Punkte. Die o-Gerade repräsentiert weiters auch das eine Doppeltangentenpaar des einen der in A coincidierenden Cayley'schen ZZ'-Punkte, während das zweite Doppeltangentenpaar der vier in einer Unicursalcurve vierter Ordnung vorkommenden Elemente dieser Art mit der im Tripelknoten A gehenden Grundkegelschnittstangente identisch vertreten wird.

112. Endlich sei auch noch des Falles Erwähnung gethan, wo der Grundkegelschnitt k von dem o-Träger in einem Punkte K tangiert wird. Die Beziehung gestaltet sich bei Durchführung der Grundconstruction als eine projectivische, wie bei den analogen Annahmen in (62) und (74), aus welchem Grunde das Erzeugnis wieder ein Kegelschnitt K^2 wie dort sein wird. Der Voraussetzung für die dermalige Beziehung des zweifachen Doppelpunktes A der projectivischen Reihen $X\xi$ auf dem o-Träger gemäß, wird dieser Kegelschnitt K^2 nur in einem Y-Punkte des Grundkegelschnittes berührt, der auf der Polaren a liegt und durch die zweitmögliche Tangente aus A an letzteren hervorgeht. Außer diesem Y-Punkte gibt es noch einen auf der a-Polaren begleitenden φ-Punkt, in welchem die zweite Tangente des A-Punktes den Erzeugniskegelschnitt K^2 berührt.

Dass der A-Punkt dem Erzeugnisse nicht als Element angehört, ist aus dem Vorausgegangenen klar. Wohl aber wird der Kegelschnitt K^2 von der o-Geraden in einem Punktenpaare YY' geschnitten, dessen Elemente ähnlich wie in (74) gefunden werden, wenn man den Tangierpunkt K der Grundconstruction gemäß dem Doppelsinne der zwei Projectionscentra SS' unterwirft.

Würde der K-Punkt in A fallend angenommen, dann fände in ihm zwischen dem Grund- und dem Erzeugniskegelschnitte, wie leicht abzuleiten ist, eine vierpunktige Berührung statt.



VI. Abtheilung.

Physik und Chemie.



I.

Die Verwendung der Oxalsäure

zu

Experimenten und Reactionen.

Von

Kais. Rath Julius Sonntag,

Professor an der Landesrealschule in Znaim.



Vorbemerkung.

Die Eigenschaften der Oxalsäure machen es erklärlich, dass dieselbe zu vielfachen Experimenten und zahlreichen Reactionen geeignet ist. Sie wirkt einerseits kräftig salzbildend, andererseits ist sie ein sehr wirksames Reductionsmittel. Die dabei beobachteten Erscheinungen sind mehrfach solche, dass selbe als zu Demonstrationen beim Chemieunterrichte geeignet erscheinen. Die Darstellung der Oxalate, die Untersuchung dieser Verbindungen. sowie deren Zersetzungen sind sehr lehrreich und bieten keine besonderen experimentellen Schwierigkeiten, so dass solche Präparate und derartige Zersetzungen auch von Schülern, die im zweiten Jahre praktisch arbeiten, im Schülerlaboratorium ausgeführt werden können.

Nach dem Gesagten kann der Zweck der vorliegenden Abhandlung nicht darin bestehen, die Oxalsäure, ihre Derivate und Verbindungen ausführlich und erschöpfend zu behandeln, es sollen nur aus der Fülle der möglichen Experimente und Reactionen derartige angeführt werden, die entweder zu Vortragsversuchen oder zu Schülerarbeiten geeignet erscheinen.

Wenn auch die größere Zahl der angeführten Versuche als bereits bekannt angesehen werden muss — besonders wird auf die eingehenden Arbeiten von Souchay und Lensen verwiesen —, so werden doch einige Beobachtungen und Darstellungsmethoden, sowie mehrere quantitative Bestimmungen angeführt, die als neu bezeichnet werden können.

Da bei den vorkommenden Gewichtsbestimmungen darauf Rücksicht genommen wurde, dass dieselben unter Aufsicht des Lehrers auch von Schülern ausgeführt werden können, so wurde

bei denselben fast ausnahmlos auf die Ermittlung der Milligramme verzichtet. Fast alle Wägungen wurden demnach auf einer feineren Tarawage ausgeführt, nur in einigen wenigen Fällen, wo größere Genauigkeit erforderlich war, wurde die analytische Wage benützt.

Darstellung der Oxalsäure. 18 *g* gepulverter Zucker werden in einem geräumigen Kolben mit 100 cm^3 Salpetersäure übergossen, welche bei der Wägung ein Gewicht von 137 *g* zeigte. Der Kolben ist mit einem Stöpsel und einem 40 *cm* langen, 1 *cm* weiten Glasrohr versehen. Die Erwärmung des Kolbens erfolgt im Sandbade und muss mit größter Vorsicht vorgenommen werden. Sobald die lebhafte Entwicklung rothbrauner Dämpfe beginnt, entfernt man die Lampe und umwickelt das weite Glasrohr mit einem kalten nassen Baumwolldocht. Die Operation muss wegen der starken Gasentwicklung unter dem Herde bei gutem Gasabzug vorgenommen werden. Lässt die Gasentwicklung nach, so beginnt man wieder mit der Erwärmung und allmählich steigert sich die Erhitzung bis zur Kochtemperatur. Hat die Gasentwicklung nahezu aufgehört, so gießt man den Kolbeninhalt in eine Porzellanschale und dampft bis auf etwa 30 cm^3 ein. Beim Erkalten krystallisiert die Oxalsäure heraus, und zwar erhält man bei dieser ersten Krystallisation bei 15 *g* Säure, aus der Mutterlauge können noch 3—4 *g* erhalten werden. Die Ausbeute ist geringer als die Hälfte jener Menge, die durch die vollständige Umwandlung des Zuckers in Oxalsäure entstehen könnte, es wird demnach mehr als die Hälfte des Zuckers zu Kohlensäure verbrannt.

Sublimation der Oxalsäure. Reine krystallisierte Oxalsäure wird durch einige Stunden bei einer Temperatur von 70—80° erhalten, dann gerieben und bei 100° vollständig entwässert. Zur Sublimation im Kleinen lässt sich mit Vortheil ein tubulierter Retortenvorstoß von etwa $^1/_2$ *l* Fassungsraum verwenden. In denselben bringt man beiläufig 20 *g* vollständig wasserleere Säure. Der Tubulus des Retortenvorstoßes ist mit einem luftdicht schließenden Stöpsel mit Glasröhre und Kautschukschlauch versehen, welch letzterer durch einen kräftigen Quetschhahn und zur größeren Sicherheit außerdem noch mit einem Stück Glasstab verschlossen ist. Der Hals des Vorstoßes trägt zunächst

einen losen Baumwollpfropf und am Ende einen luftdicht schließenden Kautschukstöpsel mit Glasrohr, das mit einem kräftig wirkenden Aspirator von mindestens 2 *m* Fallhöhe des Wassers in Verbindung steht. Die Erhitzung des Vorstoßes erfolgt in einem Paraffinbade, und wird dessen Temperatur möglichst constant zwischen 155—160° gehalten. Beschlägt sich die Kugel des Sublimationsgefäßes mit sublimierter Oxalsäure, so wird der Quetschhahn am Tubulus für einige Secunden geöffnet, wodurch der Aspirator in Thätigkeit gesetzt wird. Dadurch werden die gebildeten Dämpfe der Oxalsäure in den Hals des Sublimationsgefäßes gesaugt, woselbst sie vor dem Baumwollpfropfen zum größten Theil in Form von langen glänzenden Nadeln verdichtet werden. Hierauf wird der Tubulus wieder geschlossen, es entsteht wieder ein luftverdünnter Raum im Apparate — bei 2 *m* Fallhöhe des Aspirators tritt eine Verdünnung auf $^4/_5$ Atmosphären ein —, es sammeln sich wieder Oxalsäuredämpfe an, die durch Öffnen des Tubulus in den Hals des Vorstoßes getrieben und dort verdichtet werden. Auf diese Weise können in kurzer Zeit einige Gramm schön sublimierter Oxalsäure erhalten werden. Interessant ist dabei die Wahrnehmung, dass trotz des vorgelegten Baumwollstopfens und eines 2 *m* langen Verbindungsschlauches zwischen Apparat und Aspirator doch eine kleine Menge Oxalsäure bis in den Aspirator mitgerissen wird, wovon man sich überzeugen kann, wenn man das Wasser des Aspirators mit Lackmus blau färbt. Schon nach kurzer Function des Apparates färbt sich das Wasser durch die mitgerissene Oxalsäure deutlich roth.

Normaloxalsäure. Zur Bereitung einer genauen Normaloxalsäure braucht man chemisch reine Säure, die man sich durch Umkrystallisieren des käuflichen reinen Präparates darstellt. Die Lösung der Normalsäure muss so beschaffen sein, dass dieselbe ein gleiches Volumen Normalnatronlauge neutralisiert. Der Process der Neutralisation erfolgt nach der Gleichung:

$$2\,NaOH + H_2C_2O_4 = Na_2C_2O_4 + H_2O.$$

Da aber die Normalnatronlauge nur NaOH Gramm = 40 *g* im Liter enthält, so müssen zur Herstellung von 1 *l* Normaloxalsäure $^1/_2$ $(H_2C_2O_4 + 2H_2O)$ Gramm, d. i. 63 *g* reiner krystallisierter Säure verwendet werden. Es enthält demnach 1 cm^3 einer solchen Lösung 63 *mg*, daher enthalten 200 cm^3 12·6 *g* der krystallisierten Säure. Bei der Darstellung der oxalsauren Salze kann die Normal-

oxalsäure mit Vortheil verwendet werden, weil dadurch wenigstens eine genauere Wägung erspart wird.

Die oxalsauren Salze.

Kaliumoxalat, $K_2C_2O_4 + H_2O$. Man neutralisiert 200 cm^3 warme Normaloxalsäure mit 13·8 *g* Kaliumcarbonat. Wird die Flüssigkeit eingedampft und der Krystallisation überlassen, so erhält man 18 *g* Kaliumoxalat. Erhitzt man die zerriebenen Krystalle längere Zeit auf 160—180°, so erhält man das wasserfreie Salz.

10 *g* wasserfreies oxalsaures Kalium werden in einer kleinen Retorte stark erhitzt, es findet eine Zersetzung statt, bei welcher selbst bei vorsichtiger Temperatursteigerung eine Abscheidung von Kohle kaum zu vermeiden ist. Es findet eine lebhafte Entwicklung von Kohlenoxydgas, dem eine ganz geringe Menge von Kohlensäuregas beigemischt ist, statt. Versieht man die Retorte mit einem Gasleitungsrohre, so kann das Gas entweder entzündet werden — es brennt mit ruhiger blauer Flamme — oder man kann das Gas über Wasser auffangen. Leitet man das Gas kurze Zeit durch Kalkwasser, so beweist die eintretende Trübung die Beimischung von Kohlensäuregas. Die größte Menge des Salzes wird zersetzt nach der Gleichung: $K_2C_2O_4 = K_2CO_3 + CO$, ein kleinerer Theil des Oxalates nach der Gleichung:

$$2K_2C_2O_4 = 2K_2CO_3 + C + CO_2.$$

Man erhält aus 10 *g* des wasserfreien Salzes mehr als 1 *l* Kohlenoxydgas.

Saures Kaliumoxalat, KHC_2O_4. Dieses schwerlösliche Salz kann auf verschiedene Weise erhalten werden. Man neutralisiert 100 cm^3 Normaloxalsäure mit 6·9 *g* Kaliumcarbonat, fügt dann 100 cm^3 der Normalsäure zu, löst das ausgeschiedene Salz wieder durch Erhitzen bis zum Kochen und lässt dann krystallisieren.

Kaltgesättigte Lösungen von Chlorkalium, Kalisalpeter, chlorsaurem Kali, gelbem und rothem Blutlaugensalz geben, mit ebenfalls kaltgesättigten Oxalsäurelösungen im Überschuss versetzt, nach dem Schütteln feinkrystallinische Niederschläge von $KHC_2O_4 + H_2O$. Die Flüssigkeiten enthalten nach der Abscheidung die entsprechenden freien Säuren. Das Krystallmehl wird mit kaltem

Wasser gewaschen, in kochendem Wasser gelöst und wieder krystallisieren gelassen, wodurch das wasserfreie Salz erhalten wird.

Vierfach oxalsaures Kalium, $KH_3(C_2O_4)_2 + 2H_2O$. In eine kochende Lösung von 10 *g* kryst. Oxalsäure trägt man 4 *g* Kalisalpeter ein und lässt krystallisieren. Man erhält 10 *g* des verlangten Salzes und die Mutterlauge enthält freie Salpetersäure, die durch neutrale Indigolösung oder auch durch Erwärmen mit Kupferspänen nachgewiesen werden kann. Statt des Kalisalpeters kann zu dieser Darstellung auch Chlorkalium verwendet werden. Die über den ausgeschiedenen Krystallen stehende Flüssigkeit enthält dann freie Salzsäure, die man abdestillieren kann. 10 *g* kryst. Oxalsäure erfordern 2·96 *g* Chlorkalium. Der Process erfolgt nach der Gleichung:

$$2H_2C_2O_4 + KCl = KH_3(C_2O_4)_2 + HCl.$$

Ammoniumoxalat, $(NH_4)_2C_2O_4 + H_2O$. Zu einer warmen Lösung von 200 cm^3 Normaloxalsäure setzt man vorsichtig Ammoniakflüssigkeit bis zur genau neutralen Reaction. Nach dem Eindampfen erhält man nahe an 14 *g* des im kalten Wasser schwerlöslichen Salzes. Durch vorsichtiges Erhitzen bei 100° kann das Salz auch wasserfrei erhalten werden; wird die Erhitzung vorsichtig weiter fortgesetzt, so lange nur Wasserdämpfe entweichen, so verbleibt im Rückstande Oxamid, gemengt mit unzersetztem Ammoniumoxalat. $(NH_4)_2C_2O_4 = 2H_2O + (NH_2)_2C_2O_2$. Mischt man diesen Rückstand in einem kleinen Kölbchen mit Phosphorpentoxyd, wie man selbes leicht durch Verbrennen von Phosphor unter einer Glasglocke erhalten kann, und erhitzt vorsichtig das Gemenge in dem Kölbchen mit Gasleitungsrohr im Sandbade, so entwickelt sich Cyangas, das man von Kalilauge absorbieren lässt. $(NH_2)_2C_2O_2 = 2H_2O + 2CN$; $2KOH + 2CN = KCN +$ $+ KCNO + H_2O$. Setzt man zur Cyankaliumhaltigen Kalilauge oxydierten Eisenvitriol, erwärmt und macht dann mit Salzsäure sauer, so erhält man eine beträchtliche Menge von Berlinerblau. Ein anderer Theil der Flüssigkeit wird mit Schwefelsäure destilliert. Das Destillat riecht deutlich nach Blausäure und gibt, mit Schwefelammonium bis zur Entfärbung gekocht, auf Zusatz von Eisenchlorid eine blutrothe Färbung von Ferrisulfocyanat.

Natriumoxalat, $Na_2C_2O_4$. Man neutralisiert 200 cm^3 warme Normaloxalsäure mit 10·6 *g* wasserfreien Natriumcarbonats. Aus der neutralen Flüssigkeit erhält man nach dem Eindampfen über 13 *g* des wasserfreien Salzes. Dasselbe zeigt beim stärkeren

Erhitzen die analoge Zersetzung wie das Kaliumoxalat. Aus 10 *g* Natriumoxalat wurden 1350 cm^3 Kohlenoxydgas, bei 740 *mm* Luftdruck und bei 15° Temperatur, erhalten; es sind dies nur 75 % der berechneten Menge, dementsprechend enthielt der Rückstand auch eine beträchliche Menge von ausgeschiedener Kohle.

Saures Natriumoxalat, $NaHC_2O_4 + H_2O$. Neutralisiert man 100 cm^3 Normaloxalsäure mit 5·3 *g* Natriumcarbonat und fügt dann noch 100 cm^3 Normalsäure hinzu, so scheidet sich das Salz als feinkrystallinisches Pulver aus.

Kaltgesättigte Lösungen von Oxalsäure und Kochsalz geben beim Schütteln dasselbe Salz. Die Ausscheidung ist sehr reichlich, wenn entweder überschüssiges Kochsalz oder auch, wenn überschüssige Oxalsäure verwendet wird.

$$NaCl + H_2C_2O_4 = NaHC_2O_4 + HCl.$$

Wird die Mutterlauge destilliert, so erhält man eine verdünnte Salzsäure.

Bariumoxalat, $2BaC_2O_4 + H_2O$. Zu 200 cm^3 Normaloxalsäure mischt man eine kalte concentrierte Lösung von 24·4 *g* kryst. Chlorbariums. Der getrocknete Niederschlag — 23 *g* — verliert erst beim Erhitzen auf 150° vollständig sein Krystallwasser. $BaCl_2 + H_2C_2O_4 = BaC_2O_4 + 2HCl$.

Saures Bariumoxalat, $BaH_2(C_2O_4)_2 + 2H_2O$. Eine kochend heiße Lösung von 12·2 *g* kryst. Chlorbariums wird mit 200 cm^3 heißer Normaloxalsäure gemischt. Es scheiden sich 17 *g* nadelförmige Krystalle des in Wasser löslichen Salzes aus. $BaCl_2 + 2H_2C_2O_4 = BaH_2(C_2O_4)_2 + 2HCl$.

Strontiumoxalat, $SrC_2O_4 + H_2O$. 200 cm^3 heiße Normaloxalsäure werden mit einer heißen Lösung von 21 *g* wasserfreien tessularen Strontiumnitrats gefällt. Man erhält 19 *g* des verlangten Salzes und die Flüssigkeit enthält neben einer ganz geringen Menge freier Oxalsäure ungebundene Salpetersäure, von deren Gegenwart man sich durch Erwärmen der Flüssigkeit mit Kupferspänen überzeugen kann.

$$Sr(NO_3)_2 + H_2C_2O_4 = SrC_2O_4 + 2HNO_3.$$

Calciumoxalat, $CaC_2O_4 + H_2O$. Aus 10 *g* Marmor bereitet man sich eine Lösung von Chlorcalcium. Zu dieser Lösung setzt man 200 cm^3 Normaloxalsäure, zu welcher man jedoch früher überschüssige Oxalsäure bis zur kalten Sättigung gefügt hat. Die Menge des Niederschlages beträgt über 14 *g* und die

Flüssigkeit enthält neben der überschüssigen Oxalsäure freie Salzsäure und nur Spuren von Chlorcalcium. Die vollständige Entwässerung des Calciumoxalates gelingt erst bei 160—180°. Die Zersetzung des Salzes beim starken Erhitzen erfolgt unter Ausscheidung von Kohle und Entwicklung von Kohlenoxyd und geringen Mengen von Kohlensäuregas. Wird die Zersetzung in einer engen Eprouvette vorgenommen, so kann das sich entwickelnde Kohlenoxydgas an der Mündung der Eprouvette entzündet werden. Es finden folgende Processe statt:

$$CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + H_2O + CO_2; \quad CaCl_2 + H_2C_2O_4 = CaC_2O_4 + 2HCl; \quad CaC_2O_4 = CaCO_3 + CO; \quad 2CaCO_3 = 2CaCO_3 + C + CO_2.$$

Magnesiumoxalat, $MgC_2O_4 + 2H_2O$. Man löst 4 *g* gebrannte Magnesia in Essigsäure und fällt die heiße Lösung mit 200 cm^3 Normaloxalsäure. Verwendet man etwas überschüssige Oxalsäure, so ist die Fällung erschöpfend. Man erhält 14·8 *g* Niederschlag; die vom Niederschlage abfiltrierte Lösung gibt auf Zusatz von Ammoniak und Natriumphosphat keinen Niederschlag. Beim Erhitzen des entwässerten Salzes findet eine glatte Zersetzung statt, es entwickelt sich ein Gemenge von gleichen Raumtheilen Kohlenoxyd- und Kohlensäuregas und eine Ausscheidung von Kohle findet nicht statt. Das entweichende Gasgemisch brennt mit blauer Flamme. Nach beendigter Zersetzung hinterbleibt ein Rückstand, der sich in Salzsäure ohne Aufschäumen löst, demnach aus reiner Magnesia besteht.

$$MgC_2O_4 = MgO + CO + CO_2.$$

Zinkoxalat, $ZnC_2O_4 + 2H_2O$. Zu einer erwärmten Lösung von 28·7 *g* Zinkvitriol setzt man 200 cm^3 Normaloxalsäure, man erhält über 18 *g* des lufttrockenen Salzes und die Flüssigkeit enthält freie Schwefelsäure. Das oxalsaure Zink lässt sich schon bei 100° entwässern. Beim Erhitzen zerfällt dasselbe glatt in ZnO, CO und CO_2. Wird die Zerlegung in einer engen Eprouvette vorgenommen, so kann das entweichende Gas entzündet werden und dasselbe brennt ruhig bis zur vollendeten Zersetzung mit blauer Flamme. Zur volumetrischen Bestimmung der entwickelten Gasmengen wurde 2 *g* entwässertes Zinkoxalat in einer Eprouvette mit Gasleitungsrohr erhitzt und das entbundene Gas in einem Messcylinder aufgefangen. Bei einem Barometerstande von 740 *mm* und einer Temperatur von 17° wurden circa 600 cm^3 des Gasgemenges erhalten. Nach zweitägigem Stehen

des Gasgemisches über Natronlauge verblieben bei 310 cm^3 unabsorbiertes Gas (Kohlenoxyd und einige Cubikcentimeter Luft aus der Eprouvette). Die durch das Experiment gefundenen Gasmengen stimmen unter Berücksichtigung der primitiven Art der Ausführung des Versuches genügend genau mit den berechneten Mengen. 2 *g* Zinkoxalat sollen bei einem Luftdruck von 740 *mm* und bei einer Temperatur von 17° eine Kohlenoxydgasmenge von 293 cm^3 liefern.

Manganoxalat, $MnC_2O_4 + 2H_2O$. Man mischt die kochendheiße Lösung von 20 *g* kryst. Chlormangans mit 200 cm^3 heißer Normaloxalsäure. Nach dem Erkalten sammelt man den weißen Niederschlag, der die oben angegebene Wassermenge enthält. Die Ermittlung des Wassergehaltes gelingt durch längeres Erhitzen auf 100°. Die erzielte Ausbeute bei der Fällung ist geringer als die berechnete, da die Fällung keine erschöpfende und das Manganoxalat auch etwas löslich in Wasser ist. Zur Ermittlung der Zusammensetzung des Rückstandes beim stärkeren Erhitzen wurden folgende Versuche ausgeführt:

In einer durch Quecksilber abgesperrten Glasröhre wurden 0·355 *g* des wasserfreien Präparates vorsichtig erhitzt. Nach dem Erkalten bei Luftabschluss wurde gewogen, und das grüne Pulver, welches als Rückstand verblieb, hatte ein Gewicht von 0·172 *g*. Das grüne Pulver löst sich ohne Rückstand und ohne merkliche Gasentwicklung in Salzsäure zu Chlormangan. Für die Annahme, dass sich das Manganoxalat bei der Erhitzung in MnO, CO und CO_2 spaltet, verlangt die Rechnung für das grüne Manganoxydul ein Gewicht von 0·176 *g*.

Erhitzt man Manganoxalat in einer mit Gasleitungsröhre versehenen Eprouvette und fängt nach Verdrängung der Luft das Gas über warmem Wasser auf, so lässt sich durch Natronlauge nachweisen, dass das Gas aus gleichen Volumen von Kohlensäuregas und Kohlenoxydgas besteht.

Wird endlich Manganoxalat bei Luftzutritt in einem Tiegel erhitzt, so erhält man als Rückstand rothbraunes Manganoxyduloxyd.

$$3MnC_2O_4 + O = Mn_3O_4 + 3CO + 3CO_2.$$

Das Manganoxyduloxyd löst sich in kalter Schwefelsäure mit rothvioletter Farbe.

Ferrooxalat, $FeC_2O_4 + 2H_2O$. 5·6 *g* Eisenpulver werden in verdünnter Schwefelsäure gelöst, die klare Lösung wird mit

200 cm^3 Normaloxalsäure gefällt. Der gewaschene und bei gewöhnlicher Temperatur im Exicator getrocknete Niederschlag im Gewichte von nahe 18 *g* bleibt an der Luft unverändert. Durch längeres Erhitzen des citronengelben Präparates bei 120° wird das wasserfreie Salz erhalten. Erhitzt man eine kleine Menge desselben in einer Eprouvette und schüttet den noch warmen sammtschwarzen Rückstand aus, so beobachtet man ein lebhaftes Erglühen des fallenden Pulvers.

Behufs der Ermittlung des Wassergehaltes und behufs der Bestimmung der Zusammensetzung des nach dem Erhitzen verbleibenden Rückstandes wurden 0·445 *g* des wasserhaltigen Salzes in einer 10 *cm* langen und 5 *mm* weiten Glasröhre, die mit einem kleinen Chlorcalciumrohr und daranschließend mit einer in Quecksilber tauchenden Röhre in Verbindung stand, vorsichtig, vom offenen zum zugeschmolzenen Ende der Röhre vorschreitend, erhitzt. Nach vollständiger Zersetzung des Salzes und nach vollständiger Verdrängung des Wassers aus der Röhre in das Chlorcalciumrohr wurde bei Luftabschluss erkalten gelassen und dann gewogen. Die Gewichtszunahme des Chlorcalciumrohres betrug 0·90 *g* (für die Formel $FeC_2O_4 + 2H_2O$ verlangt die Rechnung 0·89 *g* Wassergehalt). Der sammtschwarze Rückstand in der Röhre hatte ein Gewicht von 0·182 *g*. Wäre der Rückstand reines Fe_3O_4, so müsste derselbe 0·190 *g* wiegen. Übergießt man diesen Körper mit Salzsäure, so entwickelt sich entzündbares Wasserstoffgas und man erhält eine klare gelbgrüne Lösung ohne kohligen Rückstand. Diese Lösung gibt mit Ammoniak einen schwarzen, braunwerdenden Niederschlag und liefert sowohl mit gelbem als auch mit rothem Blutlaugensalz blaue Niederschläge.

Aus diesen Versuchen geht demnach hervor, dass der beim Glühen des Ferrooxalates unter Luftabschluss erhaltene schwarze Rückstand aus Eisenoxyduloxyd und etwas metallischem Eisen besteht. Die pyrophorischen Eigenschaften dieses Körpers sind demnach auf den Gehalt an metallischem Eisen zurückzuführen.

Erhitzt man andererseits Ferrooxalat in einem Schälchen, so erglüht der Körper und unter Gasentwicklung und Sauerstoffaufnahme erhält man ein äußerst zartes rothes Eisenoxyd.

$$2FeC_2O_4 + O = Fe_2O_3 + 2CO + 2CO_2.$$

Saures Ferrioxalat. Löst man frischgefälltes Eisenhydroxyd — $Fe_2(OH)_6$ — in überschüssiger Oxalsäure, so erhält man eine gelbe Lösung. Bleibt dieselbe im Lichte stehen, so

wird sie bald farblos, es zeigt sich deutliche Kohlensäuregasentwicklung und es scheidet sich Ferrooxalat als citronengelbes Pulver aus. $Fe_2H_6(C_2O_4)_6 = 2FeC_2O_4 + 3H_2C_2O_4 + 2CO_2$. Die Ausscheidung, die im directen Sonnenlichte sehr rasch erfolgt, ist eine vollständige, da die wasserhelle Lösung über dem Niederschlag eisenfrei ist. Auf Zusatz von Schwefelsäure erfolgt eine theilweise Lösung des Niederschlages, wodurch es auch erklärlich wird, dass die Fällung einer Eisenvitriollösung mit Oxalsäure keine erschöpfende sein kann, weil die freie Schwefelsäure eine wenn auch nur geringe Menge des entstandenen Ferrooxalates wieder löst.

Wird das saure Ferrioxalat vorsichtig mit Kalilauge neutralisiert, oder löst man Ferrihydroxyd in heißer Kleesalzlösung, so entsteht eine smaragdgrüne Lösung, aus welcher im Dunkeln schöne grüne Krystalle von Kaliumferrioxalat — $Fe_2K_6(C_2O_4)_6 + 6H_2O$ — erhalten werden. Auch die Lösung dieses Doppelsalzes wird im Sonnenlichte rasch unter deutlicher Kohlensäuregasentwicklung und Bildung von Ferrooxalat und Kaliumoxalat zersetzt.

$$Fe_2K_6(C_2O_4)_6 = 2FeC_2O_4 + 3K_2C_2O_4 + 2CO_2.$$

Chromoxalat, $Cr_2(C_2O_4)_3$. Ein unlösliches Salz erhält man in folgender Weise: Eine Chromalaunlösung wird mit Ammoniak gefällt, das entstandene Chromhydroxyd mit heißem Wasser gewaschen und hierauf mit einer zur vollständigen Lösung unzureichenden Menge von Salzsäure erwärmt. Das entstandene Chromchlorid wird vom überschüssigen Chromhydroxyd durch Filtration getrennt und mit einer concentrierten Ammoniumoxalatlösung versetzt. Es entsteht ein feinkörniger grüner Niederschlag. Die Fällung ist aber keine vollständige.

Das lösliche Salz wird durch Auflösen von Chromhydroxyd in schwach erwärmter Oxalsäure oder aus Chromtrioxyd und Oxalsäure nach folgender Methode erhalten: Zu 200 *cm*^{3} Normaloxalsäure setzt man nach und nach 10 *g* kryst. Chromtrioxyd. Es findet eine lebhafte Reaction und stürmische Kohlensäuregasentwicklung statt. Bei raschem Eintragen des Chromtrioxydes findet eine rasche Temperatursteigung um beiläufig 50° statt. Lässt man nach beendigter Reaction die rothe Flüssigkeit bei gewöhnlicher Temperatur verdunsten, so erhält man eine glasige schwarzviolette Masse; wird die Flüssigkeit aber gekocht, so färbt sie sich grün und der Rückstand nach dem Eindampfen ist ebenfalls grün.

$$2CrO_3 + 6H_2C_2O_4 = Cr_2(C_2O_4)_3 + 6H_2O + 6CO_2.$$

Die vollständige Trocknung des oxalsauren Chroms erfolgt erst bei einer Temperatur, bei welcher auch das Salz schon zersetzt wird. Zur Wasserbestimmung wurden 1·5 *g* des lufttrockenen Präparates in einer mit kleinem Chlorcalciumrohr versehenen Glasröhre vorsichtig erhitzt. Die gefundene Wassermenge beträgt 0·34 *g*. Der schwarze kohlige Rückstand wurde in einen Tiegel gebracht und allmählich bis zum heftigen Glühen erhitzt. Die Masse geräth selbst ins Glühen, indem die Kohle verbrennt und im Rückstande verblieben 0·48 *g* grünes Chromoxyd. Auf Grund der zur Bereitung des Chromoxalates verwendeten Mengen von Chromtrioxyd und Oxalsäure muss der Rechnung die Formel $Cr_2(C_2O_4)_3$ zugrunde gelegt werden.

$$[Cr_2(C_2O_4)_3 + xH_2O] : xH_2O = 1·5 : 0·34$$
$$(368 + 18x) : 18x = 150 : 34$$
$$x = 5·99$$
$$[Cr_2(C_2O_4)_3 + xH_2O] : Cr_2O_3 = 1·5 : 0·48$$
$$(368 + 18x) : 152 = 150 : 48$$
$$x = 5·94.$$

Beide Bestimmungen ergeben demnach übereinstimmend den Wassergehalt von $6H_2O$.

Rothes Ammoniumchromoxalat, $(NH_4)_2Cr_2(C_2O_4)_4 + 8H_2O$. Die Darstellung dieses Salzes gelingt sehr hübsch durch die Einwirkung von Ammoniumdichromat und Oxalsäure. In 200 cm^3 erwärmte Normaloxalsäure trägt man solange Ammoniumdichromat ein, solange Kohlensäuregasentwicklung erfolgt — es sind hiezu 3·8 *g* des Chromsalzes erforderlich. Die eingeengte violettrothe Flüssigkeit gibt nach einigen Tagen Krystalle der verlangten Verbindung.

$$(NH_4)_2Cr_2O_7 + 7H_2C_2O_4 = (NH_4)_2Cr_2(C_2O_4)_4 + 7H_2O + 6CO_2.$$

Rothes Kaliumchromoxalat, $K_2Cr_2(C_2O_4)_4 + 8H_2O$. Zu 200 cm^3 kochender Normaloxalsäure setzt man nach und nach 4·4 *g* Kaliumdichromat. Die violette Flüssigkeit wird auf ein Viertel eingeengt, und man erhält nach einigen Tagen rothe Krystalle des Salzes.

$$K_2Cr_2O_7 + 7H_2C_2O_4 = K_2Cr_2(C_2O_4)_4 + 7H_2O + 6CO_2.$$

Das Salz gibt mit Chlorcalcium keinen Niederschlag, durch Kalkwasser entsteht eine Fällung von Chromhydroxyd und oxalsaurem Kalk.

$$K_2Cr_2(C_2O_4)_4 + 4Ca(OH)_2 = Cr_2(OH)_6 + 4CaC_2O_4 + 2KOH.$$

Blaues Kaliumchromoxalat, $K_6Cr_2(C_2O_4)_6 + 6H_2O$. Zu 200 cm^3 Normaloxalsäure fügt man nach und nach 3·4 g feingepulvertes Kaliumdichromat; nach beendigter Kohlensäuregasentwicklung neutralisiert man die noch vorhandene freie Oxalsäure mit Kaliumcarbonat, wozu 3·1 g erforderlich sind. Nach dem Eindampfen erhält man 20 g schwarze, im durchfallenden Lichte indigoblaue, säulenförmige Krystalle.

$$K_2Cr_2O_7 + 9H_2C_2O_4 + 2K_2CO_3 = K_6Cr_2(C_2O_4)_6 + 9H_2O + 8CO_2.$$

Durch Chlorcalcium wird die im durchfallenden Lichte rothe, im reflectierten grüne Lösung nicht gefällt, wohl aber durch Kalkwasser, und zwar erschöpfend beim Erwärmen.

$$K_6Cr_2(C_2O_4)_6 + 6Ca(OH)_2 = Cr_2(OH)_6 + 6CaC_2O_4 + 6KOH.$$

Kobaltoxalat, $CoC_2O_4 + H_2O$. Man löst 8 g schwarzes Kobaltoxyduloxyd in kochender Salzsäure, befreit die Lösung von der überschüssigen Säure und fällt mit 200 cm^3 Normaloxalsäure. Man erhält bei 16 g des rosenrothen Niederschlages. Erhitzt man durch Erhitzen auf 150° vollständig entwässertes Kobaltoxalat stärker in einer durch Quecksilber abgesperrten Röhre, so erhält man metallisches Kobalt. $CoC_2O_4 = Co + 2CO_2$. Aus 0·53 g Präparat wurden 0·22 g Rückstand erhalten. Die Rechnung verlangt 0·212 g für metallisches Kobalt. Der erhaltene Rückstand löst sich vollständig unter Entwicklung von entzündbarem Wasserstoff, die Gasentwicklung beginnt schon in der Kälte.

Erhitzt man entwässertes Kobaltoxalat in einer Eprouvette und gießt das noch warme Metall in eine Schale, so zeigt sich ein Funkenregen und das Metall verbrennt zu CoO und Co_3O_4. Das schwarze Oxyd löst sich in Salzsäure unter Chlorentwicklung.

Nickeloxalat, $NiC_2O_4 + 2H_2O$. Man löst 7·4 g Nickeloxydul in warmer Salzsäure, befreit die Lösung von der überschüssigen Säure und erhitzt dieselbe mit 200 cm^3 Normaloxalsäure zum Kochen. Der hellgrüne Niederschlag wiegt bei 18 g. Erhitzt man das lufttrockene Salz in einem nach der Öffnung hin offenen Glasrohr mit Chlorcalciumröhre und Quecksilberabsperrung, so erhält man im Rückstande reines Nickel. 0·6 g Nickeloxalat enthalten 0·19 g Nickel und 0·124 g Wasser; gefunden wurden 0·18 g Nickel und 0·126 g Wasser. Das erhaltene Nickel entwickelt mit Salzsäure Wasserstoff, der entzündet werden kann.

Erhitzt man das entwässerte Salz in einem Schälchen bei Luftzutritt, so erfolgt ein lebhaftes Erglühen und man erhält grünschwarzes Nickeloxydul.

Trockenes Nickeloxalat in der Eprouvette erhitzt gibt metallisches Nickel, welches, wenn es noch warm aus der Eprouvette entleert wird, pyrophorische Eigenschaften zeigt.

Kupferoxalat, $CuC_2O_4 + H_2O$. 200 *cm*³ Normaloxalsäure werden mit einer warmen Lösung von 24·9 *g* Kupfervitriol gefällt. Die Fällung ist vollständig, auch wenn ein Überschuss von Oxalsäure verwendet wird. Der Niederschlag ist sehr fein und geht leicht durch das Filter. Wird das reine Filtrat eingedampft, so enthält es nur Schwefelsäure. Das lufttrockene Präparat ist bei 156° noch nicht wasserfrei, bei dieser Temperatur beginnt aber auch schon die Zersetzung des Salzes. Wird die Erhitzung des Salzes bei Luftabschluss vorgenommen, so erhält man metallisches Kupfer, bei Luftzutritt entsteht Kupferoxydul und Kupferoxyd. Zur Ermittlung des Wassergehaltes wurden folgende Versuche gemacht:

2·56 *g* lufttrockenes Kupferoxalat wurden in einem Tiegel vorsichtig erhitzt, der Rückstand mit Salpetersäure befeuchtet und geglüht. Es wurden 1·19 *g* schwarzes Kupferoxyd erhalten.

$(CuC_2O_4 + xH_2O) : CuO = 2{\cdot}56 : 1{\cdot}19$
$(151 + 18x) : 79 = 2{\cdot}56 : 1{\cdot}19$
$x = 1{\cdot}05$

Das oxalsaure Kupfer enthält demnach ein Molecül Wasser.

Erhitzt man 2 *g* Kupferoxalat unter Luftabschluss, so werden 0·76 *g* Kupfer erhalten. Die Rechnung verlangt für reines Kupfer 0·75 *g*.

Setzt man zu oxalsaurem Kupfer Ammoniak, so entsteht unter Erwärmung ein sandiges Pulver, das nach dem Trocknen im Tiegel verpufft und metallisches Kupfer hinterlässt. Wird ein Stück Filter, auf welchem sich noch etwas trockenes Kupferoxalat befindet, an einem Ende angezündet, so verglimmt dasselbe vollständig und hinterlässt rothes metallisches Kupfer.

Bleioxalat, PbC_2O_4. Zu einer Lösung von 33 *g* Bleinitrat setzt man 200 *cm*³ Normaloxalsäure. Der weiße getrocknete Niederschlag wiegt 38 *g*. Die Zersetzung des Salzes bei stärkerem Erhitzen in einer Eprouvette erfolgt nach der Gleichung:

$$2PbC_2O_4 = Pb_2O + 3CO_2 + CO.$$

2·67 *g* oxalsaures Blei lieferten 1·95 *g* Bleisuboxyd. Wird das

erhaltene Bleisuboxyd in einem Schälchen bei Luftzutritt erhitzt, so verbrennt es unter lebhaftem Erglühen zu gelbem Bleioxyd.

Oxalsaures Zinnoxydul, SnC_2O_4. 22·5 *g* kryst. Zinnsalz werden in Wasser gelöst und mit 200 *cm*³ Normaloxalsäure gefällt. Der krystallinisch-pulverige Niederschlag — 20 *g* — setzt sich rasch ab. Das Salz muss andauernd getrocknet werden, um es vollständig trocken zu erhalten. Erhitzt man das trockene Salz in einer Glasröhre bei Luftabschluss, so bläht sich die Masse schwammig auf und man erhält die olivengrüne Modification von Zinnoxydul. Beim Übergießen mit Salzsäure wird das Zinnoxydul zunächst schwarz und löst sich dann langsam in der heißen Säure. Erhitzt man das Oxalat in einer Eprouvette und gießt man den schwammigen Körper in eine Schale, so verbrennt das Oxydul alsogleich zu Zinnoxyd.

Mercurioxalat, HgC_2O_4. 20 *g* Quecksilber werden in heißer Salpetersäure gelöst, die verdünnte Lösung wird mit 250 *cm*³ Normaloxalsäure gefällt. Der entstandene weiße Niederschlag — 28 *g* — wird gewaschen und vorsichtig getrocknet. Wird ein Theil des noch nassen Niederschlages rasch erhitzt, so erfolgt eine explosive Zersetzung desselben.

Silberoxalat, $Ag_2C_2O_4$. Zu 100 *cm*³ Normaloxalsäure setzt man eine erkaltete Lösung von 17 *g* Silbernitrat. Man erhält 15 *g* weißes oxalsaures Silber. Da dasselbe in Wasser etwas löslich ist, so ist die Fällung nicht vollständig, wovon man sich durch die Fällbarkeit des Filtrats mit Salzsäure überzeugen kann. Das Präparat zersetzt sich beim Erhitzen unter Verpuffung in Silber und Kohlensäuregas. Erhitzt man eine kleine Menge des Salzes auf einer Kupferplatte und reibt dann die Kupferplatte mit dem Achatpistill, so nimmt dieselbe Silberglanz an.

Zersetzungen und Reductionen.

Die Einwirkung der Schwefelsäure auf Oxalsäure. Erhitzt man in einem kleinen Kölbchen 10 *g* Oxalsäure mit 25 *cm*³ Schwefelsäure im Sandbade, so erfolgt bald eine ruhige und gleichmäßige Gasentwicklung und es entweicht ein aus gleichen Raumtheilen von Kohlenoxyd und Kohlensäuregas bestehendes Gasgemisch. Versieht man das Kölbchen mit einem durchbohrten Kork mit nicht zu engem Glasrohr, so kann das Gasgemisch

direct angezündet werden, es brennt wegen des Gehaltes an Kohlensäuregas mit blassblauer leerer Flamme. Will man reines Kohlenoxydgas darstellen, so verbindet man nach Verdrängung der Luft aus dem Kölbchen dasselbe mit einem U-Rohr, in welchem sich Stücke von Ätzkali zur Aufnahme des Kohlensäuregases befinden. Das nun entweichende Gas brennt mit schöner blauer Flamme. Das Gas kann auch über Wasser aufgefangen werden. Man erhält auf diese Weise nach Ausführung der angegebenen Verbrennungsversuche immer noch 1—1½ *l* Kohlenoxydgas. Die Zerlegung erfolgt nach der Gleichung:

$$\underbrace{H_2C_2O_4 + 2H_2O}_{126} = 3H_2O + \underbrace{CO}_{28} + CO_2$$

1 *l* Kohlenoxydgas wiegt bei 0° und bei 760 *mm* Druck 14 Krith = 1·25 *g*.

10 *g* Oxalsäure liefern 2·22 *g* = 1·76 *l* Kohlenoxydgas.

Zersetzung der Oxalsäure durch Glycerin. Man erhitzt 100 *g* Glycerin mit 25 *g* kryst. Oxalsäure in einem Destillationskölbchen bis zur beendeten Kohlensäuregasentwicklung auf 90°, dann fügt man 100 cm^3 Wasser zu und destilliert. Man erhält reine verdünnte Ameisensäure, und zwar mit einem Gehalte von 9 *g* Ameisensäure.

$$H_2C_2O_4 + 2H_2O = 3H_2O + CO_2 + H_2CO_2.$$

Heiße verdünnte Ameisensäure gibt mit Silbernitrat eine Ausscheidung von metallischem Silber.

Die Einwirkung von Chlor. In einem geräumigen Kolben übergießt man 1 *g* gepulvertes Kaliumchlorat mit 5 cm^3 gelinde erwärmter Salzsäure; es findet eine lebhafte Gasentwicklung statt und der Kolben füllt sich mit einem grünlich-gelben Gase, das der Hauptmasse nach aus Chlor besteht. Durch Übergießen des Gases in einen zweiten Kolben, in welchem sich 100 cm^3 kalten Wassers befinden, und durch Schütteln des Gases mit dem Wasser erhält man starkes Chlorwasser. Gießt man hierauf zu einer heißen Lösung von Natriumoxalat starkes Chlorwasser und schüttelt die Mischung, so tritt Kohlensäuregasentwicklung ein, die gelblich-grüne Flüssigkeit wird farblos und enthält nach beendigter Reaction Kochsalz. Die Umsetzung erfolgt nach der Gleichung:

$$Na_2C_2O_4 + Cl_2 = 2NaCl + 2CO_2.$$

Oxalsäure und unterchlorigsaures Kalium. Schüttelt man in einem Kolben Chlorgas mit Kalilauge, so entsteht neben Chlorkalium das unterchlorigsaure Kalium. Bringt man zu dieser Flüssigkeit einige Krystalle von Oxalsäure, so tritt alsogleich Kohlensäuregasentwicklung ein, die unter Selbsterwärmung an Lebhaftigkeit zunimmt. Nach beendigter Reaction enthält die Flüssigkeit Chlorkalium.

$$(KClO + KCl) + H_2C_2O_4 = 2KCl + H_2O + 2CO_2.$$

Die Einwirkung von Brom. Setzt man zu einer Lösung von Natriumoxalat starkes Bromwasser, so zeigt sich alsogleich eine Entwicklung von Kohlensäuregas, die unter Selbsterwärmung an Lebhaftigkeit zunimmt. Die gelbe Bromlösung wird entfärbt, der Bromgeruch verschwindet und nach beendigter Reaction enthält die Flüssigkeit Bromnatrium.

$$Na_2C_2O_4 + Br_2 = 2NaBr + 2CO_2.$$

Die Einwirkung von Jod. Eine Lösung von Jod in Natronlauge, die Jodnatrium und jodsaures Natrium enthält, scheidet auf Zusatz von Oxalsäure Jod aus, indem die Jodsäure ihren Sauerstoff an die Oxalsäure abgibt. Erwärmt man die freies Jod enthaltende Flüssigkeit mit der überschüssigen Oxalsäure, so wird erstere wieder farblos, indem in der Wärme das Jod und die freie Oxalsäure unter Bildung von Jodwasserstoff und Kohlensäuregas aufeinander einwirken.

Es wickeln sich die nachfolgenden chemischen Processe ab:

$$6NaOH + 6J = 5NaJ + NaJO_3 + 3H_2O;$$
$$5NaJ + NaJO_3 + 3H_2C_2O_4 = 5HJ + HJO_3 + 3Na_2C_2O_4;$$
$$2HJO_3 + 5H_2C_2O_4 = 10CO_2 + 6H_2O + J_2;$$
$$J_2 + H_2C_2O_4 = 2HJ + 2CO_2.$$

Erwärmt man eine Auflösung von Jod in Jodkaliumlösung mit Kaliumoxalat, so erfolgt eine rasche Entfärbung unter Kohlensäuregasentwicklung und Bildung von Jodkalium.

$$K_2C_2O_4 + J_2 = 2KJ + 2CO_2.$$

Die Einwirkung von Natrium. Schmilzt man in einer Eprouvette 1 *g* Natrium mit 2 *g* wasserfreier Oxalsäure, so erfolgt ein lebhaftes Erglühen, eine Abscheidung von Kohle und eine Entwicklung von Wasserstoffgas, das direct entzündet werden kann.

$$Na_2 + H_2C_2O_4 = Na_2C_2O_4 + H_2 \text{ und}$$
$$Na_2 + H_2C_2O_4 = Na_2CO_3 + H_2O + C.$$

Wasserstoffhyperoxyd und Oxalsäure. Wird Bariumhyperoxyd mit verdünnter Schwefelsäure zersetzt, so enthält das Filtrat H_2O_2, eine Jodkaliumlösung gibt damit eine Ausscheidung von Jod.

Versetzt man die Wasserstoffhyperoxydlösung mit Natronlauge bis zur alkalischen Reaction und fügt dann Oxalsäure hinzu, so erfolgt eine Kohlensäuregasentwicklung und Jodkalium gibt keine Jodausscheidung mehr.

$$H_2O_2 + 2KJ = 2KOH + J_2;$$
$$H_2O_2 + Na_2C_2O_4 = CO_2 + Na_2CO_3 + H_2O.$$

Wasserstoff aus Barythydrat und Bariumoxalat. 8 *g* Bariumoxalat werden mit 6 *g* scharfgetrocknetem Barythydrat innig gemischt und in einer starkwandigen Eprouvette über freier Flamme erhitzt. Eine Probe des aufgefangenen trockenen Gases zeigt bei der Verbrennung die Wasserbildung, eine andere Probe des Gases erweist sich als frei von Kohlensäure, da es Kalkwasser nicht trübt.

$$BaC_2O_4 + Ba(OH)_2 = 2BaCO_3 + H_2.$$

Manganhyperoxyd und Oxalsäure. Verreibt man 2·9 *g* warmes Manganhyperoxyd mit 6 *g* wasserfreier und angewärmter Oxalsäure, so tritt lebhafte Reaction ein und es bildet sich Manganoxalat.

$$MnO_2 + 2H_2C_2O_4 = MnC_2O_4 + 2H_2O + 2CO_2.$$

Derselbe Process geht auch vor sich, wenn auf das Manganhyperoxyd die Oxalsäure in Lösung einwirkt.

200 cm^3 erwärmte Normaloxalsäure reducieren 8·7 *g* reines Manganhyperoxyd, es entstehen 18 *g* Manganoxalat. Das Manganoxalat ist in einer heißen Lösung von Kaliumoxalat unter Bildung des Doppelsalzes $K_2Mn(C_2O_4)_2 + 2H_2O$ vollständig löslich.

Manganhyperoxyd und Kleesalz. Setzt man zu einer schwacherwärmten Lösung von Kleesalz Manganhyperoxyd, so tritt eine lebhafte Reaction ein, es entwickelt sich Kohlensäuregas und die Flüssigkeit färbt sich blutroth. Aus der blutrothen Flüssigkeit scheidet Natronlauge oder Ammoniak braunes Manganihydroxyd — $Mn_2(OH)_6$ — aus, durch Schwefelsäure oder Salzsäure wird die Flüssigkeit entfärbt. Die rothe Flüssigkeit entfärbt sich allmählich von selbst, beim Erhitzen zum Kochen erfolgt diese Entfärbung unter Kohlensäuregasentwicklung alsogleich. Die angeführten Erscheinungen lassen sich durch die

Annahme der Entstehung eines löslichen unbeständigen Doppelsalzes von Manganioxalat mit Kaliumoxalat erklären.

Die hiebei auftretenden Processe wären demnach die folgenden:

1. Die Entstehung des blutrothen Doppelsalzes.

$$2MnO_2 + 8KHC_2O_4 =$$
$$= Mn_2K_6(C_2O_4)_6 + K_2C_2O_4 + 4H_2O + 2CO_2.$$

2. Die Zersetzung durch Schwefelsäure.

$$Mn_2K_6(C_2O_4)_6 + K_2C_2O_4 + 6H_2SO_4 =$$
$$= 2MnSO_4 + 4K_2SO_4 + 6H_2C_2O_4 + 2CO_2.$$

3. Die Zersetzung beim Erhitzen.

$$Mn_2K_6(C_2O_4)_6 = 2MnK_2(C_2O_4)_2 + K_2C_2O_4 + 2CO_2.$$

Die zersetzten farblosen Lösungen geben beim Übersättigen mit Natronlauge weiße Niederschläge von Manganohydroxyd, die erst beim Schütteln mit Luft durch Sauerstoffaufnahme braun werden.

Die blutrothe Verbindung entsteht auch dann, wenn man statt des Manganhyperoxydes Manganoxyd — Mn_2O_3 — oder das Oxyduloxyd — Mn_3O_4 — verwendet.

Kaliumpermanganat und Oxalsäure. Verreibt man 1 *g* schwach erwärmtes Kaliumpermanganat mit 2·3 *g* wasserfreier erwärmter Oxalsäure, so tritt unter bedeutender Erhitzung und Gasentwicklung eine lebhafte Reaction ein. Die Umsetzung erfolgt der Hauptmasse nach entsprechend der Gleichung:

$$2KMnO_4 + 8H_2C_2O_4 =$$
$$= MnK_2(C_2O_4)_2 + MnC_2O_4 + 8H_2O + 10CO_2.$$

Lässt man Lösungen von Kaliumpermanganat und Oxalsäure aufeinander wirken, so sind die Reactionen, je nach den Mengenverhältnissen und der Temperatur, verschiedene.

Ist das mineralische Chamäleon im Überschusse, so entsteht lösliches Kaliumoxalat und es scheidet sich braunschwarzes Manganhyperoxydhydrat aus.

$$2KMnO_4 + 4H_2C_2O_4 = K_2C_2O_4 + 2MnH_2O_3 + 2H_2O + 6CO_2.$$

Bringt man das Permanganat zur überschüssigen Oxalsäure bei gewöhnlicher Temperatur, so scheidet sich braunes Manganoxyd aus.

$$5H_2C_2O_4 + 2KMnO_4 = K_2C_2O_4 + Mn_2O_3 + 5H_2O + 8CO_2.$$

Wird die Chamäleonlösung mit überschüssiger Oxalsäure erhitzt, so wirkt die Oxalsäure auf das anfänglich entstandene

Manganoxyd und die Endproducte der Einwirkung sind neben entweichender Kohlensäure Mangankaliumoxalat und Manganoxalat. Bei genügender Verdünnung wird die Flüssigkeit klar, da das Manganoxalat sich in einer hinreichend großen Wassermenge löst.

$$2KMnO_4 + 8H_2C_2O_4 =$$
$$= K_2Mn(C_2O_4)_2 + MnC_2O_4 + 8H_2O + 10CO_2.$$

Von den 8 Molecülen Oxalsäure wirken 3 nur salzbildend, die demnach auch durch Schwefelsäure ersetzt werden können.

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5H_2C_2O_4 =$$
$$= K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 8H_2O + 10CO_2.$$

Eisenchlorid und Oxalsäure. Mischt man eine saure Eisenchloridlösung mit gelöster Oxalsäure und setzt diese Mischung dem Sonnenlichte aus, so tritt sofort eine Entwicklung von Kohlensäuregas auf, und die Lösung gibt mit rothem Blutlaugensalz einen blauen Niederschlag.

$$Fe_2Cl_6 + H_2C_2O_4 = 2FeCl_2 + 2HCl + 2CO_2.$$

Goldchlorid und Oxalsäure. Setzt man zu einer Goldchloridlösung eine Oxalsäurelösung, so scheidet sich metallisches Gold aus. Bei sehr verdünnter Goldlösung erscheint die Flüssigkeit im durchfallenden Lichte blau.

$$2AuCl_3 + 3H_2C_2O_4 = 2Au + 6HCl + 6CO_2.$$

Statt der freien Säure kann auch Kaliumoxalat verwendet werden, statt Salzsäure enthält dann die Flüssigkeit Chlorkalium.

Ameisensäureäthyläther, $HC_2H_5CO_2$. Erhitzt man 100 *g* Glycerin, 25 *g* kryst. Oxalsäure und 12 *g* 90—95 grädigen Weingeist in einem Destillationskolben, so destilliert zwischen 80—90°, nach vorangegangener Kohlensäuregasentwicklung, der Hauptmasse nach der rumartig riechende Ameisensäureäthyläther über.

$$H_2C_2O_4 + C_2H_5OH = CO_2 + H_2O + HC_2H_5CO_2.$$

Dieser Äther reduciert eine alkalische Silberlösung sehr rasch beim Erwärmen. $HC_2H_5CO_2 + Ag_2O = Ag_2 + CO_2 + C_2H_5OH.$

Kaliumchlorat und Oxalsäure. Schüttelt man eine kaltgesättigte Lösung von Kaliumchlorat mit kaltgesättigter Oxalsäurelösung im Überschuss, so scheidet sich ein krystallinischer Niederschlag von Kleesalz ab und die Flüssigkeit enthält freie Chlorsäure. Bringt man zu einer kochend heißen concentrierten Oxalsäurelösung Kaliumchlorat, so tritt alsogleich eine stürmische

Gasentwicklung auf, die Flüssigkeit färbt sich gelb und wird nach beendigter Reaction wieder farblos. Anfänglich bildet sich vierfach oxalsaures Kalium, das aber allmählich die Hälfte seiner Oxalsäure zur Reduction noch unangegriffener Mengen von Kaliumchlorat abgibt. Das Endergebnis der Reaction lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$KClO_3 + 4H_2C_2O_4 = KHC_2O_4 + HCl + 3H_2O + 6CO_2.$$

Die anfangs entstandene Chlorsäure und die freie Salzsäure wirken unter Chlorgasbildung aufeinander. Dadurch erklärt sich das Grüngelbwerden der Flüssigkeit und der auftretende Chlorgeruch. Theilweise wirkt das Chlor auf die Oxalsäure ein, wodurch die Flüssigkeit zum Schlusse farblos wird. Von der Gegenwart der freien Salzsäure überzeugt man sich durch Silbernitrat und Salpetersäure.

Die Zersetzung des chlorsauren Kalis durch Oxalsäure ist bei genügend andauerndem Erhitzen eine vollständige, so dass das auskrystallisierte saure Kaliumoxalat vollkommen rein ist. Aus 10 *g* Kaliumchlorat und 41·1 *g* kryst. Oxalsäure erhält man 10—11 *g* Kleesalz.

Gelbes Blutlaugensalz und Oxalsäure. 10·4 *g* kryst. gelbes Blutlaugensalz werden in 200 cm^3 Normaloxalsäure eingetragen. Das Gemenge erleidet schon bei gewöhnlicher Temperatur eine Farbenveränderung und bald macht sich der Geruch nach Blausäure bemerkbar. Wird das Gemenge in einen Destillationskolben gebracht und im Sandbade erhitzt, so destilliert wässerige Blausäure über und im Kolben entsteht ein grüner unlöslicher Körper. Die vollständige Zersetzung erfordert ein länger andauerndes Kochen. Wird der grüne Rückstand im Destillationskolben von der Flüssigkeit getrennt und mit Kalilauge erwärmt, so entsteht gelbes Blutlaugensalz und dunkles Eisenoxyduloxydhydrat.

Aus der abdestillierten wässerigen Blausäure kann durch Erwärmen mit Quecksilberoxyd kryst. Cyanquecksilber erhalten werden.

Das Endergebnis der Einwirkung von Oxalsäure und gelbem Blutlaugensalz beim Erhitzen wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$2K_4FeCy_6 + 6H_2C_2O_4 = 6KHC_2O_4 + FeK_2FeCy_6 + 6HCy.$$

Rothes Blutlaugensalz und Oxalsäure. Schüttelt man eine kaltgesättigte Lösung des rothen Blutlaugensalzes mit überschüssiger kalter concentrierter Oxalsäurelösung, so erhält man eine kryst. Ausscheidung von Kleesalz. Erwärmt man diese Mischung, so entwickelt sich Blausäure und die Flüssigkeit färbt sich dunkel. Versetzt man hierauf mit Kalilauge bis zur alkalischen Reaction, so wird die dunkle und trübe Flüssigkeit hellgelb und klar. Wendet man einen Überschuss von Kalilauge an, so findet eine Ausscheidung von Ferrihydroxyd — $Fe_2(OH)_6$ — statt und die abfiltrierte Flüssigkeit enthält nach dem Neutralisieren mit Salzsäure gelbes Blutlaugensalz, was durch Eisenchlorid nachgewiesen werden kann.

Die dabei stattfindenden Reactionen sind sehr verwickelt, ein Theil des rothen Blutlaugensalzes wird aber nach folgender Gleichung gesetzt:

$$Fe_2Cy_{12}K_6 + 6H_2C_2O_4 = K_6Fe_2(C_2O_4)_6 + 12HCy$$
$$K_6Fe_2(C_2O_4)_6 + 6KOH = 6K_2C_2O_4 + Fe_2(OH)_6.$$

Die Entstehung des gelben Blutlaugensalzes erklärt sich aus der Einwirkung des entstandenen Kaliumoxalates auf das rothe Blutlaugensalz bei Gegenwart von Kalilauge.

$$Fe_2Cy_{12}K_6 + K_2C_2O_4 + 2KOH =$$
$$= 2FeCy_6K_4 + K_2CO_3 + H_2O + CO_2.$$

Der darauf Bezug habende Versuch kann in folgender Weise durchgeführt werden: Zur Lösung des rothen Blutlaugensalzes setzt man Kalilauge und gelöstes Kaliumoxalat. Diese Mischung lässt man mehrere Stunden stehen und erwärmt hierauf durch einige Zeit zum Kochen. Vor der Ausführung der Reactionen mit dem gelben Blutlaugensalze muss man die überschüssige Kalilauge und das entstandene kohlensaure Kalium mit Salzsäure neutralisieren.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit ist sich wohl bewusst, dass manche der beschriebenen Versuche durch weitere Ausarbeitung und durch eine eingehendere Beschreibung wesentlich gewonnen hätten, er musste sich aber bei der Fülle des zu behandelnden Stoffes in mehreren Fällen mit einer nur andeutungsweisen Darlegung begnügen. In Anbetracht des beschränkten Raumes einer Programmarbeit und in Berücksichtigung der gemessenen Zeit mussten sogar einige in Aussicht genommene Unter-

suchungen unausgeführt bleiben. Zu diesen gehören die experimentelle Durchführung der Bereitung der Oxalsäure aus Cellulose oder aus Stärke, die Oxydation des Naphthalins durch Salpetersäure zu Phtalsäure und Oxalsäure, die Bereitung des Allylalkohols aus Glycerin durch stärkeres Erhitzen mit Oxalsäure und mehrere andere.

Der Verfasser würde sich für seine Mühe reichlich belohnt fühlen, wenn es ihm durch seine Arbeit gelungen wäre, einen oder den anderen Fachcollegen zu ähnlichen Untersuchungen auf experimentellem Gebiete angeregt zu haben.

II.

Der Ätherdruck als einheitliche Naturkraft.

Von

Hans Januschke,
Director der k. k. Staatsrealschule in Teschen.



Einleitung.

Mit folgenden Zeilen beabsichtigt der Verfasser, zur Lehre von der Einheit der Naturkräfte einen Beitrag zu liefern. Der Äther wird als Träger sämmtlicher physikalischer Energien angenommen und die Elasticität als Elementarkraft betrachtet. Die Weckung der Kraft soll durch Ätherverschiebung geschehen. Diese Grundannahmen beruhen auf der Faraday'schen Lehre vom Kraftfelde, sie sind eine Verallgemeinerung der Maxwell-schen Theorie der elektrischen Verschiebung. Aus dem Elasticitätsgesetze sollen die Hauptsätze der Elektricität, des Lichtes und der ponderablen Masse (einschließlich der verschiedenen Fernwirkungsgesetze) abgeleitet werden.

Sämmtliche Entwicklungen basieren auf statischer Grundlage. Es ist nicht nothwendig, für die Elektricität einen besonderen Schwingungszustand anzunehmen; auch die kinetische Gastheorie ist nicht erforderlich, um die Gasgesetze zu erhalten; die letzteren ergeben sich als specielle Fälle der unmittelbar aus der angegebenen Hypothese erhaltenen „Zustandsgleichung".

Neben der rechnungsmäßigen Verwendung des Elasticitätsgesetzes (im weiteren Sinne) werden auch Betrachtungen über die Constitution des Äthers und der ponderablen Masse angestellt. Dieselben fußen ebenfalls auf der Theorie der Verschiebung und schließen sich an die bekannten Thatsachen und die Ansichten anerkannter Forscher enge an. Es wird die von Descartes begründete Wirbeltheorie aufgenommen; die Ätheratome und Körperatome werden als Ätherwirbel von verschiedener Größe erklärt, deren Fliehkraft die Elasticität entwickelt. Die Hypothese über die Wärme stimmt mit der von Rankin überein. Um die elektrische und magnetische Polarisation, die Verschiedenheit der Elasticität in verschiedenen Richtungen bei anisotropen Körpern und endlich die ausdehnende Kraft

der Wärme zu erklären, wird angenommen, dass die Atomwirbel verschiedene, den Niveauflächen im Innern der betreffenden Körper entsprechende Formen besitzen.

Durch die Hypothese über die Constitution der Materie erfahren jedoch die mathematischen Entwicklungen der physikalischen Gesetze keine Einschränkung.

In methodischer Beziehung lag dem Verfasser am Herzen, mitzuwirken, die modernen Lehren der Elektricität und der elektromagnetischen Lichttheorie, die entschieden auf eine Vereinfachung der Naturlehre hinzielen, einer elementaren Behandlung zu unterwerfen. In dem Capitel über Lichterscheinungen wird auf Stephans Erklärung der Doppelbrechung hingewiesen, welche sich zu einer anschaulichen elementaren Behandlung dieser Erscheinung vorzüglich eignet und sich auch leicht der elektromagnetischen Lichttheorie anpasst.

In dem angegebenen Sinne gelangen folgende Capitel zur Ausführung:

I. Die Elementarkraft. Das Elasticitätsgesetz. Maxwells Grundgleichungen des Kraftfeldes.
II. Elektrische Erscheinungen. Ladungsarbeit. Influenz. Condensator. Ohms und Joules Gesetze. Elektricitätserregung.
III. Fernwirkungsgesetze von Coulomb, Newton, Biot und Savart. Inductionsgesetz.
IV. Elektromagnetische Lichttheorie. Fortpflanzung, Reflexion. Brechung.
V. Molecularkräfte. Zustandsgleichung. Beziehung zwischen Cohäsion, Licht und Elektricität. Aggregatzustände.

I.

Die Grundkräfte.

1. Der historischen Entwicklung der Physik ist das auch heute verfolgte Streben zu entnehmen, im Verlaufe der Erscheinungen unveränderliche Größen zu finden.

Schon die griechischen Philosophen sahen den Stoff mit seiner Eigenschaft als constant an. Im Laufe der Zeit hat man nur andere Stoffe und Kräfte als die unwandelbaren Elemente der Erscheinungen betrachtet. Den ältesten Erklärungen genügten: das Wasser, die Luft, die Erde und das Feuer. Aber

schon Demokrit stellte die Atomtheorie auf und betrachtete die Wirbel der Atome als Anfang der Weltbildung. Später wurden nach dem Beispiele des Lucrez Magnetismus, Elektricität und Capillarität durch den Luftdruck erklärt. Als man in neuerer Zeit zu directen Versuchen und quantitativen Bestimmungen fortschritt und sich durch Experimente im luftleeren Raume überzeugte, dass der Luftdruck eine physikalische Grundkraft nicht sein kann, nahm eine Anzahl Physiker nach den Anregungen Descartes' die Äthertheorie auf, die Schüler Newtons aber entwickelten die Lehre von den Imponderabilien und deren unmittelbaren Fernewirkung.[1])

Die exacten Arbeiten in neuester Zeit haben eine Reihe von Aufschlüssen gegeben, die uns dem Ziele der Bestrebungen in einem großen Gebiete der Naturlehre nahe bringen. Die Versuche von Melloni über strahlende Wärme, von Ampère über Elektromagnetismus, von Faraday über das Kraftfeld und von Herz über elektrische Wellen haben unzweifelhaft dargethan, dass das Mittel der Lichterscheinungen, der Äther, auch das Mittel der Wärmestrahlung, der Elektricität und des Magnetismus ist. Damit wird die Mehrzahl der angenommenen Imponderabilien mit dem Äther identificiert. Durch die Arbeiten von R. Mayer, Joule und Helmholtz über die Verwandlungserscheinungen wurde das Princip der Erhaltung der Energie begründet und mit demselben eine neue constante Größe im Verlaufe der Erscheinungen aufgestellt. Es wurde wahrscheinlich gemacht, dass das Geheimnis von den Qualitäten des Stoffes auf dessen Energie oder Arbeitsfähigkeit zurückzuführen ist. Danach ist es nicht mehr nothwendig, aus den verschiedenartigen Erscheinungen auf die Existenz qualitativ verschiedener Stoffe zu schließen; es kann auch ein und derselbe Stoff, je nach seiner Energie, in sehr verschiedener Weise in Erscheinung treten.

Sehen wir nun den Weltäther als den einheitlichen Stoff an, so können wir behaupten, dass die großartigen neuen Forschungsergebnisse die Ätherhypothese wesentlich unterstützen.

---

[1]) Siehe Rosenberger: Geschichte d. Ph. 3. Bd.; A. Secchi: Die Einheit der Naturkräfte; E. Mach: Geschichte der Mechanik; P. Reis: Lehrb. d. Ph. 7. Aufl.; R. Klimpert: Lehrb. d. allg. Ph.

Die Versuchsresultate beziehen sich nicht unmittelbar auf die Fernwirkungsgesetze der Massen von Newton, Coulomb und Ampère. Da diese jedoch nur der präcise Ausdruck von Thatsachen sind, so müssen auch sie aus der Hypothese eines Grundstoffes und einer Grundkraft gefolgert werden können, wenn die Hypothese Anspruch auf Wahrscheinlichkeit machen will.

Thatsächlich bestehen bereits eine Reihe von Ableitungen der Massenwirkungsgesetze. Die bezüglichen Theorien stützen sich aber auf sehr verschiedene Voraussetzungen über die Constitution und die Wirkungsweise des Äthers. Die Erklärungen nach der Stoßtheorie berücksichtigen die übrigen physikalischen Erscheinungen nicht. Weiterreichend ist die Undulationstheorie. Beide Theorien haben übrigens gemeinsame Elemente, die jedenfalls dem Äther eigenthümlich sind: es sind die schwingenden und kreisenden Äthertheilchen, deren periodische Bewegungen auch nach der kinetischen Theorie, z. B. von Isenkrahe (das Räthsel der Schwerkraft) als Folge von Zusammenstößen erklärt werden. Die Theorien stimmen also in einem Punkte überein, der im allgemeinen als ein wesentlicher Unterschied derselben geltend gemacht wird.

Maxwells Theorie der elektrischen Verschiebung im elektrischen Kraftfelde entspricht vorzüglich den elektrostatischen Erscheinungen. J. Stefan[1]) hat das Princip der Verschiebung außerdem zur Berechnung anderer elektrischen Arbeiten, so auch zur Ermittlung der Arbeit von Stromelementen im Kraftfelde angewendet und daraus die bezüglichen Grundgesetze abgeleitet. Odstrčil[2]) hat unmittelbar anstatt der elektrischen Verschiebung eine Ätherverschiebung angenommen, dem Äther Elasticität zugeschrieben und danach das Coulomb'sche und Newton'sche Gesetz abgeleitet.

Es scheint nicht unmöglich zu sein, die Theorie der Ätherverschiebung mit den anderen Äthertheorien in einen gewissen Einklang zu bringen. Sie enthält gewiss die brauchbaren Elemente in sich und gestattet, physikalische Gesetze der verschiedensten Gebiete in einheitlicher Weise abzuleiten. Die Theorie soll den folgenden Betrachtungen als Grundlage dienen.

---

[1]) J. Stefan: „Über die Gesetze d. magnet. u. elektr. Kräfte in magnet u. dielektr. Medien". Wien. Akad. Ber. Bd. 70. 2. Abth.

[2]) J. Odstrčil: „Über den Mechanismus d. Fernwirkung elektr. Kräfte." Wien. Akad. Ber. 1883, und „Über den Mechan. d. Gravitation." Wien. Akad. Ber. 1884.

2. Die Richtschnur für die folgenden Entwicklungen bildet das Princip der Erhaltung der Energie, nach welchem jeder Arbeitsprocess eine Energie erzeugt, die nicht verloren geht, sondern imstande ist, die auf sie aufgewandte Arbeit wieder zu verrichten. Die Arbeit der Pulvergase wird in die lebendige Kraft oder kinetische Energie der Kanonenkugel verwandelt, und diese vermag ein äquivalentes Demolierungswerk zu verrichten; die Arbeit des Dampfes der Locomotive setzt den Eisenbahnzug in Bewegung, und dessen lebendige Kraft vermag die Reibung an den Schienen zu überwinden; die Arbeit der Muskelkraft verleiht einem nach aufwärts geworfenen Steine lebendige Kraft, und diese hebt das Gewicht des Steines auf eine gewisse Höhe. In allen solchen Fällen sind die bewegten Körper die Träger der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie. Diese Anschaulichkeit besteht bei der potentiellen Energie nicht. Wird ein Gewicht auf eine Höhe gehoben, werden gleichnamige elektrische oder gleichnamige magnetische Massen einander genähert, oder wird eine Magnetnadel einem in der Nähe befindlichen elektrischen Strome parallel gestellt, so wird Arbeit geleistet, potentielle Energie aufgespeichert, die durch die Rückbewegung der Körper wieder gewonnen werden kann. Da die betrachteten Körper nach der zuerst verbrauchten Arbeit in Ruhe sind, so ist ihre Masse in diesem Zustande nicht leistungsfähig, sie besitzt keine Energie; die Körpermasse selbst ist nicht der Träger der potentiellen Energie. Die potentielle Energie bedarf einer besonderen Erklärung, wenn die Fernwirkung der Massen geleugnet wird. Um sie anschaulich zu machen, müssen wir ein Medium rings um die Körper annehmen, auf welches die geleistete Arbeit übertragen wird, und das die Arbeit wieder zurückerstatten kann. Als solches Medium betrachten wir den Weltäther; wir nehmen an, dass in ihm Kräfte entwickelt werden können, die ein Kraftfeld zusammensetzen, und dass er durch seinen Druck die im Felde befindlichen Massen zu bewegen vermag. Er sei der Vermittler der Massenwirkungen, das Medium der Lichterscheinungen und auch der Träger der übrigen physikalischen Energien.

Nach der Ätherhypothese besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen der kinetischen und potentiellen Energie; jede Energie ist wesentlich kinetisch, nur der Träger kann ver-

schieden sein: die sogenannte kinetische Energie hat als Träger die Körpermasse, die potentielle Energie den Äther.

Nach der Annahme des Äthers müssen dessen Eigenschaften vereinbart werden. Anhaltspunkte bieten die allgemeinen Eigenschaften der Körper und das Verhalten der potentiellen Energie. Danach dürfen wir annehmen, dass der Äther aus sehr kleinen, materiellen und beweglichen Theilchen besteht. Die Anordnung und Bewegung der Theilchen müssen so eingerichtet sein, dass der Äther Elasticität zu äußern vermag; denn die Elasticität in engen Grenzen ist eine allgemeine Eigenschaft der Körper, und ihrem Gesetze leisten Licht und Wärmestrahlen Folge.

Als Träger der potentiellen Energie muss er Arbeit aufspeichern und auf umgekehrtem Wege wieder zurückliefern können; er muss für vollkommen umkehrbare physikalische Processe geeignet sein.

Den gestellten Bedingungen wird durch die Annahme genügt, dass durch Verschiebung von Äthertheilchen oder Theilchengruppen eine Kraft geweckt wird, welche der Größe der Verschiebung proportional ist. Dem Äther wird hiedurch elastisches Verhalten beigelegt; dasselbe unterscheidet sich jedoch von dem Verhalten gewöhnlicher elastischer Körper, indem bei diesen die relative Verschiebung, bei dem Äther aber die absolute Verschiebung gewisser Theilchengruppen für die geweckte Kraft maßgebend ist, beziehungsweise sein soll.

Aus dieser Ätherhypothese sollen die Grundgesetze der Elektricität, des Lichtes, der Wärme und der ponderablen Materie abgeleitet werden.

3. Vor Anwendung des Grundsatzes sollen erst noch einige Bemerkungen über die Constitution des Äthers Platz finden. Es soll versucht werden, von den Vorgängen im Äther ein Bild zu gewinnen, welches mit der Verschiebungstheorie im Einklange steht, und damit gegenüber gegentheiligen Meinungen auf die Möglichkeit einer Erklärung der Elasticität hinzuweisen. Keinesfalls soll aber das Verschiebungsgesetz von den anzuführenden speciellen Umständen abhängig gemacht oder eingeschränkt werden.

Vollkommen elastische Körper sind die vollkommenen Gase, und es liegt nahe anzunehmen, dass dem Äther der Gaszustand zukomme. Von dieser Annahme gehen auch die

Ätherstoßtheorien im Sinne Lesages aus. Sie erklären die sogenannte Massenwirkung in die Ferne als Antrieb, den die Massen durch die Stöße der Athertheilchen zur Bewegung gegeneinander empfangen. Die Versuche mit den pulsierenden Trommeln von Bjerknes im Wasser und von Aug. Stroh in der Luft beweisen, dass die flüssigen und gasförmigen Medien thatsächlich Fernwirkungen vermitteln.

Nichtsdestoweniger dürfte die kinetische Theorie unzureichend sein, andere Erscheinungen zu erklären, z. B. den Polarisationszustand im elektrischen Felde, die elektromagnetischen Stromwirkungen und die Fortpflanzung der transversalen Wellen des Lichtes, der Elektricität und des Magnetismus.

Die Schwierigkeit der Erklärung liegt darin, dass nach der Annahme der geradlinigen Bewegung der Athertheilchen die einzelnen Schichten zur Localisierung der Energie nicht geeignet erscheinen und deshalb auch eine elastische Kraft in der Verschiebungsrichtung der Theilchen nicht zu entwickeln vermögen.

Wir gelangen jedoch zu einer mit den Erscheinungen harmonierenden Vorstellung, ohne uns im wesentlichen von der Annahme des Gaszustandes des Äthers zu trennen, wenn wir voraussetzen, dass die einzelnen Äthertheilchen wegen der häufigen Zusammenstöße mit den Nachbartheilchen gezwungen sind, sich innerhalb eines sehr kleinen Raumes zu bewegen. Wir beschränken dabei nur die kinetische Gastheorie auf einen äußerst kleinen Raum, gelangen aber hiedurch auf den Standpunkt der Wirbel- und Elasticitätstheorie. Es lässt sich nämlich zeigen, dass bei sehr häufigen Zusammenstößen der Massentheilchen eine kreis- oder wirbelförmige Bewegung entstehen muss, welche eine dem Elasticitätsgesetze entsprechende Fliehkraft entwickelt. Sind die Äthertheilchen zu kleinen Wirbeln gruppiert, dann lässt sich auch erklären, dass durch eine äußere Kraft ihre Bahn geändert, ihre Energie vermehrt und Arbeit aufgespeichert werden kann. Diese Energie ist die potentielle Energie. Bei einer Abweichung der Theilchen von der Kreisbahn kann infolge verschiedener Krümmungsverhältnisse oder infolge verschiedener Geschwindigkeiten (etwa wie bei der Planetenbewegung im Perihel oder Aphel) die Fliehkraft auf einer Seite des Wirbels größer sein als auf der anderen; damit wäre ein Polarisationszustand begründet. Nach

de[illegible] Verschwinden der äußeren Ursache würde die aufgespeicherte potentielle Energie wieder abgegeben, und es müsste der Polarisationszustand aufhören.

Zur näheren Erläuterung des Vorstehenden denken wir uns, dass ursprünglich die Äthertheilchen im Sinne der kinetischen Gastheorie im Raume nach allen Richtungen mit einer gewissen Geschwindigkeit umherfliegen und dass zahlreiche Zusammenstöße erfolgen. Die Äthertheilchen lenken einander dadurch beständig von ihren Richtungen ab; sie beschreiben eine krummlinige Bewegung, wenn die Zusammenstöße unmittelbar aufeinanderfolgen. Ein Äthertheilchen wird längs seiner Bahn von den stoßenden Theilchen Arbeit empfangen und seine lebendige Kraft verändern. Ein dauernder Zustand wird dann eintreten, wenn keine Arbeit von einem Theilchen auf das andere übertragen wird, wenn die lebendigen Kräfte constant bleiben. Der Zustand ist jedenfalls erreicht, wenn sich die Theilchen zu Wirbeln gruppieren und wenn die Theilchen eines Wirbels constante Umdrehungszeit besitzen. Der Schluss folgt unmittelbar aus dem Energieprincip. Fassen wir nämlich ein Theilchen in einem Elemente seiner krummen Bahn ins Auge und bestimmen die Arbeit dA einer auf dasselbe wirkenden äußeren Kraft, so haben wir eine eventuelle Verschiebung des Bahndruckes p und die Vermehrung der lebendigen Kraft zu berücksichtigen. Wir erhalten dafür, wenn m die Masse des Theilchens, r der Krümmungshalbmesser des Bahnelementes und u die Geschwindigkeit angeben:

$$dA = -p\,dr + m\,u\,du \tag{1}$$

Nun ist: $u = r . \omega$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit ist, die ebenso wie r veränderlich sein soll; danach wird:

$$dA = \left(-p + \frac{m\,u^2}{r}\right) dr + m\,u\,r . d\omega \tag{1'}$$

Die Arbeit dient demnach zur normalen Verschiebung der Bahn und zur Vermehrung der Tangentialgeschwindigkeit. Für den stationären Zustand muss $dA = 0$ sein. Die Bedingungen dafür sind, dass die Tangentialbeschleunigung $r\,d\omega/dt$ gleich Null und ebenso die zu derselben normale Kraft gleich Null, also

$$p = \frac{m\,u^2}{r} \tag{2}$$

sind.

Der äußere Druck entspricht also dem Gesetze der Fliehkraft. Die gleichförmige Kreisbewegung genügt den Forderungen vollkommen, wenn von außen keine Kraft einseitig einwirkt; denn ihre lebendige Kraft ist constant.

Denken wir uns die Masse m längs des Umfanges des Kreises gleichmäßig vertheilt, so haben wir das Bild eines mit den Bedingungen des Dauerzustandes übereinstimmenden ebenen Wirbels.

Die Fliehkraft bestimmt den Ätherdruck. Sie ist abhängig von der Geschwindigkeit u und dem Halbmesser r. Zwischen u und r können nun mannigfache Beziehungen stattfinden. Bei der Kreisbewegung ist $uT = 2r\pi$, wenn T die Umdrehungszeit ist; damit wird

$$p = m.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.r \tag{2'}$$

Bei constanter Umdrehungszeit ist die Änderung der Fliehkraft p der Änderung des Halbmessers r oder der Verschiebung der Masse gegen den Mittelpunkt proportional. Das ist bereits unser Elasticitätsgesetz, wenn die verschiebende Kraft central wirkt. $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ bestimmt die Elasticitätsconstante.

Bei den kreisförmigen Bewegungen werden auch noch andere Beziehungen zwischen u und r eingeräumt werden müssen. Es soll z. B. auf den Fall hingewiesen werden, dass durch einen äußeren, central gerichteten Bahndruck die Kreisbahn verkleinert wird; diesfalls bleibt die Flächengeschwindigkeit ($\frac{1}{2}\,u\,r$) der rotierenden Masse erhalten und es ist

$$u\,r = C \text{ const.}$$

Die Fliehkraft wird:

$$p = m.\frac{C^2}{r^3}$$

und ihre Änderung:

$$dp = -\,3m\left(\frac{C}{r^2}\right)^2.dr \tag{2''}$$

Demnach nimmt die Kraftänderung mit wachsendem Radius ab und ist der Änderung dr proportional.

Fasst man den letzten Wert auch als ein Elasticitätsgesetz auf, so ergibt sich, dass der Elasticitätscoëfficient

[illegible]² nicht constant, sondern r^1 umgekehrt oder dem Quadrate der lebendigen Kraft direct proportional ist.

Werden die betrachteten Verhältnisse der Ebene auf den Raum übertragen, so müssen die Bewegungen der Äthertheilchen auf einer Kugelfläche angenommen werden. Der Forderung, dass der Druck (die Fliehkraft) nach allen Seiten hin gleich groß sei, wird alsdann entsprochen, wenn die Rotationen in größten Kreisen und in gleichen Zeiten erfolgen; für die Ebenen, in welchen die Kreisbahnen liegen, sind alle Lagen gleichberechtigt. Bei den Bewegungen der Äthertheilchen in allen möglichen größten Kreisen auf der Kugel wird die lebendige Kraft nicht geändert, woraus folgt, dass die Kugel eine Niveaufläche ist. Der kugelförmige Wirbel muss aber nicht lediglich aus den Theilchen bestehen, welche sich auf einer Niveaufläche bewegen; es ist vielmehr mit den Bedingungen des stationären Zustandes vollkommen vereinbar, mehrere concentrische kugelförmige Wirbel — etwa aus aneinanderliegenden, gleichzeitig rotierenden Massentheilchen bestehend — als zusammengehörig anzunehmen. Der zusammengesetzte Wirbel würde eine rotierende Ätherhülle um einen kugelförmigen Raum bilden, dessen Centrum zur Concentration von Massentheilchen, eventuell zur Bildung ponderabler Masse im Sinne Kants geeignet wäre. Wir wollen einen solchen Wirbel der Kürze wegen Ätheratom nennen.

Jedes Kraftfeld muss mit Ätheratomen erfüllt sein. Dieselben halten einander gegenseitig das Gleichgewicht, wenn sie einander berühren und die Fliehkräfte ihrer Wirbel entgegengesetzt gleich sind. Zwischen den äußeren Grenzflächen der Atome bleibt dann noch ein Raum übrig, der keinem bestimmten Wirbel angehört. Indessen können wir auch die Gründe der Wirbelbildung auf die Äthertheilchen dieses Zwischenraumes anwenden und feststellen, dass die betreffenden Theilchen zu jedem der benachbarten Wirbel zu rechnen sind, und dass sie die Resultierende aller ihnen zukommenden Bewegungen zurücklegen werden. Durch die Bewegung dieser Theilchen wird der Druck auf die umliegenden Atome ausgeübt; die Bildung eigener kleiner Wirbel, deren lebendige Kraft geändert werden kann, ist [illegible] nicht ausgeschlossen.

Die [illegible] werden durch ihre [illegible] und ihre Bewegung [illegible]

Raume eintreten, wenn Atome fortgenommen würden. Der gegenseitige Einfluss kann durch das Interferenzprincip anschaulich gemacht werden, das hier als eine Consequenz des Satzes erscheint, dass die Kreisbewegung dem stationären Zustande vollkommen entspricht.

Wir denken uns jedes Atom als Centrum eines über den ganzen Raum ausgebreiteten Wirbels; sämmtliche Wirbel interferieren und jeder einzelne kann als das Resultat der Interferenz aufgefasst werden. Auf einen bestimmten Wirbel wirken von allen Seiten gleiche Drücke, die Fliehkräfte der umliegenden Wirbel; im Gleichgewichtszustande heben sich sämmtliche Fliehkräfte auf. Wird der betreffende Wirbel nach einer Seite hin bewegt, so kommt er aus seiner Gleichgewichtslage heraus, er rückt den Centren der Wirbel auf einer Seite näher und entfernt sich von den Wirbeln auf der anderen Seite; die auf ihn wirkenden Fliehkräfte sind nicht mehr von beiden Seiten gleich, sondern sie wirken auf einer Seite stärker, und zwar nach dem Gesetze für die Änderung der Fliehkraft: $\Delta p = m(2\pi/T)^2 . \Delta r$.

Das Gesetz stimmt mit dem Elasticitätsgesetze überein; es ist bedingt durch die Verschiebung eines einzelnen Ätheratoms, also durch ungleiche Abstände der Atome. Die Erscheinungen des Lichtes und der Elektricität fordern aber eine Kraftentwicklung auch unter anderen Umständen; es findet in der Regel eine Ätherverschiebung statt, welche sich nach einer gewissen Richtung fortpflanzt. Auch in diesem Falle vermögen die Wirbel Kräfte zu entwickeln, welche ein Kraftfeld constituieren.

Findet eine Ätherverschiebung etwa von der linken Seite des Raumes her statt, so wird jeder Wirbel auf dieser Seite eingeengt und Äthertheilchen werden längs der Wirbelbahn nach rechts hin bewegt. Dabei vermag die linke Seite des Wirbels der Verschiebung einen Widerstand entgegenzusetzen; denn wird der Halbmesser des Wirbels auf der linken Seite durch den äußeren Druck verkleinert, so gilt das Flächengesetz und die Fliehkraft wächst (nach Gl. 2") im umgekehrten Verhältnisse der vierten Potenz des Halbmessers gegen den Mittelpunkt hin. Die Theilchen, die dem Centrum näher liegen, werden demnach eine bedeutend größere Fliehkraft entwickeln als jene mit größeren Radien; die linke Seite einer Niveaufläche, welche einen entsprechend kleinen Halbmesser besitzt, wird wie eine feste Wand wirken, über die hinweg ein Theil des Äthers nach

rechts hin bewegt wird. Ist die Verschiebung, welche sich im Raume von links nach rechts fortpflanzt, gleich σ, so wird auch eine Äthermenge von der Dicke σ von der linken Seite des Atoms an die rechte treten; dabei geht die Entfernung des Mittelpunktes der bewegten Äthermenge vom Atomcentrum von $(r - \frac{1}{2}\sigma)$ links über in $(r + \frac{1}{2}\sigma)$ rechts, wenn r der Atomhalbmesser ist. Die Entfernung vom Centrum und damit auch der Drehungshalbmesser ändern sich um σ, und es erleidet die Fliehkraft eine der Verschiebung σ proportionale Änderung. Da durch den Vorgang auch der Massenmittelpunkt des Atoms um σ verschoben wird, so folgt, dass die Änderung der Fliehkraft der Verschiebung des Atoms proportional ist.

Unter dem Einflusse eines äußeren einseitigen Druckes wird also jeder Wirbel seine Form ändern; die Äthertheilchen werden von der Kreisbahn abgelenkt und die kugelförmige Niveaufläche geht in eine andere Form über. Es wird ein neuer Gleichgewichtszustand entstehen; derselbe wird ausgebildet sein, wenn die Äthertheilchen sich auf neuen Niveauflächen bewegen. Nachdem die Lehren der Mechanik und die Erscheinungen der optischen Doppelbrechung für anisotrope Medien die ellipsoidische Form der Niveaufläche fordern, so werden wir annehmen dürfen, dass die Niveaufläche von der Kugelform abweicht, sich einem Ellipsoide nähert, vielleicht die Eiform besitzt, jedenfalls aber eine Rotationsfläche mit der Kraftrichtung als Achse ist.

Welche Bahnen die Äthertheilchen auf der Niveaufläche beschreiben, soll nicht näher untersucht werden; nur darauf soll hingewiesen werden, dass Kreisbewegungen um die Rotationsachse, die Kraftrichtung des Feldes, jedenfalls entstehen werden. Dieselben entsprechen der herrschenden centralen Symmetrie bezüglich der Kraftrichtung und erklären den normalen Druck zur Kraftlinie, der von Faraday constatiert wurde.

Die gesammte von den Wirbeln aufgenommene Energie repräsentiert die potentielle Energie des Kraftfeldes. Durch Zurückführung des Feldes in seinen ursprünglichen Zustand wird die potentielle Energie wieder gewonnen.

Wenn wir die Atome der schweren Masse ähnlich constituiert denken wie die Ätheratome, so lässt sich bezüglich des elektrischen Feldes schließlich bemerken, dass I s o l a t o r e n die Erhaltung der potentiellen Energie und somit auch die Er-

haltung der Ätherwirbel in der entsprechenden Form fordern, während die Leiter die Energie fortleiten und in Wärme verwandeln, also ein Verhalten zeigen, das durch Übergang der Äthertheilchen von einem Atom zum anderen erklärt werden kann.

Zum Schlusse dieses Abschnittes soll noch die Energie eines Ätheratoms ermittelt und gezeigt werden, dass dieselbe dem allgemeinen Gesetze eines Kraftfeldes entspricht. Wir denken uns n um eine Achse rotierende Massentheilchen m zunächst über einer Cylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe h ausgebreitet; der Druck pro Flächeneinheit infolge der Fliehkraft sei P; dann ist die Fliehkraft über dem ganzen Mantel:

$$P.2r\pi.h = n.\frac{mu^2}{r}.$$

Durch Einführung des Cylindervolumens v erhält man:

$$P.v = \tfrac{1}{2}.n.m.u^2. \qquad (3)$$

In gleicher Weise findet man für ein kugelförmiges Volumen v:

$$P.v = \tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}n.m.u^2. \qquad (3')$$

Die Gleichungen geben die Energiewerte der Volumen v in einer Form, welche unmittelbar mit dem Gasgesetze und im weiteren Sinne mit der Zustandsgleichung der ponderablen Körper übereinstimmt. Es lässt sich aus derselben aber auch der Arbeitswert z. B. eines elektrischen Kraftfeldes finden, wenn dieses durch eine Druckänderung $\triangle P$ erzeugt wurde. Man erhält dafür:

$$A = \Sigma\tfrac{1}{2}v.\varDelta P. \qquad (4)$$

Die Berechnung der Summe über den ganzen Raum des Feldes führt zu den gebräuchlichen Potentialfunctionen.[1])

4. Die Gleichungen des Kraftfeldes. Wir stellen die Ausdrücke für die Kraft und die Arbeit der Verschiebung des Äthers an einer beliebigen Stelle des Kraftfeldes auf. Finden die Verschiebungen radial von einem Centrum aus statt, so ist auch die geweckte Kraft central gerichtet. Ist die Kraft p, die Verschiebung σ, die Masse m und die Elasticitätsconstante k, so gilt:

$$p = k.m.\sigma. \qquad (5)$$

---

[1]) Vgl. meine Abhandlung: „Zur Übereinstimmung d. versch. phys. Arbeitsgesetze." Zeitschr. f. d. Realschulw. Wien. 1892.

Die geleistete Arbeit, berechnet mit dem Mittel der geweckten Kraft, ist:

$$A = \tfrac{1}{2} p . s = \tfrac{1}{2} k m s^2. \qquad (6)$$

Diese Gleichungen dienen einigen einfachen Fällen der Elektrostatik als Grundlage. (6) geht in die Form (4) über, wenn für m das Product aus dem Vol. v in die Dichte δ eingesetzt wird.

Ist die Verschiebung $s = \xi$ und damit auch die Kraft $p = X . m$ parallel der x-Achse eines Coordinatensystems, so sind

$$X . \delta . dx . dy . dz = k . \delta . dx . dy . dz . \xi$$

$$X = k . \xi \text{ und } A = \tfrac{1}{2} k \xi^2 = \frac{1}{2k} . X^2 \qquad (7)$$

Hierin ist die Kraft X auf die Masseneinheit bezogen und für die Dichte wurde δ gesetzt.

Die Gleichungen sind besonders auf ein gleichförmiges Kraftfeld anwendbar.

Im allgemeinen werden die Verschiebungen an den verschiedenen Stellen des Raumes verschieden gerichtet und auch verschieden groß sein. Es treten in diesem Falle Verhältnisse auf, welche durch die Maxwell'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik bestimmt werden.

Behufs Ableitung der Gleichungen betrachten wir ein Raumelement $(dx . dy . dz)$, dessen Lage, auf drei rechtwinklige Achsen bezogen, durch die Coordinaten x, y, z bestimmt sei. Die Verschiebung eines Eckpunktes besitze die Componenten ξ, η, ζ. Es erleidet das Volumelement nicht bloß eine Längsverschiebung, sondern auch eine Drehung, welche sich in Drehungen um die drei Coordinatenachsen zerlegen lässt. Durch die Bewegung wird eine Kraft geweckt und die Gleichungen bestimmen die Beziehung zwischen den Kräften der Längsverschiebung und den infolge der Drehung entwickelten Kräften.

Die geweckten elastischen Kräfte infolge der Verschiebungen ξ, η, ζ pro Masseneinheit sind:

$$X = k \xi, \quad Y = k \eta, \quad Z = k \zeta$$

Maxwell „Elektricitätslehre" Deutsch von Weinstein. Ableitungen von [illegible] Grundgleichungen [illegible] L. Boltzmann „Über ein Medium, [illegible] auf d. Maxwell'schen Gl. führen." Bayr. Akad. 1892. [illegible] Maxwells Theorien." — A. Sommerfeld: „Mech. [illegible] Vers. A. Bd. 46. 1892. — J. J. Thomson: [illegible] Fehler mittels d. Inductionsröhren." Phil. Mag. [illegible]

Daraus folgt für die Druckänderungen:

$$\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = k\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right).$$

Aus dem Durchschnitte des Elementarwürfels nach der Verschiebung (Fig. 1) ist sofort ersichtlich, dass $d\xi/dz$ den Drehungswinkel um die y-Achse infolge der Verschiebung $d\xi$, und $d\zeta/dx$ den Drehungswinkel um y infolge von $d\zeta$ bedeuten, dass also $(d\xi/dz - d\zeta/dx)$ die Summe beider Drehungen um die y-Achse bestimmt. Die rechte Seite der Gleichung gibt demnach in der Entfernung 1 von 0 eine elastische Kraft, welche infolge der Drehung erzeugt wurde.

Fig. 1.

Die Gleichung stimmt ihrer Form nach bereits mit einer Maxwell'schen Grundgleichung überein, wenn X und Z als elektrische Kräfte bezeichnet werden, und wenn die rechte Seite einer magnetischen Kraft M in der y-Richtung proportional gesetzt wird. Die Entwicklung der letzteren Kraft folgt nicht unmittelbar aus den in der Gleichung enthaltenen Verschiebungen ξ und ζ. Wir gewinnen aber die Vorstellung einer entsprechenden Kraftentwicklung, wenn wir den Äthertheilchen, auf welche die Kräfte X und Z wirken, eine Wirbelbewegung, und zwar eine kreisförmige Bewegung um die Kraft- oder Verschiebungsrichtung zuschreiben. Ein solcher Wirbel, z. B. im Punkte A (Fig. 1) repräsentiert dann einen Kreisel mit der Achse OA oder z; derselbe soll gleichzeitig infolge der Gleichung eine Drehung um die y-Achse ausführen. Nach dem Gesetze der Zusammensetzung der Drehungen muss die Kreiselachse OA der y-Achse zustreben; ein Atom in A sucht daher senkrecht aus der xz-Ebene herauszutreten und übt in dieser Richtung einen Druck aus. Eine ähnliche Betrachtung lässt sich auf sämmtliche Theilchen (Atheratome) in den xz-Ebenen anwenden; aus derselben folgt die Entstehung eines Ätherdruckes in der Richtung und nach dem Gesetze der magnetischen Kraft.

In ähnlicher Weise wie die elektrische Kraft kann auch die magnetische Kraft von einer Verschiebung begleitet sein,

welche der Kraft proportional ist und magnetische Polarisation genannt wird.

Wird nun die Größe der magnetischen Kraft in der y-Richtung mit M und der zugehörige Proportionalitätsfactor mit μ bezeichnet, so erhält die vorstehende Gleichung die Form:

$$\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = \mu M.$$

Analog ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} &= \mu N \\ \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} &= \mu L, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wobei L und N die magnetischen Kräfte in den Richtungen der x und z-Achse sind.

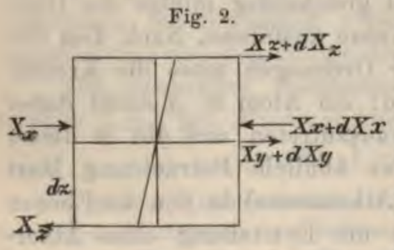
Die Gleichungen gelten für den stationären Zustand. Sind die Kräfte mit der Zeit veränderlich, so erhalten wir Beziehungen zwischen denselben, welche die erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen liefern. Wir setzen darin $dX/dt = X^1$ etc. und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \mu.\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ^1}{dy} - \frac{dY^1}{dz} \\ \mu.\frac{dM}{dt} &= \frac{dX^1}{dz} - \frac{dZ^1}{dx} \\ \mu.\frac{dN}{dt} &= \frac{dY^1}{dx} - \frac{dX^1}{dy}. \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

Damit sind die magnetischen Kräfte durch die elektrischen bestimmt.[1])

Zur Ermittlung der elektrischen Kräfte benützen wir die auf die Seitenflächen eines würfelförmigen Raumelements wirkenden Kräfte, welche der drehenden und fortschreitenden Bewegung des Elements das Gleichgewicht halten. Wir können annehmen, dass die betreffenden Kräfte von dem Äther der Umgebung ausgeübt werden.

Fig. 2.



Figur 2 gebe einen Durchschnitt des Raumelementes. Auf die

[1]) Siehe H. Hertz: „Über die Grundgleichungen der Elektrodyn. f. ruh. Körper.“ Götting. Nachr. Nr. 4, 1890.

zu x parallelen Seiten wirken die Flächenkräfte: X_z längs der Seiten $(dx.dy)$ und X_y längs $(dx.dz)$; normal zu den Ebenen $(dy.dz)$ sei X_x. Die algebraische Summe der Componenten gibt die elektrische Kraft X, für welche also gilt:

$$X.\delta.dx.dy.dz = \frac{d^2\xi}{dt^2}.\delta.dx.dy.dz =$$

$$= \left(\frac{dX_z}{dz} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_x}{dx}\right) dx.dy.dz.$$

Nun ist $X_z.dz$ das Drehungsmoment des Raumelementes um die y-Richtung, und dafür lässt sich, entsprechend der Einführung der magnetischen Kraft M, eine dieser proportionale Größe also $M.\delta/c$ setzen. Ebenso entspricht dem Drehungsmoment $X_y.dy$ der Ausdruck $-N\delta/c$. Durch Einführung dieser Werte erhält die vorstehende Gleichung die Form:

$$X = \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right) + \frac{1}{\delta}.\frac{dX_x}{dx} \tag{8}$$

oder mit Rücksicht auf $X = k\xi$

$$\frac{c}{k}.\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} + \frac{c}{\delta}.\frac{dX_x}{dx}.$$

Zu der Gleichung sei nebenbei bemerkt, dass die Kräfte des Raumelementes, welche die Gleichung lieferten, augenscheinlich mit Wirbelkräften übereinstimmen: die Kräfte X_z und X_y mit Tangentialkräften und X_x mit der Fliehkraft des Wirbels.*)

Setzen wir nun $dXx/dx = 0$, $dX/dt = X^1$ und bilden auch die analogen Gleichungen für Y^1 und Z^1, so erhalten wir die zweite Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{c}{k}.\frac{dX^1}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \\ \frac{c}{k}.\frac{dY^1}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} \\ \frac{c}{k}.\frac{dZ^1}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{aligned} \tag{8'}$$

Die angegebenen Gleichungen (7') und (8') stellen nun die Beziehungen zwischen den Verschiebungs- und Drehungskräften, beziehungsweise zwischen elektrischen und magnetischen Kräften fest. Daneben bestehen auch noch die Werte für die bei den Bewegungen geleisteten Arbeiten. Für die Verschiebungsarbeit

e[illegible]t man ähnlich der Gleichung (6′) aus den Kräften X, Y, Z

$$\tfrac{1}{2}k(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Da die Kräfte während der Verschiebung von Null bis zu ihren angegebenen Werten anwachsen, so sind die Arbeiten mittelst der mittleren Kräfte, d. i. mit den halben Kraftwerten berechnet.

Die Arbeit der Drehung um die Y-Richtung wird erhalten durch das Product aus dem halben Drehungsmoment $M/2c$ in den Drehungswinkel w. Da nach Gl. (7) $k.w = \mu.M$, so folgt für die Dreharbeit um y:

$$\frac{1}{2c}\cdot M.w = \frac{\mu}{2ck}.M^2$$

und danach für die ganze Dreharbeit:

$$\frac{\mu}{2ck}.(L^2 + M^2 + N^2).$$

Die Bedeutung und die Werte der Constanten sollen bei einigen speciellen Erscheinungen ermittelt werden.

II.

Elektrische Erscheinungen.[1])

5. Ladungsarbeit einer Kugel. Im Sinne der unitarischen Theorie Franklins und Edlunds betrachten wir den Äther als Elektricität. Breitet sich eine neue Ätherschichte auf der Oberfläche eines gutleitenden Körpers aus, so entsteht eine positive elektrische Ladung. Die Entziehung einer oberflächlichen Ätherschichte hat eine negative Elektrisierung zur Folge. Die zugeführte Äthermenge der Oberflächenschichte selbst sei die positive elektrische Masse, die entzogene Äthermenge die negativ elektrische Masse.

Wir wählen nun als Conductor eine Kugel. Die Ausbreitung einer Ätherschichte auf der Oberfläche derselben hat eine schichtenweise Verschiebung des Äthers im Raume ringsumher, die Weckung elastischer Kräfte und somit einen Zwangszustand

---

[1]) Vgl. meine Schrift: „Das Princip der Erhaltung der Energie in d. elem. Elektricitätslehre“. Leipzig, Teubner, 1887.

daselbst zur Folge; es entsteht im Sinne Faradays und Maxwells um die Kugel ein elektrisches Kraftfeld, in welchem die Arbeit der elektrischen Ladung aufgespeichert wird. Die Kraftrichtung im Felde wird durch die Richtung der Ätherverschiebung bestimmt. Sie ist bei kugelförmigen Conductoren radial, und somit verlaufen auch die elektrischen Kraftlinien von der Oberfläche aus normal und in geraden Linien.

Der Unterschied der Faraday-Maxwell'schen Auffassung und der Hypothese der fernwirkenden Fluida ist hiemit anschaulich gemacht: Nach der Hypothese der elektrischen Fluida hat die elektrische Kraft in der elektrischen Masse der Oberfläche ihren Sitz und wirkt unvermittelt in die Ferne; nach der Faraday-Maxwell'schen Theorie ist das den Conductor umgebende Medium der Träger der elektrischen Energie, es besteht ein Kraftfeld, das die elektrischen Wirkungen ausübt. Die bei der Erzeugung des Kraftfeldes erfolgte Verschiebung repräsentiert einen Ladungsstrom, welcher bei der Entladung des Conductors wieder rückgängig gemacht wird. Ein solcher Strom besteht nach der anderen Hypothese nicht.

Es lässt sich nun leicht die Ladungsarbeit, die zur schichtenweisen Verschiebung des Äthers erforderlich ist, berechnen und zeigen, dass der Wert derselben mit der nach der Potentialtheorie ermittelten Energie einer elektrischen Kugel übereinstimmt.

Der Halbmesser der Kugel sei r, die sehr kleine Dicke der zugeführten Ätherschichte sei σ_0, die Ätherdichte δ. Die Äthermasse in dieser Schichte ist die Elektricitätsmenge e, mit welcher die Kugel geladen ist; somit besteht die Gleichung

$$e = 4\, r^2 \pi . \sigma_0 . \delta \tag{9}$$

Diese Ladung verdrängt den umliegenden Äther, so dass jede mit der Kugel concentrische Schichte desselben um den gleichen Raum nach auswärts verschoben wird. Eine kugelförmige Schichte vom Halbmesser R wird also um den gleichen Raum, den die Ladung einnimmt, verschoben; ist die Verschiebung in der Entfernung R gleich σ, dann ist:

$$4\, R^2 \pi . \sigma = 4\, r^2 \pi . \sigma_0$$

und daraus

$$\sigma = \frac{r^2}{R^2} . \sigma_0 \tag{10}$$

Auf den Zustand des Kraftfeldes sind die Maxwell'schen Gleichungen in der Form (8) und (8') zu beziehen; sie reichen aber zu besonderen Berechnungen nicht aus.

Es bestehen keine magnetischen Kräfte, daher sich die Gleichungen auf die elektrische Verschiebungskraft beschränken. Für diese setzen wir nach unserer Grundannahme (Gl. 5)

$$p = \varkappa . \mu . \sigma .$$

Hierin ist die Masse der verschobenen Schichte

$$\mu = 4 . R^2 \pi . \delta . dR .$$

Die Verschiebungsarbeit einer Schichte, berechnet aus der mittleren Kraft $p/2$, ist:

$$d W = \tfrac{1}{2} p . \sigma = \tfrac{1}{2} \varkappa . 4 \pi . r^4 . \delta . \sigma_0{}^2 . \frac{dR}{R^2}$$

oder

$$d W = \frac{\varkappa}{8 \pi \delta} . e^2 . \frac{dR}{R^2} \qquad (11)$$

Darnach erhält man für die Arbeit im ganzen Kraftfelde:

$$W = \frac{\varkappa}{8 \pi . \delta} . e^2 . \int_r^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{\varkappa}{4 \pi . \delta} . \frac{e^2}{2 r} .$$

Die Constante $\varkappa / 4 \pi . \delta$ ist von der Natur des Mittelst im Kraftfelde abhängig; wie aus der Ladung eines Condensators noch genauer hervorgehen wird, stimmt sie mit der sogenannten Dielektricitätsconstanten des Mittelst überein. Wählen wir die Elektricitätseinheit so, dass die Dielektricitätsconstante für die Luft = 1, also $\varkappa \delta = 4 \pi$ ist, dann erhalten wir für die Ladungsarbeit in der Luft:

$$W = \frac{e^2}{2 r} \qquad (12)$$

und für das Potential den Arbeitswert der Elektricitätseinheit:

$$V = \frac{d W}{d e} = \frac{e}{r} \qquad (12')$$

Beide Werte stimmen mit den Energiewerten, welche mittelst des Coulomb'schen Gesetzes berechnet werden, vollkommen überein.

6. Elektrische Dichte. Theorem von Coulomb. Wenn die Ätherschichte, welche die elektrische Ladung reprä-

sentiert, auf einem Oberflächenelemente irgend eines leitenden Körpers die Dicke σ hat, so ist die Äthermenge über der Flächeneinheit $\sigma.\delta = \varepsilon$ die elektrische Dichte.

Massentheilchen μ auf der oberen Seite der Schichte haben die Verschiebung σ erfahren und die daselbst wirkende Kraft ist:

$$p = \varkappa \mu \sigma = \frac{\varkappa}{\delta}.\mu.\varepsilon.$$

Ziehen wir die Masseneinheit $\mu = 1$ in Betracht und setzen den in der Luft giltigen Wert $\varkappa/\delta = 4\pi$, so wird:

$$p = 4\pi.\varepsilon.$$

Fassen wir p als den Unterschied der zu beiden Seiten der Ladungsschichte wirkenden Kräfte auf, so gibt die Gleichung das Theorem von Coulomb. Der Satz kann hier wie nach jeder anderen Theorie benützt werden, um nachzuweisen, dass im Innern eines Conductors keine Elektricität vorhanden ist. Er lehrt insbesondere im Sinne der Verschiebungstheorie, dass im Innern guter Leiter keine Ätherverschiebung bestehen kann, wenn Gleichgewicht herrschen soll.

Der elektrostatische Druck ist der Druck der Oberflächenschichte auf die Flächeneinheit. Um denselben zu erhalten, nehmen wir für p die elastische Kraft in der Mitte der Schichte und setzen für $\mu = 1.\sigma.\delta$; damit wird

$$p = \tfrac{1}{2}\varkappa(1.\sigma.\delta)\,\sigma = \tfrac{1}{2}.\frac{\varkappa}{\delta}(\sigma.\delta)^2$$

und für Luft:

$$p = 2\pi.\varepsilon^2.$$

Das ist der für den elektrostatischen Druck giltige Ausdruck.

7. Elektrisches Gleichgewicht. Als eine Anwendung der Ladungsenergie eines Kugelconductors soll die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, welche durch einen sehr dünnen und langen Draht miteinander verbunden sind, berechnet werden. Jede Kugel liege außerhalb des Kraftfeldes der anderen; dann sind die Ladungsarbeiten:

$$W_1 = \frac{e_1^2}{2r_1},\quad W_2 = \frac{e_2^2}{2r_2}.$$

Gleichgewicht herrscht, wenn bei einer virtuellen Verschiebung einer verschwindend kleinen Elektricitätsmenge keine

Arbeit geleistet wird. Geht die Elektricität de von einer Kugel zur anderen über, so ist die Summe der Arbeitsänderungen oder die Arbeitsleistung:

$$\left(\frac{dW_1}{de_1} - \frac{dW_2}{de_2}\right) de = \left(\frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2}\right) de.$$

Dieselbe wird gleich Null, wenn

$$\frac{e_1}{r_1} = \frac{e_2}{r_2},$$

d. h. es herrscht Gleichgewicht, wenn die Potentiale auf den beiden verbundenen Kugeln einander gleich sind.

Die Verallgemeinerung des Satzes für beliebige Flächen ist [illegible]

[illegible] Bringt man einen gut leitenden [illegible] Körpers, also in ein [illegible] an der [illegible] elek- [illegible] der [illegible]

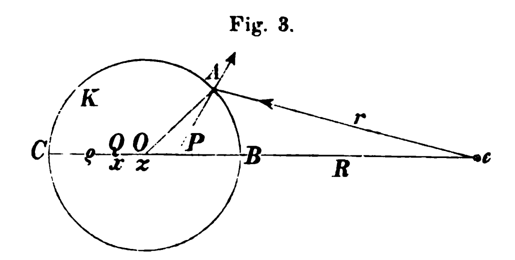
[illegible]

Nach der angegebenen Verschiebung wird aber auf der Leiteroberfläche kein Gleichgewicht bestehen, da die Verschiebungskräfte auf der dem elektrischen Körper näheren (—) Seite stärker sind als auf der entfernteren (+) Seite. Zufolge der Leitungsfähigkeit finden noch weitere Verschiebungen statt, bis der elektrostatische Druck überall zur Oberfläche normal steht, also bis das Potential im ganzen Körper constant ist.

Der Vorgang ist für die Elektricitätserregung nach der Theorie der Ätherverschiebung von fundamentaler Bedeutung; es soll deshalb noch nachgewiesen werden, dass derselbe zu den bekannten Gesetzen der Influenzelektricität führt.

Wir betrachten eine Kugel K im elektrischen Felde eines Punktes oder einer anderen, sehr kleinen Kugel mit der Ladung e (Fig. 3). Der Abstand des Kugelmittelpunktes O von e sei R,

Fig. 3.



der Kugelhalbmesser ϱ, der Mittelpunkt der negativen Influenzelektricität $(-e_1)$, in dem man sich $(-e_1)$ vereint denken kann, sei P, und dessen Entfernung von O sei $OP = z$, der Mittelpunkt der positiven Influenzelektricität $(+e_1)$ sei Q und $OQ = x$.

Nun sollen e_1, x und z bestimmt werden. Die dazu nöthigen drei Bedingungsgleichungen erhält man aus drei bekannten Gleichgewichtsbedingungen: Auf K herrscht elektrisches Gleichgewicht unter dem Einflusse von e, $+e_1$ und $-e_1$; es kann auch $+e_1$ abgeleitet werden und es herrscht wieder Gleichgewicht; im letzteren Fall besteht auch Gleichgewicht zwischen K und der Erde.

Behufs Aufstellung der bezüglichen Gleichungen berechnen wir vorerst die Arbeit, welche geleistet wird, wenn überhaupt eine Äthermasse im elektrischen Felde verschoben wird. Wir benützen hiezu die Elektricität e und eine Äthermasse in A. Die Verschiebung in A ist nach Gl. (9) und (10)

$$\sigma = \frac{e}{4\pi\delta . r^2}$$

und die elastische Kraft auf die Masseneinheit:

$$\frac{\varkappa}{4\pi\delta} \cdot \frac{e}{r^2} \text{ oder in der Luft } \frac{e}{r^2}.$$

Die Verschiebungsarbeit bei der Änderung der Entfernung ist:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{e}{r^2} . dr = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{13}$$

Den Ausdruck wenden wir auf jede von den Elektricitäten e, $+e_1$ und $-e_1$ ausgehende Kraft an und bestimmen damit die Arbeiten der Kräfte während der Bewegung der Äthermenge A längs des Halbkreises BC. Im Gleichgewichtszustande muss die Summe der drei Arbeiten gleich Null sein; daher besteht die Gleichung:

$$e\left(\frac{1}{R-\varrho} - \frac{1}{R+\varrho}\right) - e_1\left(\frac{1}{\varrho - z} - \frac{1}{\varrho + z}\right) +$$
$$+ e_1\left(\frac{1}{\varrho + x} - \frac{1}{\varrho - x}\right) = 0.$$

Mit Rücksicht darauf, dass auch Gleichgewicht herrscht, wenn $+e_1$ abgeleitet wird, lässt sich die Gleichung in zwei Gleichungen zerlegen, von welchen eine die beiden ersten Glieder, die andere das letzte Glied der vorstehenden Gleichung zu enthalten hat. Aus der Gleichung für das letzte Glied folgt dann unmittelbar:

$$x = 0,$$

d. h. der Mittelpunkt der positiven Influenzelektricität befindet sich im Kugelmittelpunkt; die Elektricität $+e_1$ verbreitet sich daher gleichmäßig über die ganze Kugeloberfläche.

Setzen wir die Summe der beiden ersten Glieder vorstehender Gleichung gleich Null, so folgt die weitere Bedingung:

$$\frac{e\varrho}{R^2 - \varrho^2} = \frac{e_1 r}{\varrho^2 - z^2}.$$

Die Gleichung gilt, wenn die Kugel K mit der Erde in leitender Verbindung steht; dann muss auch bei Überführung einer Elektricitätseinheit von der Kugel, z. B. vom Punkte B längs des Leitungsdrahtes zur Erde die Arbeitsleistung gleich

Null sein. Die Elektricitätseinheit wird diesfalls unter Einwirkung von e und $(-e_1)$ von B ins Unendliche fortgeführt und nach dem Arbeitsgesetze (Gl. 13) besteht die Gleichung:

$$\frac{e}{R-\varrho} - \frac{e_1}{\varrho - z} = 0.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgen die gesuchten Werte:

$$z = \frac{\varrho^2}{R} \quad \text{und} \quad e_1 = \frac{\varrho}{R} . e.$$

Das Vorzeichen der unableitbaren Influenzelektricität erster Art ergibt sich auch durch Rechnung aus den Gleichgewichtsbedingungen, welche gelten, wenn die Kugel mit der Erde in leitender Verbindung steht.

Bei Bewegung der Kugel K im elektrischen Felde wird in der Zeiteinheit folgende Elektricitätsmenge entwickelt:

$$i = \frac{d e_1}{d t} = -\varrho . \frac{e}{R^2} . \frac{d R}{d t} \tag{14}$$

d. h. die influenzierte Elektricitätsmenge ist dem Kugelhalbmesser ϱ, der Intensität des Feldes c/R^2 und der Geschwindigkeit dR/dt proportional.

Durch Einführung des Potentials

$$V = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{e}{R}$$

erhält man die Form:

$$i = \varrho . \frac{d V}{d t},$$

nach welcher i der Capacität ϱ und der Änderung des Potentials in der Zeiteinheit proportional ist. Dieses letzte Gesetz zeigt Übereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze für elektrische Ströme.

Durch entsprechende Bewegung von K im elektrischen Felde kann auch ein constanter elektrischer Strom erzeugt werden: K müsste an eine Stelle des Feldes, an welcher die Influenzelektricität zweiter Art das Potential V besäße, gebracht, dann leitend, etwa mit der Erde, verbunden und augenblicklich mit solcher Geschwindigkeit e genähert werden, dass die abgeleitete Elektricität durch neue Influenzelektricität fortwährend vollständig ersetzt würde. Ähnlich könnte ein Strom durch Entfernen entwickelt werden.

Die geleistete Arbeit in der Zeiteinheit wäre:

$$V \cdot i = \frac{i^2}{w}.$$

Ist das Raummedium ein anderes als Luft, so kommt die Constante [illegible] hinzu.

Die Gleichung entspricht dem Joule'schen Gesetze.

Der Elektricitätserregung durch Influenz dienen die Influenzmaschinen. Bei der Thätigkeit derselben wird mechanische Arbeit im elektrischen Felde in elektrische Energie umgesetzt.

Auch die übrigen Arten der Elektricitätserregung dürften im wesentlichen durch eine Arbeit im elektrischen Felde erklärlich sein, der Unterschied scheint in den arbeitenden Kräften zu liegen, thatsächlich sind auch bei der Volta-Elektricität chemische Kräfte und bei der Thermo-Elektricität die Wärme [illegible]

[illegible] von W. Thomson angegebene [illegible] und Licht- [illegible] dass sich nach der [illegible] Reflexion [illegible]

[illegible]

es werden elastische Kräfte geweckt und damit ein elektrisches Feld erzeugt. Die Ätherschichte an der concaven Innenseite von *II* sollte in das metallische Innere von *II* hineintreten; da aber im Metall wegen der guten Leitungsfähigkeit keine Verschiebung bestehen kann, so muss die betreffende Ätherschichte, etwa durch eine Öffnung der Fläche *II*, sich an die äußere, convexe Oberfläche begeben und dort als Influenzelektricität zweiter Art ausbreiten. Die innere Fläche von *II* erscheint wegen des Verlustes der Ätherschichte negativ elektrisch; die äußere Fläche ist positiv geladen. Dass die Mengen der beiden Influenzelektricitäten der Ladung auf *I* gleichkommen, folgt unmittelbar, wenn die Ätherdichte constant ist.

Die Influenzelektricität zweiter Art auf *II* veranlasst eine Verschiebung des Äthers und daher eine Ausbreitung des elektrischen Kraftfeldes im Raume außerhalb des Condensators; wird aber diese Elektricität zur Erde geleitet, so verschwindet auch das elektrische Feld. Die Ladungsarbeit beschränkt sich dann lediglich auf die Verschiebungsarbeit im Dielektricum des Condensators. Zur Berechnung derselben benützen wir die Arbeit der Verschiebung einer kugelförmigen Ätherschichte nach den Gleichungen (9, 10, 11); danach ist:

$$dW = \tfrac{1}{2} p\sigma = \tfrac{1}{2} \varkappa\mu\sigma^2 = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} \cdot e^2 \cdot \frac{dR}{R^2},$$

und die Ladungsarbeit:

$$W = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} \cdot e^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{\varkappa}{8\pi\delta} \cdot e^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Hierin bedeuten r_1 und r_2 die Radien der Kugelflächen *I* und *II*. Ist der Unterschied $r_2 - r_1 = \varDelta$ gegenüber den Radien nur klein, so kann man auch schreiben:

$$W = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa}{4\pi\delta} \cdot e^2 \cdot \frac{\varDelta}{r^2}.$$

Dieser Wert für die Energie stimmt mit dem der Potentialtheorie vollständig überein. Derselbe kann als Verschiebungsarbeit sofort angeschrieben werden, wenn die Dicke der zu verschiebenden Ätherschichte nur gering ist.

Die Bedeutung der Constanten $\varkappa/4\pi\delta$ folgt aus der Verstärkungszahl, welche wir aus dem Potentiale gewinnen. Das

Potential auf A, d. i. die Energie pro Elektricitätseinheit, ist:

$$V = \frac{dW}{de} = \frac{\varkappa}{4\pi\delta} \cdot e \cdot \frac{\Delta}{r^2}.$$

Ein einfacher Kugelconductor mit dem Halbmesser r und dem Potentiale V hat die Elektricität e_1 und in der Luft gilt:

$$V = \frac{e_1}{r}.$$

Aus der Gleichheit der beiden Potentialwerte folgt die Verstärkungszahl:

$$\frac{e}{e_1} = \frac{4\pi\delta}{\varkappa} \cdot \frac{r}{\Delta} \tag{15}$$

Dieselbe hängt von dem Halbmesser des Condensators, der Dicke der Zwischenschichte und von der Natur des Dielektricums ab. Die Constante $4\pi\delta/\varkappa$ gibt an, wie vielmal die Verstärkungszahl des betreffenden Dielektricums grösser ist als jene der Luft, sie stimmt also völlig mit der angenommenen Dielektricitätsconstante überein.

[illegible] Die Dielektricitätsconstante steht mit dem optischen Brechungsexponenten in enger Beziehung. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

11. Elektrischer Strom. Gesetze von Ohm und Joule. — Bisher wurde nur der Zustand eines elektrischen Feldes in isolierenden Medien betrachtet. Die Herstellung des Zwangszustandes geschah durch eine schichtenweise Ätherverschiebung, einen sogenannten Verschiebungsstrom. Die Verschiebung wurde als solange dauernd angenommen, bis eine Entladung des Conductors erfolgte, durch dessen Elektrisierung das Kraftfeld hervorgerufen worden war.

Im Gegensatze hiezu steht das Verhalten der guten Elektricitätsleiter; erfahrungsgemäß und nach der Theorie kann im elektrischen Gleichgewichtszustande im Innern derselben kein Kraftfeld bestehen. Bei fortwährender Zuführung von Elektricität durch eine Elektricitätsquelle entsteht eine elektrische Strömung, die den Namen Leitungsstrom führt.

Vom Standpunkte der Äthertheorie ist jeder elektrische Strom ein Ätherstrom. Der Unterschied zwischen Verschiebungsstrom und Leitungsstrom ist darin begründet, dass die Ätherbewegung bei dem ersteren im Isolator beschränkt, jede Ätherschichte an bestimmte Atome des Körpers gebunden ist, bei dem letzteren aber Ätherbewegung von Theilchen zu Theilchen des Leiters stattfinden kann.

Zur Beschreibung des elektrischen Leitungsstromes, der kurzweg als Strom bezeichnet werden soll, können die Maxwell'schen Gleichungen benützt werden. Dieselben lassen aber zwischen zwei Möglichkeiten die Wahl offen: Nach Gleichung (8) kann die elektrische Kraft entweder nur von den durch M und N bestimmten Drehbewegungen herrühren, während die elektrische Polarisation und dX gleich Null sind; oder es kann die Polarisation die Ursache der elektrischen Kraft sein und ein gewisser Zwangszustand durch gleichmäßigen Zu- und Abfluss von Äther erhalten werden.

Mit Rücksicht darauf, dass auch jeder gute Leiter dem elektrischen Strome einen gewissen Widerstand entgegensetzt und weil es der Verschiebungstheorie gut entspricht, nehmen wir auch während eines elektrischen Stromes im Leitungsdrahte eine Polarisation oder ein Kraftfeld an. Der Polarisationszustand kann durch eine Influenz von Theilchen zu Theilchen im Metall erklärt werden. Der Äther gewinnt während seiner fortschreitenden Bewegung von einem Metalltheilchen zum anderen durch Einwirkung der Kraft des Feldes an lebendiger Kraft; er fügt

dieselbe aber der Energie der rotierenden Bewegung der nächsten Theilchen hinzu, indem er sich dieser Bewegung selbst anschließt und die Wärme vermehrt.

Zur Berechnung der Stromstärke und des Wärmewertes stützen wir uns auf die Grundgleichung

$$\mu X = k \mu \xi$$

und ermitteln die Verschiebungsarbeit $\frac{1}{2} . \mu X \xi$.

Wir benützen als Stromleiter einen Metalldraht, der die Richtung der X-Achse und den Querschnitt q hat. An irgend einer Stelle sei die Polarisation oder die Verschiebung ξ; dann ist die Ätherschichte von der Dicke ξ als elektrische Ladung e zu betrachten, für welche die Gleichung gilt:

$$e = q . \xi . \delta .$$

Setzen wir noch $\mu = q . dx . \delta$, so wird die Verschiebungsarbeit:

$$\frac{1}{2} \mu X . \xi = \frac{1}{2} . \frac{k}{\delta . q} . e^2 . dx.$$

Die Arbeit für die Elektricitätseinheit ist das Potential oder die elektromotorische Kraft in dem betreffenden Leiterelemente; wir erhalten dafür durch Differentiieren:

$$dV = \frac{k}{\delta . q} . dx . e \qquad (16)$$

Bleibt der betrachtete Zustand constant, so wird jedesmal diese Arbeit geleistet, wenn die Elektricitätseinheit den Querschnitt verlässt. Wir können uns denken, dass ein solches Verhältnis wirklich stattfindet, indem stets ebensoviel Elektricität zu- als abfließt.

Setzt man für $e = i . \tau$, wobei i die Stromstärke und τ die Zeit, in welcher die Verschiebung ξ vollbracht wird, bedeuten, so wird:

$$dV = \frac{k . \tau}{\delta . q} dx . i$$

und danach:

$$V = \int_0^l \frac{k \tau}{\delta . q} . dx . i = \frac{k . \tau}{\delta . q} . l . i \qquad (17)$$

Dies ist genau die Form des Ohm'schen Gesetzes.

Der Factor

$$\frac{k . \tau}{\delta} . \frac{l}{q} = w$$

gibt den Leitungswiderstand des Drahtes an.

Durch Multiplication des Ohm'schen Gesetzes mit i folgt sofort die in Wärme umgesetzte Arbeit pro Zeiteinheit oder das Joule'sche Gesetz.

12. Elektricitätserregung. Nach der Theorie der Ätherverschiebung ist die Elektricitätserregung durch Influenz sehr anschaulich. Wir benützen deshalb die Influenz auch zur Erklärung der übrigen Erregungsarten und versuchen zu zeigen, dass bei diesen wie bei jener die elektrische Energie durch Arbeitsleistung im elektrischen Felde geliefert wird.

Berührungselektricität entsteht erfahrungsgemäß bei Berührung zweier physikalisch oder chemisch verschiedenen Körper. Wir können den Process durch die Verschiebungstheorie erklären, wenn wir vorerst die anerkannte Annahme machen, dass jede Körpermasse durch die Energie ihres Kraftfeldes oder durch ein besonderes Potential charakterisiert ist; das betreffende Kraftfeld können wir durch eine Ätherverschiebung rings um die Masse erzeugt denken.

Bei Berührung zweier verschiedenartiger Körper wird alsdann in der Berührungsschichte durch die Resultierende der Ätherdrücke beider Körper eine Verschiebung eintreten, welche eine elektrische Polarisation repräsentiert. Damit ist auch ein elektrisches Kraftfeld gebildet, in welchem durch Molecularbewegungen Elektricität entwickelt werden kann.

Sehr einfach gestaltet sich nun die Anwendung der chemischen Theorie zur Erklärung der Elektricitätserregung. Befinden sich nämlich im Kraftfelde Molecüle, welche infolge der Polarisation, eventuell ihrer natürlichen Elektricitätsvertheilung entsprechend, gerichtet und zerlegt werden, so treten alsdann reine Influenzwirkungen auf, wenn die beiden entgegengesetzt elektrischen Bestandtheile der Molecüle sich nach entgegengesetzten Seiten der Berührungsschichte hin bewegen.

Bei den Volta-Elementen ist dieselbe Erklärungsweise als Theorie von Schönbein und G. Wiedemann bereits allgemein angenommen; nur die Erzeugung des Kraftfeldes durch Ätherverschiebung gehört speciell der Äthertheorie an. Wir können z. B. bei einem Zink-Salzsäure-Kupferelemente ohneweiters annehmen, dass der Äther in der Flüssigkeit durch die Resultierende der Ätherdrücke der drei Körper verschoben und die Flüssigkeit zwischen den Metallen in ein elektrisches Feld verwandelt wird. Die Folgen davon sind die bekannten Vorgänge: Es tritt eine

Drehung und schließlich Zerlegung der Salzsäuremolecüle ein; die negativ elektrischen Chloratome neben der Zinkplatte bewegen sich zu dieser und machen sie durch Influenz elektrisch; die negative Influenzelektricität zweiter Art kommt im Strome zum Ausgleich, während sich die entgegengesetzt geladenen Chlor- und Zinkatome verbinden und neutralisieren. Die positiven Wasserstoffatome entladen sich an der Kupferplatte; sie liefern durch Influenz die positive Elektricität für den Strom. Der elektrische Strom in der Flüssigkeit beruht auf der Wanderung der Jonen.

Nach der Hypothese, dass die Ätherwirbel die Kraft im Felde äußern und dass die Form derselben die Polarisation bedingt, sind die chemischen Molecüle als Wirbel zu betrachten, und zwar entweder jedes Molecül als ein einziger Wirbel oder als ein aus Elementarwirbeln zusammengesetzter Wirbel. In jedem Falle kann die Zerlegung des Molecüls durch eine Formveränderung desselben infolge der Polarisation erklärt werden. Übereinstimmend mit Secchi würde der Bestandtheil mit kleinerer Ätherhülle das negative, der Bestandtheil mit größerer Ätherhülle das positive Atom repräsentieren.

Auch bei Erregung der Thermoelektricität lässt sich im wesentlichen ein gleicher Vorgang denken. An der Löthstelle eines Wismutstückes mit einem Antimonstabe wird die Berührungsschichte durch Ätherverschiebung polarisiert und die Theilchen der Legierung übernehmen die Rolle der Flüssigkeitsmolecüle eines Volta-Elementes. Die positiven Wismutatome der Legierung bewegen sich gegen das Antimon und machen es durch Influenz elektrisch; die positive Influenzelektricität bildet den Strom, während die Influenzelektricität erster Art durch die Elektricität des Wismuts unter Bildung neuer Legierung neutralisiert wird. Die entgegengesetzte Elektrisierung des Wismutstückes findet durch die Bewegung der Antimonatome statt. Die nothwendige Zersetzungsarbeit wird durch die Wärme geliefert.

Wird ein elektrischer Strom von einer anderen Elektricitätsquelle durch die Metalle, und zwar an der Contactstelle in der Richtung vom Wismut zum Antimon geführt, so wird der eben angegebene Process durch die Wärme der Berührungsschichte geleistet und es tritt Abkühlung ein. Die umgekehrte Stromrichtung hat eine Verbindung der Antimon- und Wismutatome mit den gleichnamigen Metallen, die Zerlegung der Legierung

und somit Wärmeentwicklung zur Folge. Dies sind die Peltier-schen Phänomene.

Beim vollständigen Thermoelemente findet an jeder der beiden Löthstellen Elektricitätsentwicklung statt. Es treten zwei einander entgegengesetzte Ströme auf, von denen — innerhalb gewisser Temperaturgrenzen — der an der wärmeren Stelle entwickelte stärker ist und daher als eigentlicher Strom des Thermoelementes zum Vorschein kommt. Auch diese Erscheinung lässt sich nach der Theorie der Ätherverschiebung begründen. Das Potential an einer Löthstelle ist gegeben durch die Verschiebungsarbeit pro Elektricitätseinheit (Gl. 16); ist H_1 das Potential und Δ die Schichtendicke, so hat man:

$$H_1 = \frac{\varkappa}{q\delta} \cdot \Delta \cdot e = \varkappa \cdot \Delta \cdot \xi.$$

Der Wert ist leicht in Einklang zu bringen mit dem Potentiale, das dem durch Influenz zu entwickelnden Strome (Gl. 14) entspricht und das von der Intensität des Feldes und von der Geschwindigkeit abhängt. Hier ist $\varkappa\xi$ die Intensität des Feldes und der Weg Δ der Theilmolecüle bei der Ladung der Berührungsschichte lässt sich ausdrücken durch $\Delta = u \cdot \tau$.

Denken wir uns nun den Ätherdruck im elektrischen Felde durch die Fliehkraft von Wirbeln mit constanter Umdrehungszeit ausgeübt, so ist die Elasticitätsconstante $\varkappa$ nach Gl. (2') der lebendigen Kraft proportional, für welche wir die Temperatur T setzen. Das Potential an der betreffenden Löthstelle wird demnach:

$$H_1 = a \cdot T_1,$$

wobei a eine Constante des Thermoelementes ist.

Das Potential an der zweiten Löthstelle, deren absolute Temperatur T_2 sei, ist analog

$$H_2 = a T_2.$$

Daher ist die Arbeit der Elektricitätseinheit beim Überströmen von der ersten zur zweiten Löthstelle oder die elektromotorische Kraft

$$E = a\,(T_1 - T_2)$$

der Differenz der Temperaturen an beiden Löthstellen proportional.

Dieser Wert erklärt die Umkehrung des Stromes nicht, welche thatsächlich bei vielen Thermoelementen dann stattfindet,

wenn das Mittel der Temperaturen T_1 und T_2 über den neutralen Punkt hinausgeht. Wir gelangen zu den Ergebnissen der bezüglichen Theorien von Avenarius und Tait, wenn wir außer der betrachteten Potentialdifferenz, welche die Arbeit der Bewegung der Elektricitätseinheit im Felde des Stromes angibt, noch die Arbeit der elektrischen Oberflächenschichten der Molecüle berücksichtigen. Die Überführung der strömenden Elektricitätseinheit von einer Seite des Molecüles zur andern entspricht abermals einer Verschiebung, deren Arbeitswert mit der vorstehenden Form der Gl. 16) übereinstimmt. Lassen wir für die Elasticitätsconstante $\varkappa$ der betreffenden Molecülschichte im Polarisationszustande und während der Verschiebung Gl. 2) gelten, nach welcher $\varkappa$ dem Bruche $1/r^4$ oder auch dem Quadrate der lebendigen Kraft proportional ist, so können wir $\varkappa$ und somit auch das Potential an der betreffenden Stelle dem Quadrate der absoluten Temperatur T proportional, also $V = \frac{1}{2} b T^2$ setzen. Beim Übergange der Elektricitätseinheit von einer Molecülschichte zur andern wird die Arbeit geleistet:

$$dV = b\,T\,dT.$$

Beim Durchströmen eines Metallstückes, an dessen Enden die Temperaturen T_1 und T_2 herrschen, ist die Arbeit:

$$\int_{T_2}^{T_1} b\,.\,T\,dT = \frac{1}{2} b\,(T_1^2 - T_2^2)\,.$$

Analog ergibt sich der Arbeitswert pro Elektricitätseinheit beim Durchströmen des andern Metalles:

$$\frac{1}{2} c\,(T_1^2 - T_2^2)\,.$$

Diese beiden letzten Arbeitswerte sind dem obigen Ausdrucke für die elektromotorische Kraft E hinzuzufügen; daher wird E, auf den ganzen Stromkreis bezogen:

$$E = a\,(T_1 - T_2) - \frac{1}{2}\,(b - c)\,(T_1^2 - T_2^2)$$

oder

$$E = (c - b)\,(T_1 - T_2)\left[\frac{a}{c - b} - \frac{T_1 - T_2}{2}\right].$$

Die Größe $a/(c - b)$ als Temperatur heißt der neutrale Punkt. Je nachdem dieser größer oder kleiner als das arithmetische Mittel der Temperaturen beider Löthstellen ist, ist auch die elektromotorische Kraft positiv oder negativ; im letzteren Falle findet hier eine Umkehrung des Stromes statt.

Schließlich sei noch bemerkt, dass auch die Theorie der Thermoelektricität von Kohlrausch im Sinne der Äthertheorie ungezwungen gedeutet werden kann.

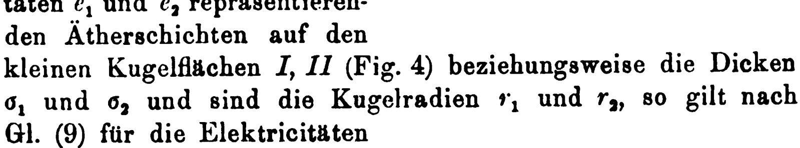
III.

Fernwirkungsgesetze.

13. Coulombs Gesetz. Ebenso wie im Vorhergehenden für einen elektrischen Körper führt die Theorie der Verschiebung auch für zwei elektrische Körper zu Gesetzen, welche durch Experimente erwiesen sind. Wir wollen diesbezüglich nur auf den Verlauf der Kraftlinien hinweisen und Coulombs Gesetz ableiten.

Wir betrachten zwei kugelförmige Körperchen I und II, welche mit den positiven Elektricitäten e_1 und e_2 geladen seien. Von jedem Körperchen gehen Atherverschiebungen aus, die sich schichtenweise ringsum im Raume fortpflanzen und ein Kraftfeld erzeugen. Jeder Punkt A des Kraftfeldes wird daher sowohl in der Richtung IA als auch in der Richtung IIA verschoben und beide Verschiebungen setzen sich zu einer Resultierenden zusammen. Die Verschiebungsarbeit im ganzen Felde ist die potentielle Energie beider Elektricitäten. Der Theil derselben, welcher von beiden Elektricitäten gleichzeitig abhängt, ist die Energie der Wechselwirkung, aus der das Coulomb'sche Gesetz leicht folgt.

Fig. 4.



Zur Berechnung der betreffenden Werte müssen wir die Beziehungen zwischen Verschiebung, Kraft und Arbeit aufstellen.

Haben die die Elektricitäten e_1 und e_2 repräsentierenden Ätherschichten auf den kleinen Kugelflächen I, II (Fig. 4) beziehungsweise die Dicken σ_1 und σ_2 und sind die Kugelradien r_1 und r_2, so gilt nach Gl. (9) für die Elektricitäten

$$e_1 = 4 r_1^2 \pi . \sigma_1 . \delta \text{ und } e_2 = 4 r_2^2 \pi . \sigma_2 . \delta .$$

Ein Äthertheilchen A im Felde erleidet von I (nach Gl. 10) die Verschiebung

$$\sigma_1' = \sigma_1 \frac{r_1^2}{R_1^2}$$

und von II die Verschiebung

$$\sigma_2' = \sigma_2 \frac{r_2^2}{R_2^2}.$$

Beide Verschiebungen setzen sich zu einer Resultierenden σ zusammen, und diese gibt zugleich ein Element der Kraftlinie, welche durch den Punkt A geht. Darauf normal steht ein Element der Niveaufläche.

Die geweckte elastische Kraft ist

$$p = \varkappa \mu \sigma = \varkappa \delta . \sigma . dv,$$

wobei dv ein Volumelement bezeichnet.

Die geleistete Arbeit von p ist

$$dW = \tfrac{1}{2} p \sigma = \tfrac{1}{2} \varkappa \delta \sigma^2 . dv.$$

Wenn man σ aus dem Bewegungsparallelogramm (Fig. 4) berechnet und dafür die Seitenverschiebungen einführt, so wird das Arbeitselement:

$$dW = \tfrac{1}{2} \varkappa \delta (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + 2 \sigma_1' \sigma_2' \cos A) . dv.$$

Durch Einsetzen der angegebenen Werte für σ_1' und σ_2' und Summierung über den unendlichen Raum erhält man die Arbeit

$$W = \tfrac{1}{2} \varkappa \delta \sigma_1^2 . r_1^4 \int \frac{dv}{R_1^4} + \tfrac{1}{2} \varkappa \delta . \sigma_2^2 . r_2^4 . \int \frac{dv}{R_2^4} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \varkappa \delta \sigma_1 \sigma_2 r_1^2 r_2^2 . \int \frac{\cos A . dv}{R_1^2 . R_2^2}.$$

Setzen wir in den zwei ersten Gliedern für dv Kugelschalen mit den respectiven Halbmessern R_1 und R_2 und der Dicke dR, so folgen als deren Werte unmittelbar:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \varkappa \delta \sigma_1^2 . r_1^4 \int_{r_1}^{\infty} \frac{4 R_1^2 \pi . dR_1}{R_1^4} = \tfrac{1}{2} . \frac{\varkappa}{4 \pi \delta} . \frac{e_1^2}{r_1}$$

und

$$W_2 = \tfrac{1}{2} . \frac{\varkappa}{4 \pi \delta} . \frac{e_2^2}{r_2}.$$

Das sind die Ladungsenergien der einzelnen Kugeln I und II, deren Gesetz bereits in Gl. (12) aufgestellt wurde. Sie

stimmen mit den gewöhnlichen nach der Potentialtheorie erhaltenen Werten überein, wenn die Elektricitätseinheit so gewählt wird, dass die Dielektricitätsconstante für Luft $4\pi\delta/\varkappa = 1$ ist.

Das dritte Glied der gesammten Arbeit W ist von der gleichzeitigen Anwesenheit beider Elektricitäten e_1 und e_2 abhängig; es gibt die Wechselwirkungsenergie an.

Zur Berechnung beziehen wir dv auf eine Kugelzone des Feldes, für welche die Wirkung von I und von II an allen Stellen denselben Wert hat, also auf eine Zone der in Figur 4 angedeuteten Kugel mit dem Halbmesser R_1, dem Basiskreise $2R_1\pi \sin\varphi$, der Breite $R_1 d\varphi$ und der Dicke dR_1; es wird

$$dv = 2R_1^2\pi . \sin\varphi . d\varphi . dR_1$$

und die Wechselwirkungsenergie

$$W_{12} = \tfrac{1}{2}\varkappa\delta\sigma_1\sigma_2 r_1^2 . r_2^2 \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int\limits_{R_1=0}^{R_1=\infty} \frac{2R_1^2\pi \sin\varphi . \cos A}{R_1^2 . R_2^2} . dR_1 d\varphi .$$

Aus Δ (dR_1, A, dR_2) ist: $\cos A\, dR_1 = dR_2$, damit wird:

$$W_{12} = \tfrac{1}{2} . \frac{\varkappa}{4\pi\delta} . (4r_1^2\pi . \delta . \sigma_1) . (4r_2^2\pi . \sigma_2 . \delta) . \tfrac{1}{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin\varphi . d\varphi . \int\limits_{R}^{\infty} \frac{dR_2}{R_2^2}$$

oder

$$W_{12} = \tfrac{1}{2} . \frac{\varkappa}{4\pi\delta} . \frac{e_1 e_2}{R} . \tag{18}$$

Aus diesem Werte der Wechselwirkungsenergie oder dem Potentiale beider Elektricitäten aufeinander folgt die Kraft der Wechselwirkung oder das Coulomb'sche Gesetz:

$$\frac{dW_{12}}{dR} = -\tfrac{1}{2} . \frac{\varkappa}{4\pi\delta} . \frac{e_1 e_2}{R^2} .$$

Das Gesetz stimmt mit der gebräuchlichen Form desselben völlig überein, wenn wieder für Luft $\varkappa/\delta = 4\pi$ gesetzt wird.

Bei der Wechselwirkung zwischen e_1 und e_2 in einem anderen Medium ist aber thatsächlich die Dielektricitätsconstante zu berücksichtigen; dies wurde zuerst von H. Helmholtz ausgesprochen und von Silow experimentell bestätigt. Es besteht daher vollkommene Übereinstimmung unseres Gesetzes mit den Versuchsergebnissen.

Das erhaltene Gesetz gibt durch das Vorzeichen auch die Richtung der Kraft: die Richtung ist negativ, d. h. es herrscht

Abstoßung, wenn beide Elektricitäten gleichnamig sind: sie wird positiv, d. h. es tritt Anziehung auf, wenn ungleichartige Elektricitäten aufeinander wirken.

Schließlich sei noch bemerkt, dass das Coulomb'sche Gesetz unmittelbar aus der Kraft der Verschiebung auf das zu bewegende Körperchen folgt: wenn wir die Verschiebungen von I ausgehend annehmen und die Verschiebungskraft auf die Äthermenge e_2 in II berechnen, so erhalten wir

$$p = \varkappa \mu \sigma = \varkappa e_2 . \sigma_1 \frac{r_1^2}{R^2} = \frac{\varkappa}{4 \pi \delta} . \frac{e_1 e_2}{R^2} .$$

14. Newtons Gravitationsgesetz. Die Form desselben stimmt mit dem Coulomb'schen Gesetze der elektrischen Kräfte überein. Es liegt demnach nahe, die Entwicklung des letzteren Gesetzes auch für das Gravitationsgesetz geltend zu machen, also anzunehmen, dass die Wechselwirkung schwerer Massen durch Ätherverschiebungen im Kraftfelde in ähnlicher Weise zustande komme, wie jene der elektrischen Massen.

Wir haben diesfalls vorauszusetzen, dass bei der Bildung der schweren Atome eine Ätherverschiebung im Raume stattgefunden, und dass durch Weckung elastischer Kräfte ein Kraftfeld erzeugt wurde, welches die sogenannte Fernewirkung unmittelbar ausübt. Die Art und Weise der Atombildung kann dabei unbestimmt bleiben. Es kann eine Verdichtung des Äthers stattgefunden haben; es kann aber auch durch Wirbelbewegung eine Verschiebung nach auswärts erfolgt sein. Durch die erstere Annahme nähern wir uns der gebräuchlicheren Anschauung über die Atombildung, durch die letztere würden die Atome als leere Räume hingestellt, gegen die der äußere Ätherdruck besonders hinwirkte. Die absolute Untheilbarkeit gewisser Atome ist in keinem Falle nothwendig. Nur fordert der Satz von der Anziehung ponderabler Massen, dass der Zwangszustand des Gravitationsfeldes bei der Annäherung der Körper eine Milderung erfahre; und der Satz der Erhaltung der Masse verlangt, dass der Wert der Ätherverschiebung, welche bei der Bildung der Atome eingetreten ist, für jedes Atom unter allen Umständen unveränderlich erhalten bleibe; es muss also auch wohl der einem Atome zukommende Raum stets constant sein.

Die gleichzeitige Wirkung der Schwerkraft mit anderen physikalischen Kräften erfordert die Superposition mehrerer Kraft-

felder in demselben Raume. Wir werden den Äther als den gemeinschaftlichen Träger der verschiedenen Kräfte ansehen dürfen, und zwar nach dem Principe des Bewegungsparallelogrammes und gestützt auf die Eigenschaft des Äthers, die in einem Kraftfelde geleistete Arbeit in Energie seiner Theilchen zu verwandeln und sie bei der Umkehrung des Processes wieder abzugeben. Ein specieller Fall solcher Superposition liegt im vorhergehenden Abschnitte vor, in welchem der Zustand des Äthers bei Anwesenheit zweier elektrischer Körper behandelt wurde. Von diesem Gesichtspunkte erscheint auch die Schwerkraft als ein Theil des herrschenden Ätherdruckes.

Die Molecularkräfte sollen in einem besonderen Capitel behandelt werden; daselbst soll insbesondere in einigen Fällen dargethan werden, dass berechenbare Constanten der Medien des Lichtes, der Elektricität und der Cohäsion zahlenmäßig übereinstimmen.

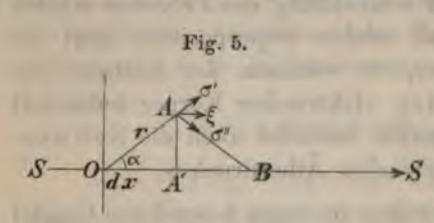
15. Ampères Regel und Biot-Savarts Gesetz. Nach der Äthertheorie wird die Einwirkung eines elektrischen Stromes auf eine Magnetnadel durch den Ätherdruck im Kraftfelde erklärt. Analog wie durch eine elektrostatische Ladung wird durch einen elektrischen Strom im umgebenden Äther ein Zwangszustand, das elektromagnetische Feld, erzeugt. Befindet sich in dem Felde ein Magnetpol, so wirkt der Ätherdruck auf diesen und veranlasst ihn zur Bewegung, welche durch die Ampère'sche Regel und das Biot-Savart'sche Gesetz bestimmt wird.

Die Vorstellung über das Zustandekommen des elektromagnetischen Feldes nach der Theorie der Atherverschiebung entspricht den Versuchen von H. Hertz und Stefan über die Fortleitung der Elektricität. Die elektrische Kraft breitet sich zunächst von den Polen aus durch Ätherverschiebung in den Raum und längs der Oberfläche des Leitungsdrahtes aus; erst dann, wenn das Kraftfeld im Raume stationär zu werden beginnt, wird die Ätherverschiebung sich auch im Drahte geltend machen und daselbst einen Leitungsstrom veranlassen. Wenn weiterhin der Zustand des Feldes keine Veränderung erleidet, dann wird die gesammte Energie der Elektricitätsquelle im Leitungsdrahte als Joule'sche Wärme zum Vorschein kommen. Sobald aber Arbeitsleistungen im Felde außerhalb des Drahtes erfolgen, so wird eine äquivalente Energie der Elektricitätsquelle

dazu verbraucht. Zu solcher Arbeit gehört auch die Bewegung der Magnetnadel.

Die wirkenden Kräfte im Felde eines Stromes SS ergeben sich aus den bestehenden elektrischen Verschiebungen des Feldes, die wir durch Componenten der Ätherverschiebung des Stromes entstanden denken können. Eine Componente der Verschiebung des Stromes SS in O (Fig. 5) hätte im Raumpunkte A die Verschiebung σ', die Verschiebungscomponente eines zur Senkrechten AA' symmetrisch gelegenen Punktes B hätte in A die Verschiebung σ'' zur Folge. Je zwei solche Componenten σ' und σ'' setzen sich zu einer resultierenden Verschiebung $\xi // SS$ zusammen. Wir können übrigens auch nach J. Thomson die Verschiebung ξ dem Punkte A durch die Bewegung der Kraftlinie in der betreffenden Richtung mitgetheilt denken.

Fig. 5.



Um nun die magnetische Kraft zu bestimmen, benützen wir die Gl. (8') des Kraftfeldes, welche eine Beziehung zwischen den elektrischen Kräften X, Y, Z und den magnetischen Kräften L, M, N angibt. Der Einfachheit halber nehmen wir nur ein Stromelement dx im Ursprunge des Coordinatensystemes O an und suchen die Wirkung desselben auf eine in der xy-Ebene liegende Masseneinheit A. Die Coordinaten des Punktes A seien x und y, seine Entfernung vom Stromelemente gleich r, so dass $r^2 = x^2 + y^2$. Die Wirkung des Stromes i in A äußert sich durch die elektrische Verschiebung ξ. Die Annahme dieser Elementarwirkung genügt der Berechnung geschlossener Ströme. Die Verschiebungskräfte X werden vom Strome aus mit der Entfernung immer kleiner. Diese Bedingung führt zu dem gesuchten Gesetze. Setzen wir nämlich in Gl. (8') $dY = dZ = 0$ und $L = M = 0$, so bleibt:

$$\frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{d X^1}{dt} = -\frac{dN}{dy}.$$

Setzt man X^1 analog der Verschiebungskraft in der Elektrostatik umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung, also proportional $i\,dx/r^2$, ferner $y = r \sin\alpha$, so wird:

$$dN = C.i.dx.\sin\alpha.\frac{dr}{r^3}.$$

dr/dt wurde als constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verschiebung mit der Constanten C verbunden. Daraus folgt nun:

$$N = -C \frac{i.dx}{r^2}.\sin\alpha.$$

N ist die magnetische Kraft in der Z-Richtung; sie ist normal zu der von dem Stromelemente dx und dem magnetischen Massenpunkte A bestimmten Ebene; sie ist der Stromintensität und dem Sinus des Winkels, welchen die Verbindungsgerade r mit der Richtung dx einschließt, direct und dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional. Das gewonnene Gesetz ist demnach das Biot-Savart'sche Gesetz. Das negative Vorzeichen weist auf die Ampère'sche Schwimmregel hin.

Mit Hilfe des Elementargesetzes lässt sich die Wirkung geschlossener elektrischen Ströme durch entsprechende Summierung berechnen. So erhält man z. B. als Wirkung eines geschlossenen Kreisstromes, der um den Coordinatenmittelpunkt in der xy-Ebene liegt, auf eine in der Z-Achse befindliche magnetische Masseneinheit

$$N = \frac{2\varrho^2\pi.i}{r^3},$$

wenn ϱ der Halbmesser des Stromkreises und r die Entfernung des magnetischen Punktes von der Kreislinie bedeuten und die Constante $C = 1$ gesetzt wird.

Die Gleichung stimmt bekanntlich mit dem Wirkungsgesetze eines magnetischen Blattes von der Größe der Kreisfläche und von der Stärke i überein. Damit ist die Gleichheit der Wirkung eines Kreisstromes und eines magnetischen Blattes dargethan.

16. Inductionsströme. In einem elektromagnetischen oder magnetischen Felde befinde sich ein geschlossener Stromleiter L; derselbe liege in der xy-Ebene. Erfahrungsgemäß kreisen in dem Leiter Inductionsströme, wenn in dem Kraftfelde Veränderungen vor sich gehen: sei es durch Annähern oder Entfernen von Hauptströmen oder Magneten, sei es durch Änderung der Stärke der das Feld erzeugenden elektrischen Ströme oder der Magnete. Bekanntlich wird die elektromotorische Kraft eines Inductionsstromes durch die in der Zeiteinheit erfolgte Änderung der Anzahl der magnetischen Kraftlinien, welche die vom Strome umflossene Fläche f durchsetzen, gemessen.

Das Gesetz folgt aus der Verschiebungsarbeit der Kräfte längs des Stromleiters.

Um die Arbeit W, welche von den Kräften X, Y des Feldes geleistet wird, wenn die Einheit der Äthermasse längs des Leiters l (Fig. 6) fortbewegt wird, zu berechnen, denken wir uns die vom Leiterkreis umschlossene Fläche f in Elemente $df = dx . dy$ zerlegt und bei jedem dieser Elemente die Masseneinheit längs der vier Seiten, etwa im Sinne des Uhrzeigers, verschoben. Bei solcher Zerlegung der Fläche gehört jede Seite eines Elementes auch dem Nachbarelemente an und wird deshalb bei der angegebenen Bewegung der Masseneinheit zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Die [illegible] auf diesen Bewegungen verrichteten Arbeiten müssen sich aufheben. Bei der Summierung sämmtlicher Arbeiten wird daher nur die Arbeit zur Bewegung der Masseneinheit längs der [illegible] Aussenrand der Flächenelemente [illegible] diese ist aber der gesammten Arbeit zur Bewegung längs des Leiters l gleich.

Die Arbeit der Bewegung der Masseneinheit längs der vier Seiten eines Flächenelementes ist:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

einem luftleeren Raume der Erde und im unendlichen Himmelsraume, gilt als wichtiger Beweisgrund für das Vorhandensein des Weltäthers. Soll derselbe auch der Träger einer einheitlichen Naturkraft sein, so müssen die Gesetze der Lichterscheinungen den allgemeinen Bewegungsgesetzen des Äthers, welche in den Maxwell'schen Grundgleichungen des Kraftfeldes gegeben sind, entsprechen. Es ist in der That von Maxwell, Lorentz, Helmholtz, Stefan, Hertz, Volkmann, Tumlirz u. A. nachgewiesen worden, dass die Bewegungsgleichungen der Elektricität zur Ableitung der Lichterscheinungen benützt werden können; die damit begründete Theorie heißt die elektromagnetische Lichttheorie.[1]) Dieselbe hat gegenüber der bisher gebräuchlichen Elasticitätstheorie Vorzüge, die ihr alsbald die allgemeine Anerkennung verschaffen werden: sie entscheidet den nach der elastischen Theorie bestehenden Zweifel, ob die Schwingungsrichtung eines durch Reflexion polarisierten Lichtstrahles nach F. Neumann in der Einfallsebene oder nach Fresnel normal dazu steht, durch die Feststellung, dass beide Schwingungsrichtungen vorhanden sind, nämlich die zu einander senkrechten Richtungen der elektrischen und magnetischen Schwingungen. Die Grundgleichungen geben ferner die Grenzbedingungen für die Reflexion und Brechung, welche nach Helmholtz mit der Elasticitätstheorie nicht im Einklange stehen. Endlich wird durch Entstehung der Leitungsströme und Entwicklung Joule'scher Wärme die Absorption und auch die Erscheinung der Farbenzerstreuung erklärt,[2]) für deren Entstehung die reine Elasticitätstheorie keinen Grund anzuführen hat.

Von besonderer Wichtigkeit ist, dass dieselben Gleichungen die Erscheinungen der Elektricität, des Magnetismus, des Lichtes und der strahlenden Wärme erklären, und dass die bei den verschiedenen physikalischen Phänomenen auftretenden constanten Größen (Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Brechungsexponenten, Wurzel aus der Dielektricitätsconstanten) ziffermäßig gleich sind.

---

[1]) Maxwell: Lehrbuch der Elektricität. Deutsch von Weinstein. A. Hertz: Über d. Grundgl. d. Elektrodynamik. Wied. A. 40. P. Volkmann: Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. 1891. H. Poincare: Elektricität u. Optik. Deutsch von Jäger u. Gumlich. O. Tumlirz: Elektromagn. Lichttheorie. 1883.

[2]) Koláček: Dispersionstheorie. Wied. A. 34 u. 37.

Die Maxwell'schen Gleichungen (7, 8) enthalten außer den elektrischen Kräften X, Y, Z auch die magnetischen Kräfte L, M, N. In der Berücksichtigung dieser liegt ein hauptsächlicher Unterschied der elektromagnetischen gegenüber der elastischen Lichttheorie. Die Gleichungen ergeben leicht, dass periodisch veränderliche elektrische oder magnetische Zustände der Körper sich im Kraftfelde fortpflanzen und daselbst elektrische und magnetische Wellen erzeugen. Die Existenz solcher durch rasche Stromunterbrechungen hervorzurufenden Wellen und deren Fortpflanzung, Reflexion, Brechung und Polarisation hat Hertz durch seine berühmten Versuche (Wied. A. 1889) nachgewiesen. Die elektrischen Wellen verhalten sich demnach ebenso wie die Wellen des Lichtes und der strahlenden Wärme; der Unterschied kann nur in den Schwingungszahlen der betreffenden Wellen zu suchen sein. Die Schwingungszahlen des Lichtes liegen innerhalb der Grenzen 1 Bill. und 1000 Bill. Hertz verwendete bis 100 Mill. Schwingungen, die durch rasch aufeinanderfolgende Inductionsströme eines Rühmkorff erzeugt wurden.

Auf Grund der Versuche über schnelle elektrische Schwingungen wurde von einigen Physikern die Elektricität überhaupt als ein Schwingungszustand des Äthers mit bestimmten Schwingungszahlen betrachtet. Die Fernewirkung müsste danach durch fortschreitende Wellen erklärt werden. Nach der Theorie der Verschiebung ist eine solche Annahme nicht nöthig; es genügt bei statischen Zuständen im Kraftfelde die behandelte einfachere Annahme, dass die Kräfte durch eine Verschiebung des Äthers, die als eine Viertelschwingung zur Erreichung einer dauernden Amplitude aufgefasst werden kann, entwickelt werden. Die Kraft selbst mag allerdings durch Wirbel geäußert werden, deren Projectionen nach gewisser Richtung hin Schwingungen darstellen.

Die Lichterscheinungen betreffend, sollen im folgenden die Gesetze der Fortpflanzung, der Reflexion, der einfachen und doppelten Brechung unter den einfachsten Annahmen abgeleitet werden.

18. Fortpflanzung des Lichtes. Wir setzen voraus, dass im Ursprunge eines Coordinatensystems periodisch veränderliche Ätherverschiebungen, also Schwingungen der Äthertheilchen stattfinden; wir nehmen die Verschiebungen η parallel

der Y-Achse an und betrachten deren Fortpflanzung längs der X-Achse. In diesem Fall sind in den Maxwell'schen Grundgleichungen (7 und 8') die elektrischen Verschiebungen $\xi = \zeta = 0$, also auch die elektrischen Kraftcomponenten $X = Z = 0$, ferner die magnetischen Kräfte $L = M = 0$; es bleiben nur die elektrische Kraft Y und die zur Z-Achse parallele, also zu Y normale magnetische Kraft N. Die Gleichungen reducieren sich auf folgende Formen:

$$\frac{dY}{dx} = \mu N \quad \text{oder} \quad \frac{dY^1}{dx} = \mu \cdot \frac{dN}{dt}$$

und

$$\frac{c}{\varkappa} \cdot \frac{dY^1}{dt} = \frac{dN}{dx}.$$

Durch Elimination folgen leicht die Gleichungen für die Schwingungen der elektrischen und magnetischen Kraft:

$$\frac{d^2 Y^1}{dt^2} = \frac{\varkappa}{c\mu} \cdot \frac{d^2 Y^1}{dx^2}$$

und

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = \frac{\varkappa}{c\mu} \cdot \frac{d^2 N}{dx^2}.$$

Es kann für Y^1 auch Y oder auch die elektrische Verschiebung η gesetzt werden und die erste Gleichung nimmt die gewöhnliche Form an, welche die Elasticitätstheorie für Transversalwellen liefert; es ergeben sich demnach auch die für diese Wellen bekannten Folgerungen. Zunächst ist ersichtlich, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Schwingungen durch den Wert $\sqrt{\varkappa/c\mu}$ bestimmt ist. Die magnetische Kraft N, welche zur Z-Achse parallel ist, folgt denselben Gesetzen; sie ist zur elektrischen Kraft Y normal und pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit $\sqrt{\varkappa/c\mu}$ fort. Jeder polarisierte Lichtstrahl besteht demnach aus den zu einander senkrechten elektrischen und magnetischen Schwingungen.

Bezüglich der Constanten ist zu bemerken, dass $1/\varkappa$ mit der Dielektricitätsconstanten übereinstimmt, μ ist die Magnetisierungsconstante und c hängt nur von geometrischen Verhältnissen ab. Da in den verschiedenen Körpern $\varkappa$ verschieden ist, während μ bei den meisten Körpern fast gleich, und zwar gleich Eins ist, so sind hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper für ihr optisches Verhalten bestimmend.

Das gewonnene Gesetz der Lichtwellen gestattet, die Erscheinungen der geradlinigen Fortpflanzung, der Beugung und der verschiedenen Interferenzen abzuleiten.

19. Grenzbedingungen. Reflexion und Brechung. Die Grenzbedingungen, welche in der Berührungsschichte zweier verschiedener Medien *I* und *II* beim Durchgange des Lichtes in Betracht kommen, lassen sich aus den elektromagnetischen Grundgleichungen entwickeln, indem man dieselben auf ein Raumelement der Grenzschichte bezieht. Die Grenzfläche selbst sei die xy-Ebene. Findet in der Richtung der Grenzebene keine plötzliche Änderung der Kraft statt, so müssen an jeder Stelle dieser Ebene die elektrischen Kräfte beider Medien gleich und die magnetischen Kräfte beider Medien ebenfalls gleich sein; also muss

$$X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2,\ L_1 = L_2,\ M_1 = M_2$$

sein.

Daraus folgen auch die Bedingungen für die Verschiebungen und die Kräfte normal zur Grenzfläche. Zur Bestimmung derselben benützen wir die Grundgl. (7′ und 8) in den allgemeinen Formen:

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{d M}{d x} - \frac{d L}{d y}\right) + (Z_1 - Z_2)\, c^1$$

und

$$\mu N = \frac{d Y}{d x} - \frac{d X}{d y}.$$

Wenden wir jede Gleichung auf beide Mittel an und beachten die Gleichheit der bezüglichen Differentialquotienten in beiden Medien, so folgt:

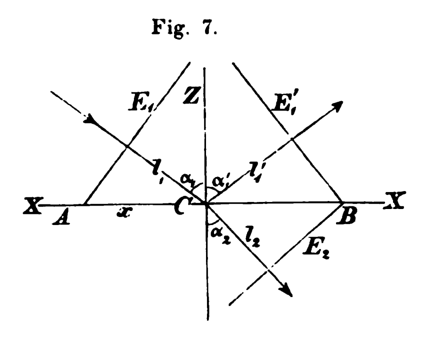
$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{und} \quad \mu_1 N_1 = \mu_2 N_2,$$

d. h. in der normalen Richtung zur Trennungsebene sind nicht die Kräfte, sondern die elektrischen Polarisationen untereinander und die magnetischen Polarisationen untereinander gleich.

Behufs Ableitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes wählen wir die xz-Ebene als Einfallsebene. In Fig. 7 sei l_1 ein einfallender, l'_1 der zugehörige reflectierte und l_2 der gebrochene Lichtstrahl. Zu den entsprechenden Strahlen normal stehen die Ebene E_1 der einfallenden Welle, die Ebene E'_1 der reflectierten Welle und die Ebene E_2 der gebrochenen Welle.

Die Größen l seien zugleich die Abstände der betreffenden Wellenebenen vom Punkte C der Grenzfläche, der Einfallswinkel sei α_1, der Reflexionswinkel α'_1 und der Brechungswinkel α_2. Die einfallende Lichtwelle sei linear polarisiert; die elektrischen Schwingungen η seien normal zur Einfallsebene, die magnetischen Schwingungen liegen in der Einfallsebene. Die Betrachtung der ersteren Schwingungen ist der Fresnel'schen Behandlungsweise des polarisierten Lichtes gemäß; die Folgerungen, zu denen die letzteren Schwingungen führen, entsprechen den bezüglichen F. Neumann'schen Lehren.

Fig. 7.



Vom Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie sind die Wege beider Physiker mit gleichem Rechte einzuschlagen.

Wir fassen zunächst die Schwingungen normal zur Einfallsebene ins Auge. Dieselben sollen von E_1 ausgehen und sich bis E'_1 und E_2 fortpflanzen. Die Schwingungen in E'_1 und E_2 werden gleichzeitig vollführt. Den Elongationen in den Wellenebenen entsprechen dem obigen Schwingungsgesetze gemäß die Werte:

$$\eta_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\eta'_1 = a'_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l_1 + l'_1}{\lambda_1}\right)$$

$$\eta_2 = a_2 \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right)\right].$$

Dieselben gelten für beliebige Punkte in den bezüglichen Wellenebenen; sie lassen sich auf alle zu den gezeichneten Strahlen l parallele Lichtstrahlen beziehen. Um die beliebige Lage der Lichtstrahlengruppe l_1, l'_1, l_2 zum Ausdruck zu bringen, setzen wir für $AB = s$, $AC = x$ und danach für

$$l_1 = x \sin \alpha_1, \quad l'_1 = (s - x) \sin \alpha'_1, \quad l_2 = (s - x) \sin \alpha_2.$$

Eine Wertveränderung des x darf keine Änderung der drei Elongationen zur Folge haben; aus dieser Bedingung geht unmittelbar hervor:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin \alpha'_1}{\lambda_1} \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \alpha'_1,$$

das ist das Reflexionsgesetz, und ferner:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\lambda_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n,$$

das ist das Brechungsgesetz.

Dieselben Gesetze ergeben sich auch aus der Grenzbedingung, nach welcher zwischen den in gleicher Zeit τ erreichten Elongationen die Beziehung besteht:

$$\varkappa_1 (\eta_1 + \eta'_1) = \varkappa_2 \eta_2.$$

Diese Beziehungsgleichung findet nur unter den Bedingungen des Reflexions- und Brechungsgesetzes statt.

Eine analoge, der F. Neumann'schen entsprechende Entwicklung ergibt das gleiche Gesetz für die magnetischen Wellen.

Aus den Grenzbedingungen ergeben sich auch die Gesetze für die Amplitude der einfallenden, reflectierten und gebrochenen Welle und danach auch die bezüglichen Polarisationsverhältnisse, wenn natürliches Licht einfällt.

Aus dem Ausdrucke für den Brechungsexponenten n folgt unmittelbar dessen Beziehung zur Dielektricitätsconstanten; denn es ist

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}.$$

Der Brechungsexponent stimmt also mit der Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstanten überein. Einige specielle Zahlenangaben darüber wurden bereits im Abschnitte (10) gemacht.

20. Doppelbrechung. Beim Durchgang des Lichtes durch Krystalle, welche nicht regulär krystallisieren, tritt eine Zerlegung des Lichtstrahles in zwei Strahlen, eine Doppelbrechung ein. Dieselbe Erscheinung tritt auch in einem isotropen Isolator auf, wenn derselbe durch die Anwesenheit eines elektrischen Conductors zum Träger eines elektrischen Feldes gemacht wird. Der Grund liegt hier in dem Vorhandensein eines Zwangs- oder Spannungszustandes nach einer gewissen Richtung und ist bedingt durch eine Polarisation der Molecüle.

Das dielektrische Verhalten der Krystalle zeigt Symmetrie nach drei aufeinander senkrechten Richtungen, in denen die elektrische Polarisation ein Maximum oder Minimum ist, und in

denen die Richtung der elektrischen Polarisation in die Richtung der elektrischen Kraft fällt.

Gestützt auf diese Thatsachen, wollen wir in den Krystallen nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Elasticität annehmen und danach die Doppelbrechung erklären.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Niveaufläche oder die Fläche gleicher Arbeit um den zu betrachtenden Punkt zuhilfe.[1]) In isotropen Mitteln ist zur Verschiebung eines Theilchens, etwa eines Ätheratoms, um die Strecke σ nach allen Seiten hin dieselbe Arbeit erforderlich; der geometrische Ort der Endpunkte von σ ist eine Kugelfläche; dieselbe ist zugleich die Niveaufläche um den betrachteten Punkt. Bei den Krystallen, die nicht nach dem regulären System krystallisieren, wird eine bestimmte Arbeit einen Punkt nach verschiedenen Richtungen hin verschieden weit zu verschieben imstande sein. Das symmetrische Verhalten zu drei aufeinander normalen Richtungen führt zu dem Schlusse, dass die Niveauflächen Ellipsoide sind, denen die Symmetrielinien als Achsen zukommen. Es wirken die durch Verschiebung geweckten elastischen Kräfte im allgemeinen nicht in der Verschiebungsrichtung, sondern stets normal zu dem zugehörigen Flächenelemente der Niveaufläche; aus dieser Eigenschaft der Niveaufläche ergibt sich leicht das Verhalten der aus dem Gleichgewichte gebrachten Theilchen.

Fig. 8.



Ein Theilchen im Punkte C (Fig. 8) sei durch einen einfallenden Lichtstrahl l aus seiner Gleichgewichtslage um die Strecke σ verschoben worden. Wir denken uns um C das Ellipsoid gleicher Arbeit construiert und beachten den Durchstoßpunkt D der Verschiebungsrichtung, d. i. den Endpunkt von σ. Zu dem betreffenden Flächenelemente steht die geweckte Totalelasticität T normal; dass T mit der Richtung der Verschiebung σ nicht zusammenfällt, ist sofort ersichtlich. Diese Verschiebungsrichtung kann daher durch die Kraft T nicht erhalten werden; nur solche Verschiebungen werden bestehen und solche Schwin-

[1]) J. Stefan: Theorie d. Doppelbrechung. Wien. Ber., Bd. 50. Abth. 2. Siehe auch des Verf. Progr.-Abhdlg.: Energie-Princip i. d. Optik. Oberrealschule in Troppau. 1887.

gungen unterhalten werden, welche mit der Kraft gleiche Richtung haben.

Um die Wirkung der Kraft T ersichtlich zu machen, betrachten wir die Wellenebene E und zerlegen die Kraft in eine zu E normale Componente N und in eine in die Ebene fallende Kraft P. Die erstere hätte nur die Anregung zu longitudinalen Verschiebungen zur Folge; sie darf daher in der Optik außer Betracht bleiben. Die Wirkung von P ergibt sich aus dem Schnitte der Wellenebene E mit dem Ellipsoide. Derselbe ist eine Ellipse (Fig. 9), in welcher im allgemeinen die Verschiebung CD nicht in die Richtung von P fällt. Der Punkt D muss daher eine Ablenkung erfahren, bis Weg und Kraft miteinander übereinstimmen. Die Übereinstimmung tritt ein, wenn der Punkt sich längs der Achsen [illegible] und [illegible] der Schnittellipse bewegt. Hat die Verschiebung [illegible]

[illegible]

Weitere optische Gesetze folgen aus den geometrischen Gesetzen des Arbeitsellipsoides. Von Wichtigkeit sind die Wellenebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden.

Im Kreise ist der Radius stets auch die Normale zu dem entsprechenden Bogenelemente, daher in einer solchen Wellenebene keine andere Componente der Elasticität vorhanden ist, als die der Verschiebung parallele und diese hat für alle Richtungen in der Ebene einen und denselben Wert. Jede solche Schwingung ist der Erhaltung fähig und pflanzt sich im Medium ohne Theilung fort. Die Richtungen dieser einfachen Lichtfortpflanzung heißen optische Achsen.

Es gibt zwei Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; dieselben sind leicht zu bestimmen. Sie gehen durch die mittlere Achse des Ellipsoides, stehen demnach normal zur Ebene der kleinsten und größten Achse. Verzeichnet man in der Schnittellipse dieser Ebene, d. i. in der Ellipse mit der größten und kleinsten Achse jene zwei Durchmesser, welche der mittleren Achse des Ellipsoides gleich sind, so erhält man die Spuren der beiden Kreisschnitte. — Die Normalen zu den bezeichneten Durchmessern geben die Richtungen der optischen Achsen. — Der eine Winkel zwischen diesen wird von der Achse der kleinsten, der andere Winkel von der Achse der größten Elasticität halbiert. — Man hat demnach den Satz:

Es gibt zwei Lagen für eine Planwelle, in welchen jede in ihr enthaltene Schwingungsrichtung eine stabile ist. Es sind dies jene Lagen, in welchen die Wellenebene das Ellipsoid gleicher Arbeit in Kreisen schneidet. Es gibt also zwei Richtungen, nach denen eine Planwelle mit beliebigen Schwingungen sich ohne Theilung fortpflanzt, sie heißen optische Achsen und liegen in der Ebene der größten und kleinsten Achse des Ellipsoides, ihre Winkel werden von diesen zwei Achsen halbiert.

An diesen allgemeinen Fall, dass die drei Achsen des Ellipsoides gleicher Arbeit sämmtlich verschieden sind, lässt sich noch die Behandlung der zwei speciellen Fälle knüpfen, in welchen entweder zwei oder alle drei Achsen gleich werden. Sind zwei der Achsen gleich, was durch einen symmetrischen Bau des Mediums um die dritte Achse bedingt wird, so schneidet nur mehr eine zu dieser Achse normale Ebene das Ellipsoid in einem Kreise; diese dritte Achse ist daher auch nur die einzige optische Achse des Mediums, das Medium ist optisch einachsig.

Beim Rotationsellipsoid ist in der Schnittellipse jeder Wellenebene eine Achse dem Kreisradius gleich; jeder solchen Schwingung entspricht die gleiche Elasticität und deshalb auch die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Bei der Doppelbrechung in einachsigen Krystallen wird daher immer eine von den beiden entstandenen Wellen Schwingungen parallel mit einem Kreishalbmesser enthalten. Eine solche Welle pflanzt sich nach jeder Richtung mit derselben Geschwindigkeit fort; sie genügt dem Gesetze der einfachen Brechung und wird deshalb auch ordentliche Welle genannt. In optisch zweiachsigen Krystallen gibt es nur zwei außerordentliche Wellen.

Ist das Medium nach allen Richtungen symmetrisch, so geht das Ellipsoid in eine Kugelfläche über. Jede beliebige Richtung ist eine optische Achse; das Medium ist ein einfach brechendes.

Die Gleichung für das Ellipsoid gleicher Arbeit erhält man aus dem Arbeitswerte für die Verschiebung.

Sind ξ, η, ζ die Verschiebungscomponenten längs der Coordinaten, welche zugleich die Hauptelasticitätsachsen sein sollen, so ist die Arbeit

$$A = \tfrac{1}{2} \varkappa_1 \xi^2 + \tfrac{1}{2} \varkappa_2 \eta^2 + \tfrac{1}{2} \varkappa_3 \zeta^2.$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sind die Elasticitätsconstanten in den Achsenrichtungen. Werden ξ, η, ζ als laufende Coordinaten angesehen, so gibt die Gleichung auch die Gleichung des Arbeitsellipsoides. Die Halbachsen desselben sind:

$$a = \sqrt{\frac{2A}{\varkappa_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2A}{\varkappa_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{2A}{\varkappa_3}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen ist gegeben durch die Form

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa}{\delta}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2A}{\delta}}.$$

Dieselbe ist der Verschiebung σ umgekehrt proportional.

Nach den in einem Kraftfelde herrschenden Verhältnissen, welche bei der Ableitung der Maxwell'schen Gleichungen dargestellt wurden, wird durch jede elektrische Schwingung eine senkrechte magnetische Schwingung erzeugt, und durch die betreffenden Verschiebungen werden beziehungsweise elektrische und magnetische Kräfte geweckt. Daraus folgt leicht, dass jede

Welle aus zu einander senkrechten elektrischen und magnetischen Polarisationsschwingungen besteht, die in der Wellenebene liegen, dass auf der elektrischen Polarisation die magnetische Kraft und auf der magnetischen Polarisation die elektrische Kraft senkrecht steht; die Richtung beider Kräfte tritt im allgemeinen aus der Wellenebene heraus. Die Richtung, welche auf den beiden Polarisationen senkrecht steht, ist die Wellennormale n. Die Richtung, welche auf beiden Kräften senkrecht steht, ist die Richtung des Lichtstrahles l.

Die Maxwell'schen Gleichungen selbst nehmen für die Krystalle unter der Voraussetzung, dass die Symmetrieachsen mit den Coordinaten parallel sind, folgende Form an:

$$\mu_1 \frac{dL}{dt} = \frac{dZ^1}{dy} - \frac{dY^1}{dz} \qquad \frac{c}{\varkappa_1} \cdot \frac{dX^1}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}$$

$$\mu_2 \frac{dM}{dt} = \frac{dX^1}{dz} - \frac{dZ}{dx} \qquad \frac{c}{\varkappa_2} \cdot \frac{dY^1}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}$$

$$\mu_3 \frac{dN}{dt} = \frac{dY^1}{dx} - \frac{dX^1}{dy} \qquad \frac{c}{\varkappa_3} \cdot \frac{dZ^1}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}$$

Die Constanten sind nach den Achsenrichtungen verschieden; bei den meisten Krystallen sind jedoch $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$. Das magnetische Verhalten der Krystalle kommt daher dem der isotropen Körper gleich; magnetische Polarisation und magnetische Kraft fallen in eine Richtung. Die Gleichungen ergeben auch die mittels des Arbeitsellipsoides gezogenen Folgerungen.

V.

Molecularkräfte.

21. Die Molecularkräfte werden in der Physik zur Erklärung der Cohäsion und Adhäsion angenommen. Die Cohäsion äußert sich theils als Anziehung, welche den Zusammenhang der Körpertheilchen bewirkt, theils als Abstoßung, welche der Anziehung das Gleichgewicht hält und verhindert, dass die Körpertheilchen sich bis zu vollständiger Berührung nähern. Es soll versucht werden, vom Standpunkte der Theorie der Ätherverschiebung für die Molecularkräfte eine Erklärung zu finden.

Nach Wilhelmy und Redtenbacher bestehen die Körperatome aus einem ponderablen Kerne, der mit einer Äther-

hülle umgeben ist. Der Äther ist der Träger der Abstoßungskräfte, während die schweren Massentheilchen durch unmittelbare Fernewirkung einander anziehen. Nach der heute fast allgemein anerkannten Ansicht von Clausius machen die Molecüle der flüssigen und festen Körper schwingende und kreisende Bewegungen um gewisse Gleichgewichtslagen, ihre lebendige Kraft ist die Wärme. Bei Erwärmung werden die Bahnen der Bewegung vergrößert, und dadurch wird der Körper ausgedehnt. Die Wärme ist danach eine den anziehenden Kräften entgegenwirkende Kraft. Die Anziehung wird als unmittelbare Wirkung in sehr kleine Entfernungen gedacht. Für die Gase gilt nach Clausius die kinetische Gastheorie, zu deren Ausbildung er im hohen Maße beigetragen hat.

Nach Rankin besteht jedes Körperatom aus einem Kerne, umgeben von einer elastischen Atmosphäre, welche durch anziehende Kräfte von dem Kerne in ihrer Lage gehalten wird. Die elastische Kraft der Wärme entsteht durch Rotation und Vibration der elastischen Atmosphäre der Atome, und die Wärmemenge eines Körpers ist die lebendige Kraft dieser Rotationen und Vibrationen. Die Absorption von Licht und Wärme wird als Übergang der Bewegung von den Atomkernen des betreffenden Mediums zu ihrer Atmosphäre und die Strahlung durch die umgekehrte Übertragung dargestellt. Die Atomkerne sollen unabhängig oder fast unabhängig von ihren Atmosphären vibrieren.

Alle drei Ansichten setzen eine unmittelbare Fernewirkung der Massen voraus, die bei Molecularkräften allerdings auf sehr kleine Distanzen beschränkt bleibt. Nach der älteren Ansicht ist auch die Abstoßung eine Fernewirkung der Ätherhüllen; nach der neueren Anschauung wirkt die Wärme der Anziehung entgegen und besteht dieselbe in der lebendigen Kraft einer Atombewegung. Rankin speciell nimmt hierbei für den Schwerpunkt der Atome den Ruhezustand an und erklärt die Wärme als die lebendige Kraft der Rotationsbewegung der Ätherhüllen um die Atome. Diese Ansicht steht im Einklange mit unserer gegebenen Darstellung der Ätherwirbel, welche als Ätheratome bezeichnet wurden. Wir haben diese Hypothese nur auf die Körperatome zu übertragen, um eine Rankins ganz ähnliche Erklärung anwenden zu können.

Wir betrachten demnach ein Körperatom als einen Ätherwirbel von besonderer Größe und dessen lebendige

Kraft als die Wärme. Die Ätheratome seien kleiner; ihre Fliehkräfte sind die Kräfte des Kraftfeldes, das sich rings um die Körpertheilchen befindet.

Die Form des unbeeinflussten Körperatomes ist die Kugelform.

Die Fernwirkung der Massen wird nach der Äthertheorie durch unmittelbaren Ätherdruck erklärt, der durch das Kraftfeld auf die Körperatome ausgeübt wird. Die Fliehkraft der Wirbel der Körperatome hat diesem Druck das Gleichgewicht zu halten.

Das moleculare Kraftfeld kann ebenso wie das elektrische Kraftfeld durch Ätherverschiebung erzeugt gedacht werden; dann ist die Intensität des Feldes an jeder Stelle der Verschiebung daselbst proportional. Der Verschiebungsprocess muss gleichzeitig mit der Bildung der Atome vor sich gegangen sein: er konnte darin bestehen, dass mehrere Äthertheilchen näher zusammentraten und den Äther ringsumher zur Verschiebung gegen den Mittelpunkt der Vereinigung veranlassten; diese Annahme stimmt mit der allgemein gebräuchlichen Hypothese über die Atome überein, nach welcher dieselben als feste Theilchen gedacht werden. Es konnte aber eine Ätherverschiebung auch durch Vergrößerung der Elementarwirbel, etwa durch Steigerung der lebendigen Kraft derselben eintreten; im letzteren Falle hätte eine Ätherverschiebung nach auswärts stattgefunden und der Raum des Körperatoms wäre leer. Auch diese Ansicht hat einige Anhänger. Für die Ableitung der gesetzlichen Beziehungen zwischen Kraft, Volumen und Wärme der Körper ist es gleichgiltig, nach welcher Richtung die Ätherverschiebung stattgefunden hat. Die Erklärung der Wärmewirkung spricht jedoch für die Ätherverschiebung in der Richtung zum Atommittelpunkt hin, und soll deshalb diese Richtung im folgenden vorausgesetzt werden.

Ob bei der Vereinigung der Ätheratome zum Körperatom die einzelnen Wirbel der ersteren erhalten bleiben und so zusammentreten, dass sich ihre Fliehkräfte im Innern des Körperatomes gegenseitig aufheben und nur die Fliehkraft an der Oberfläche nach außen wirkt, oder ob die einzelnen elementaren Wirbel als solche aufhören und sich zu einem einheitlichen Wirbel des Körperatoms vereinigen, wird durch die zu behandelnden physikalischen Erscheinungen nicht entschieden und soll

deshalb auch unberücksichtigt bleiben. Unbestimmt bleibt damit auch, ob die Körperatome theilbar sind oder nicht.

Aus dem Zusammenwirken des Ätherdruckes im Kraftfelde und der Fliehkraft der körperlichen Atomwirbel, welche der Temperatur proportional ist, lässt sich nun das moleculare Verhalten der Körper erklären.

Einfach gestalten sich die Verhältnisse bei Betrachtung von zwei Körperatomen. Befindet sich jedes derselben im Kraftfelde des andern, so heben sich im Zwischenraume die Ätherverschiebungen theilweise auf und jedes Atom erleidet, ähnlich wie bei der elektrischen Influenz, eine Polarisation; auf jedes Theilchen einer Atomoberfläche wirken nämlich die zwei Kräfte: die Fliehkraft des eigenen Wirbels und die Verschiebungskraft des andern Atoms; ist diese gegen das andere Atom gerichtet, so zeigt eine einfache graphische Darstellung die Richtung der Resultierenden und dazu normal die Lage der Niveaufläche, welcher sich die Atomoberfläche anpassen muss. Wird die Betrachtung über einen Meridianschnitt des Atomes ausgedehnt, so folgt, dass das Atom die Kugelform so ändert, dass an der dem andern zugewandten Seite die Krümmungshalbmesser größer und an der abgewandten Seite kleiner sind.

Die Theilchen, welche mit einer bestimmten lebendigen Kraft im Atomwirbel rotieren, entwickeln an der Stelle des kleinern Krümmungshalbmessers die größere Fliehkraft und werden demnach dem Antriebe des Kraftfeldes entgegenwirken und eventuell denselben ganz aufheben. Je größer die lebendige Kraft, desto größer ist auch der Überschuss der Fliehkraft auf den Außenseiten beider Atome, desto größer also auch das Ausdehnungsbestreben. Den Thatsachen gemäß kann die lebendige Kraft entweder durch Wärmezufuhr oder durch die Arbeit der Annäherung der Atome vermehrt werden. Damit steht auch die Hypothese der Atomwirbel im Einklange, indem in beiden Fällen durch eine äußere Kraft Arbeit auf den Wirbel übertragen und dadurch die lebendige Kraft gesteigert wird. In beiden Fällen muss sich deshalb auch die ausdehnende Kraft geltend machen.

Durch Übertragung der entwickelten Vorstellungen auf alle Atome eines Körpers gelangen wir zu dem Schlusse, dass die Ätherverschiebungen in den Schichten zwischen den Atomen sich theilweise aufheben und dass also auch das Kraftfeld im

Innern der Körper theilweise aufgehoben wird. Nur das Kraftfeld der Oberflächenschichte bleibt vollkommen erhalten. Der Cohäsionsdruck, unter welchem das Körpervolumen steht, wird somit größtentheils von dem Kraftfelde der Oberflächenschichte ausgeübt, und die Fliehkraft der körperlichen Atomwirbel hat dem Drucke das Gleichgewicht zu halten. Die mathematische Fassung dieses Gedankens führt zur allgemeinen Zustandsgleichung. Vor Ableitung derselben sollen jedoch noch zwei wichtige Erklärungen folgen.

Um den Unterschied zwischen der Körperwärme und den durch den Körper hindurchgehenden Wärme- und Lichtstrahlen zu erklären, nehmen wir den entwickelten Lehren der Optik gemäß an, dass die Schwingungen der Strahlen von den Ätheratomen im Felde zwischen den Körperatomen ausgeführt werden. Jede diesbezügliche Ätherverschiebung ruft eine Polarisation, ein elektrisches Kraftfeld im Körper hervor. Bleiben dabei die zu einem Körperatome gehörigen Äthertheilchen stets bei diesem, so dass bei einer Schwingung nur eine augenblickliche Formveränderung, jedoch kein Äthertransport stattfindet, so lässt der Körper Licht- und Wärmestrahlen hindurch. Gehen aber im Polarisationszustande Äthertheilchen von einem Körperatom zum andern über, so kommt das einer elektrischen Leitung gleich; die Energie der Ätherverschiebung wird in Körperwärme verwandelt, indem die Rotationsbewegung der Körperatome, beziehungsweise die lebendige Kraft der Atomwirbel vermehrt wird. Wir sagen in diesem Falle, dass die Wärmestrahlen absorbiert werden. Da jede Polarisation mit einer Schwerpunktsverschiebung der Atome verbunden ist, so steht die gegebene Erklärung mit der Hypothese von Rankin im Einklange.

Schließlich sei noch auf den Unterschied zwischen fernwirkenden Kräften und Molecularkräften hingewiesen. Wir betrachten beide als Ätherdruck, hervorgerufen durch Ätherverschiebung rings um die Atome; Druck und Verschiebung sollen proportional sein. Berücksichtigen wir hierzu, dass das Feld der Molecularkräfte unmittelbar um die Atome nur bis auf sehr kleine Entfernungen und das Feld der Fernwirkung von da bis ins Unendliche thatsächlich zu finden sind, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass der Unterschied in der Elasticitätsconstanten gesucht werden müsse. Die Wirkungs-

sphäre unmittelbar um die Atome wäre danach durch eine besondere Elasticitätsconstante charakterisiert.

Die Auffassung stimmt mit den Lehren der Elektricität und der Optik überein, nach welchen die verschiedenen Körper verschiedene Dielektricitätsconstanten und Brechungsexponenten besitzen, die wesentlich von der Elasticitätsconstanten abhängen. Auf Grund derselben können wir ein Atom mit einer kugelförmigen Leydener Flasche vergleichen, indem wir das moleculare Wirkungsfeld als das Kraftfeld eines Dielektricums betrachten, und haben dadurch einen Anhaltspunkt gewonnen, zahlenmäßig zu prüfen, ob dasselbe Mittel Träger der elektrischen, optischen und molecularen Kräfte sein kann. Im günstigen Falle müssen Dielektricitätsconstante, das Quadrat des optischen Brechungsexponenten und der reciproke Wert der Elasticitätsconstanten desselben Mittels übereinstimmen.

22. Die Zustandsgleichung. Für die Gase gibt das Spannungsgesetz, das die Gesetze von Boyle-Mariotte, Gay Lussac und Avogadro vereinigt, die Zustandsgleichung an; das Gesetz wurde von van der Waals auch auf Flüssigkeiten ausgedehnt und von E. Dühring unter entsprechenden Bedingungen auch für feste Körper giltig erklärt.[1])

Fig. 10.



Die Gleichung besteht in erweiterter Bedeutung links aus dem im Körper aufgespeicherten Arbeitswerte der Cohäsion und des äußern Druckes und rechts aus der äquivalenten Wärmemenge.[2]) Sie muss auch nach der Theorie der Ätherverschiebung durch Berechnung der betreffenden Arbeit gewonnen werden, wenn die Theorie brauchbar sein soll. In der That gibt die zur Erzeugung des molecularen Kraftfeldes nöthige Verschiebungsarbeit das gewünschte Gesetz.

Behufs Ableitung desselben betrachten wir einen Körper, dessen Atome in concentrischen oder nach Figur 10 in parallelen

---

[1]) Van der Waals: Die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes. Deutsch von Roth. E. Dühring: Neue Grundgesetze der Physik und Chemie.

[2]) Siehe meine Abhandlung i. d. Wiener Realschul-Zeitschr.: Zur Übereinstimmung d. versch. phys. Arbeitsgesetze. 1892.

Schichten gelagert seien, und nehmen an, dass in den Zwischenvolumen vollkommen homogene Kraftfelder bestehen. Die Vereinfachung wird gestattet sein, solange von der inneren Reibung abgesehen wird. Wir berechnen zunächst die Arbeit der Verschiebung im Kraftfelde der Atomreihe R_1. Ist die Ätherverschiebung auf jeder Seite der Mittelpunktslinie von R_1 gleich ξ, so ist die elastische Kraft zu beiden Seiten der Verschiebung ξ und der verschobenen Masse μ proportional, also

$$p = \varkappa \mu \xi = \varkappa.(f.dx.\delta).\xi.$$

Die Arbeiten auf beiden Seiten zusammen sind

$$dA = 2.\tfrac{1}{2}p.\xi = \varkappa.\delta.\xi^2.f.dx.$$

Nun ist

$$P = \varkappa.\delta.\xi^2$$

der Druck der Verschiebungsschichte $(f.\xi)$ pro Flächeneinheit oder auch die Kraft, die, von R_1 ausgehend, auf die Masse $(\delta \xi)$ über der Flächeneinheit von R_2 wirkt. Setzen wir noch für das Volumelement $f.dx = dv$, so erhalten wir:

$$dA = P.dv.$$

Diese Arbeit wird von R_1 geleistet, wenn keine Gegenwirkung vorhanden ist. Befinden sich aber neben R_1 andere Atomreihen R_2 etc., welche die gleich große Verschiebung in entgegengesetzter Richtung hervorbringen, so heben sich die Verschiebungen in den gemeinschaftlichen Zwischenschichten auf, und der bestandene Arbeitsvorrath wird vernichtet; es entstehen Verhältnisse, welche denen im freien Äther außerhalb der Körper ähnlich sind. Die Arbeit dA gibt demnach den Energieverlust einer Atomreihe bei der Gegenwirkung der Nachbarreihen im Innern des Körpers. Dabei setzen wir voraus, dass die Wirkungsweite der Atome gleich der Entfernung derselben ist. Wenn die Wirkungssphäre einer Reihe n Schichten übergreift, so ist die Verschiebung, welche die Intensität des Kraftfeldes bedingt und danach auch P n-mal zu vergrößern; dadurch wird jedoch die Form des Gesetzes nicht geändert.

Die Arbeitsänderung sämmtlicher Reihen erstreckt sich über das ganze Körpervolumen v mit Ausschluss der Atomvolumen $\Sigma(f.\xi) = w$ und der Oberflächenschichte, deren Kraftfeld durch keine Gegenwirkung aufgehoben wurde. Ist F das Maß für die Oberfläche, so wird

$$A = \int P.dv - \tfrac{1}{2}P.F.\xi = P(v-w) - \tfrac{1}{2}P.F.\xi.$$

Wert gibt bereits die Cohäsionsarbeit des Körpers an. Derselbe genügt zur Ableitung der Molecularerscheinungen, bei welchen die Temperatur nicht in Betracht kommt.[1]) So erhält man z. B. für eine Flüssigkeitskugel den Oberflächendruck durch Berechnung des Wertes $dA/dr.4r^2\pi$, wenn man beachtet, dass $\frac{1}{2}P.\xi$ als Energie der Flächeneinheit mit der Capillaritätsconstanten H identisch ist. Diese Energie der Oberflächenschichte ist gegenüber dem Arbeitswerte für das ganze Volumen v sehr klein und kann vernachlässigt werden, wenn es sich um die Cohäsionsarbeit handelt, wie es bei der Zustandsgleichung der Fall ist.

Bei dieser Vernachlässigung stimmt der bleibende Näherungswert für A mit dem Energiewerte eines Atomwirbels (Gl. 3) überein. Nun lässt sich auch der Zustand des ganzen Körpers mit dem eines Atoms vergleichen, wenn im Innern des ersteren eine Aufhebung des Kraftfeldes stattgefunden hat; denn ebenso wie beim einzelnen Atom steht auch beim Körper das innere Volumen unter dem Ätherdrucke des Kraftfeldes und die Fliehkraft der Oberflächenschichte hat demselben das Gleichgewicht zu halten. Gl. (3) gemäß ist demnach die Cohäsionsarbeit A der lebendigen Kraft der Körpertheilchen gleichzusetzen. Nehmen wir diese der Atomzahl N und der absoluten Temperatur T proportional an, so gewinnt A die Form:

$$(P+p)(v-w) = C.N.T.$$

p mag den äußeren Luftdruck bezeichnen, um welchen der Cohäsionsdruck P vermehrt wird.

Die Gleichung ist die allgemeine Zustandsgleichung, welche die Gasspannungsgesetze als specielle Fälle einschließt. Die linke Seite enthält das Zwischenvolumen $(v-w)$; daher auch das Gesetz von Avogadro nach dieser Gleichung nicht auf das ganze Körpervolumen v, sondern auf $(v-w)$ zu beziehen ist.

23. Beziehung zwischen Cohäsion, Elektricität und Licht. Für den Cohäsionsdruck P wird allgemein Proportionalität mit dem Quadrate der Körperdichte angenommen. Dieselbe Beziehung folgt auch aus obigem Werte

$$P = \varkappa\delta.\xi^2 = \frac{\varkappa}{\delta}(\delta\,\xi)^2.$$

---

[1]) Siehe meine Abhandlung: Die Gesetze des Oberflächendruckes und der Oberflächenspannung. Troppau 1890.

Setzt man analog wie bei der Elektricität die Masse der Verschiebungsschichte ($\xi.\delta.2$) über der Flächeneinheit zu beiden Seiten einer Atomreihe R gleich der zugehörigen Körpermasse ($\varDelta.dx$) über derselben Fläche, wobei $\varDelta$ die Körperdichte angibt, welche ebenso wie die elektrische Dichte von der Ätherverschiebung ξ abhängt, so wird:

$$P = \frac{\varkappa}{4\,\delta}.(\varDelta.dx)^2.$$

Hiezu ist zu berücksichtigen, dass die Ätherverschiebungen normal zur Fläche f und im ganzen Körperraume gleich groß angenommen wurden. Diese Bedingungen treffen nicht zu, wenn die Körpermasse in kugelförmigen Atomen vertheilt ist. Die Richtungen der einzelnen Verschiebungen gehen dann von den Mittelpunkten der einzelnen Atome aus und die Größe der Verschiebung nimmt im umgekehrt quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung von den Atomen ab. Bei Einwirkung zweier Atomreihen werden sich die gegeneinander gerichteten Verschiebungen nicht völlig aufheben, sondern es bleibt um jedes Atom ein Kraftfeld, das sich bei inneren Bewegungen geltend machen wird.

In der vorstehenden Berechnung macht sich die Ungenauigkeit in dem Ausdrucke für P bemerkbar. In der ersten Form desselben gibt nämlich ($\delta\xi$) die Masse der Reihe R_2 an, auf welche das Feld von R_1 einwirkt; der andere Factor ξ bestimmt die Ätherverschiebung dieses Feldes an der Stelle von R_2, also in der Entfernung dx vom Verschiebungscentrum. Die letztere Verschiebung ist $(dx)^2$ umgekehrt proportional, und somit ist der Verschiebungswert ξ noch durch $(dx)^2$ zu dividieren. In Rücksicht darauf fällt in der Schlussgleichung für P der Factor dx^2 fort und es folgt:

$$P = \frac{\varkappa}{4\delta}.\varDelta^2 = \frac{a}{v^2},$$

d. h. der Cohäsionsdruck ist dem Quadrate der Körperdichte direct oder dem Quadrate des Körpervolumens umgekehrt proportional. Durch Einführung des Wertes für P in die Zustandsgleichung erhält dieselbe die ihr von van der Waals gegebene Form.

Der Proportionalitätsfactor enthält das Verhältnis $\varkappa/\delta$, welcher mit dem reciproken Werte der Dielektricitätsconstanten oder dem reciproken Quadrate des Brechungsexponenten

übereinstimmt. Danach lässt sich zahlenmäßig prüfen, ob thatsächlich dasselbe Mittel Träger der Elektricität, des Lichtes und der Cohäsion ist. Leider gestatten die vorhandenen Daten nicht, eine endgiltige Entscheidung zu treffen; immerhin sind aber in einigen Fällen Schätzungen möglich, welche es wahrscheinlich machen. — Folgende Zusammenstellung mag diesem Zwecke dienen.

Die Zustandsgleichung gibt eine Beziehung zwischen einer Druckänderung dp und einer Temperaturänderung dT bei const. v; führt man darin den Compressibilitätscoëfficienten β nach der Relation $dv = \beta v dp$ und den Ausdehnungscoëfficienten α sinngemäß ein, lässt den Luftdruck und eine etwaige Änderung der Atomzahl N unberücksichtigt, so folgt:

$$P = a . \Delta^2 = \frac{\alpha T}{\beta}.$$

Aus der Gleichung lässt sich die Cohäsionsconstante a, welche der Elasticitätsconstanten $\varkappa$ proportional ist, berechnen. Ist dieselbe auch dem Quadrate des optischen Brechungsexponenten n umgekehrt proportional, so muss an^2 für alle Körper eine constante Größe sein. Einige diesbezügliche Werte sind folgende:[1])

Luft .... $a = 1690$, $n = 1\cdot000294$, $an^2 = 1690$
Wasser bei 15° C... $\alpha_{15} = 0\cdot000151$, $P = 950$ Atm., $an^2 = 1640$
$\beta = 0\cdot0000455$, $a = 950$
$1/\Delta = 1\cdot00085$, $n = 1\cdot312$
Quarz bei 17° C..... $\alpha = 0\cdot0000362$, $P = 4510$ Atm., $an^2 = 1650$
$\beta = 0\cdot00000233$, $a = 670$
$\Delta = 2\cdot6$, $n = 1\cdot56$
Glas (bleihaltig)..... $\alpha = 0\cdot000024$, $P = 2620$ Atm., $an^2 = 1660$
$\beta = 0\cdot0000025$, $a = 575$
$\Delta = 2\cdot135$, $n = 1\cdot701$

Diese Zahlen für an^2, welche sich auf Körper aller drei Aggregatzustände beziehen, stimmen gut miteinander überein und sprechen jedenfalls zu Gunsten der Ätherhypothese.

Dagegen lassen sich allerdings auch sehr abweichende Werte berechnen; jedoch ist dadurch die Unhaltbarkeit unserer Hypothese noch nicht erwiesen. So ergeben sich z. B. für:

[1]) Siehe auch meine Abhdlg. in Exn. Rep. „Eine Beziehung zwischen Cohäsion, Licht u. Elektr." 1891. Die benützten Daten sind Winkelmanns Handbuch d. Ph., ferner Wüllners Lehrb. d. Ph. entnommen.

Kohlensäure .... $a = 2260$, $n = 1\cdot000449$, $an^2 = 2260$
Schweflige Säure .. $a = 3560$, $n = 1\cdot000665$, $an^2 = 3560$
Alkohol .... $P = 3210$ Atm.
$a = 4970$, $n = 1\cdot35$, $an^2 = 9100$
Schwefelkohlenstoff . $P = 5360$ Atm.
$a = 3340$, $n = 1\cdot64$, $an^2 = 8940$
Wasser bei 80° C. . $P = 5760$ Atm., $an^2 = 9900$
Eisen .... $P = 12170$ Atm.
$a = 230$, $n = 1\cdot73$, $an^2 = 700$
Kupfer .... $P = 14000$ Atm.
$a = 180$, $n = 0\cdot65$, $an^2 = 76$

Die Werte von an^2 der Gase und Flüssigkeiten sind bedeutend größer und jene der Metalle kleiner als die oben angegebenen Zahlen circa 1660. Auffallend erscheint dabei, dass Wasser bei 80° C. einen sechsmal größeren Cohäsionsdruck P ausüben soll als bei 15° C. Dieser Umstand weist gewiss darauf hin, dass die benützten Zahlen nicht zusammenstimmen. Es ist nämlich zu bemerken, dass die Größen, aus denen a und n berechnet werden, für jeden Körper sich auf ein und denselben Zustand beziehen sollen. Nun ist a aus der Zustandsgleichung unter der Bedingung gewonnen worden, dass keine Molecularveränderungen vor sich gehen; diese Voraussetzung lässt sich bei keinem der zuletzt angeführten Stoffe behaupten, wenn sie, wie die Gase und Flüssigkeiten, bei Bestimmung des a hohem Druck oder hoher Temperatur unterworfen werden, oder wenn sie, wie die Metalle, bei Bestimmung des n von Lichtstrahlen durchsetzt werden. Wird angenommen, dass bei Gasen und Flüssigkeiten eine Vermehrung der Molecülzahl N stattfindet und deshalb (der Zustandsgleichung gemäß) die Cohäsionsconstante a größer ist, als es dem Brechungsexponenten entspricht, und dass bei den Metallen infolge elektrischer Leitung eine Zerlegung der Molecüle eintritt und deshalb n gegenüber a zu klein genommen wird, so ist der Mangel an Übereinstimmung gerechtfertigt. Würde bei den Flüssigkeiten, für welche $an^2 = 10.000$, eine Zerlegung der Molecüle in 6 Theile angenommen, so ist a gegenüber n, oder n^2 in Bezug auf die Zustände, unter welchen a bestimmt wurde, ca. sechsmal zu groß. Bei Berücksichtigung einer solchen Molecülzerlegung geht das Product an^2 über in 1666. Diesem Mittelwerte nähern sich auch die betreffenden Producte für Eisen und Kupfer, wenn beim Durchgang des

L[illegible] es Molecül der ersteren in 2 und des letzteren in 21 [illegible]lecüle zerlegt gedacht wird.

24. Ausdehnung. In der Zustandsgleichung erscheint nicht das ganze Körpervolumen v, sondern das Volumen des Kraftfeldes zwischen den Atomen oder Molecülen, nämlich $(v-w)$ als Factor der Cohäsionsarbeit. Bei der Ausdehnung wird eigentlich nur dieses Volumen verändert und es ist für die Lehre von der Einheit der Naturkräfte von Wichtigkeit, nach Dühring zu bemerken, dass der Ausdehnungscoëfficient, bezogen auf dieses Zwischenvolumen, für alle Körper nahezu dem Ausdehnungscoëfficienten der Gase gleich ist.

Zum Nachweise bestimmen wir einige Ausdehnungscoëfficienten.

Der Ausdehnungscoëfficient α, bezogen auf das Volumen v, ist gegeben durch die Beziehung $dv = \alpha v dt$; der Ausdehnungscoëfficient α', bezogen auf das Volumen $(v-w)$, entspricht der Gleichung $dv = \alpha'(v-w).dt$. Aus beiden Definitionen folgt:

$$\alpha' = \frac{v}{v-w}.\alpha.$$

Behufs zahlenmäßiger Ausrechnung benützen wir die Zustandsgleichung in der Form:

$$(P+p)\,dv + (v-w)\,d(P+p) = 0,$$

ferner den Compressibilitätscoëfficienten β gemäß der Bedingung $dv = -\beta v.dp$ und die Werte

$$P = \frac{a}{v^2}, \quad P + p = \frac{\alpha T}{\beta}.$$

Wir erhalten hiedurch:

$$\alpha' = \frac{v}{v-w}.\alpha = \frac{1+2\alpha T}{T}.$$

Und in specieller Ausführung für

Gase .... $\alpha = \frac{1}{273} = 0{\cdot}00367$

Äthylalkohol bei 7·3° C. .... $\alpha = 0{\cdot}001055$, $\frac{v}{v-w} = 5{\cdot}38$, $\alpha' = 0{\cdot}00567$

Wasser bei 100° C. .... $\alpha = 0{\cdot}00080$, $\frac{v}{v-w} = 5{\cdot}35$, $\alpha' = 0{\cdot}00428$

Eis bei 0° C. .... $\alpha = 0 \cdot 000192$, $\frac{v}{v-w} = 21$,
$\alpha' = 0 \cdot 00404$

Quecksilber bei 0° C............ $\alpha = 0 \cdot 000179$, $\frac{v}{v-w} = 22 \cdot 5$,
$\alpha' = 0 \cdot 00400$

Silber bei 0° C................ $\alpha = 0 \cdot 000060$, $\frac{v}{v-w} = 70$,
$\alpha' = 0 \cdot 00378$

Kupfer bei 0° C................ $\alpha = 0 \cdot 000044$, $\frac{v}{v-w} = 85 \cdot 2$,
$\alpha' = 0 \cdot 00375$

Eisen bei 0° C. .... $\alpha = 0 \cdot 000031$, $\frac{v}{v-w} = 120$,
$\alpha' = 0.00372$

Die Ausdehnungscoëfficienten α' der Metalle nähern sich dem Werte des Ausdehnungscoëfficienten der Gase; nur die der Flüssigkeiten weichen ab, indem sie größer sind. Ebenso wie im vorhergehenden Abschnitte kann diese Abweichung von molecularen Vorgängen herrühren, die in der Rechnung nicht berücksichtigt wurden.

25. Aggregatzustände. Zum Schlusse mögen noch einige Bemerkungen, die einer statischen Auffassung des Ätherdruckes günstig zu sein scheinen, Raum finden.

Die thatsächlichen Mittel, welche zur Beurtheilung des Aggregatzustandes führen, sind die Verschiebung und Trennung der Körpertheilchen; je nach der Schwierigkeit, welche damit verbunden ist, unterscheidet man feste, flüssige und gasförmige Körper. Als Ursache des verschiedenen Verhaltens der Körper wird fast allgemein die Cohäsion angegeben; je nach der Stärke derselben soll der Körper fest oder flüssig sein. Die geringe Cohäsion bei den Flüssigkeiten und der Mangel einer Cohäsion bei den idealen Gasen wird auch zu Gunsten der kinetischen Theorie geltend gemacht. Diese Erklärungen finden sich in den meisten physikalischen Lehrbüchern. Sie sind aber unrichtig, wenn der Cohäsionsdruck, d. i. der infolge der Wechselwirkung der Körpertheilchen auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck, als Maß der Cohäsion angesehen wird.

Wie bereits J. Stefan und O. Lehmann bemerkt haben, ist der Unterschied zwischen den Cohäsionsdrucken der festen

und flüssigen Körper nicht so bedeutend, dass er den Unterschied zwischen den Arbeitsleistungen zur Verschiebung oder Trennung der betreffenden Körpertheile erklären könnte.

Aus der täglichen Erfahrung ist allgemein bekannt, dass zum Abheben eines Glases in senkrechter Richtung vom Tische eine namhafte Kraft erforderlich ist, wenn sich zwischen Glas und Tischplatte eine, beide benetzende Flüssigkeitsschichte befindet; schon diese Erscheinung weist auf eine bedeutende Cohäsion der Flüssigkeit hin. Gegen die übliche Erklärung spricht auch die Beziehung zwischen Cohäsionsdruck und Körperdichte. Der Cohäsionsdruck ist dem Quadrate der Körperdichte proportional. Die Dichte eines Körpers wird nun aber beim Schmelzen nicht in dem Verhältnisse geändert als die Festigkeit. Besonders auffällig zeigt sich dies beim Wasser: Die Dichte des Wassers bei 0° C. ist [illegible], des Eises bei derselben Temperatur [illegible]. Eis ist also weniger dicht, nur so dicht als Wasser zwischen [illegible] und [illegible] C.; es sollte demnach eine geringere Festigkeit [illegible] Wasser unter [illegible] C., und doch ist das Gegentheil [illegible] [illegible] kommt [illegible] [illegible] wesentlich ver[illegible] [illegible] für den Co[illegible] [illegible] das Maß [illegible]

[illegible]

wendung gebracht werden, um das Verhalten der Körper zu bestimmen.

Das Ausdehnungsbestreben der Gase erklärt sich nach der Gleichung ohneweiters, und zwar durch die Wärmewirkung bei entsprechend geringer Körperdichte.

Bei Verschiebung oder Trennung von Flüssigkeitstheilchen ändert sich nicht das Volumen, sondern nur die Größe der Oberfläche. Die geleistete Arbeit ist demnach der Vermehrung der Oberflächenenergie gleich.

Dieselbe Bemerkung gilt nicht für die Theilung der festen Körper; bei derselben wird sowohl der Rauminhalt als auch die Oberfläche vergrößert. Es ist bekannt, dass feste Körper nach dem Überschreiten der ersten Elasticitätsgrenze eine bleibende Deformation behalten; damit ist zugleich eine Volumsänderung verbunden. Bei der Einwirkung eines Zuges von 1200 *kg* auf Kupfer pro 1 cm^2 erhält das Metall eine bleibende Dehnung, bei 4030 *kg* zerreißt es. Ein Zug von 3200 *kg* pro 1 cm^2 vermag Eisen bleibend zu dehnen und eine Kraft von 6100 *kg* ist imstande, es zu zerreißen. Mit der Dehnung ist in der Regel eine Volumszunahme, mit der Pressung eine Volumsabnahme verbunden. Bei der Theilung der festen Körper muss demnach eine Volumsänderung beachtet werden.

Die Arbeit der Körpertheilung wird durch die vollständige Zustandsgleichung bestimmt; sie ist:

$$\Delta A = (P + p)\Delta v + (v - w)\Delta p - H.\Delta F = CN\Delta T + CT.\Delta N.$$

Bei den Gasen ist H verschwindend klein; bei Gasen und Flüssigkeiten sind $\Delta p = 0$ und $\Delta v = 0$. Bei Flüssigkeiten ist die Oberflächenenergie oder die Oberflächenspannung H das Maß der Theilung. Nach neueren Versuchen ist H für Wasser 7·7, für Schwefelkohlenstoff 3·3 *mgr-cm.*

Bei den festen Körpern kommen namentlich die Glieder mit Δp und Δv in Betracht. Wenn z. B. Eisen bei einem Drucke von 3000 Atm., Bauschingers Versuchen gemäß, eine Volumsverminderung um 0·001 erfährt, und wenn $P = 12000$ Atm., $v = 10\ cm^3$ und $(v - w) = 120\,v$ gesetzt werden, so erhält man für die geleistete Arbeit der Volums- und Druckänderung 400 *kg-m.* Der Process geht dem Zerdrücken voran; er vermag es noch nicht herbeizuführen.

Welche physikalischen Vorgänge die Änderung des Aggregatzustandes verursachen, ließe sich nach der Äthertheorie noch

genauer untersuchen; es soll jedoch darauf nicht näher eingegangen werden. Nur die Bemerkung sei noch hinzugefügt, dass die Änderung der Molecülgröße und die dadurch bedingte Abweichung des inneren Kraftfeldes von der Homogenität genügende Anhaltspunkte dazu bieten. Im vorhergehenden Abschnitte wurde das Verhältnis des Volumens v zum Zwischenvolumen $(v-w)$ für Wasser $= 5 \cdot 3$ und für Eis $= 21$ ermittelt. Das Zwischenvolumen des Wassers ist also ungefähr viermal so groß als das des Eises und das Molecülvolumen des Eises $1 \cdot 2$mal so groß als das des Wassers. Die Zahlen sprechen jedenfalls für einen molecularen Vorgang beim Schmelzen. Auch die rechte Seite der Zustandsgleichung weist darauf hin, dass Processe, welche bei constanter Temperatur verlaufen, mit einer Änderung der Molecülzahl N verbunden sind.

III.

Die tägliche Periode

der

Geschwindigkeit und Richtung des Windes in Kremsmünster.

Von

P. Coloman Wagner,
Professor am k. k. Gymnasium der Benedictiner in Kremsmünster.



Schon zu Anfang dieses Jahrhunderts wurde an der Sternwarte zu Kremsmünster neben der Temperatur auch die Richtung des Windes an einer etwa 9 *m* über die Plattform der Sternwarte hinausragenden Fahne beobachtet und in das Tagebuch eingetragen.

Später wurde auch die Stärke des Windes zuerst nach der vierstufigen, dann nach der zehnstufigen Scala in den Tagebüchern notiert und acht verschiedene Windrichtungen unterschieden. Im Jahre 1878 erwarb die Sternwarte ein elektrisch registrierendes Robinson'sches Anemometer zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit und einen Typendruckapparat nach Osnaghi zur Bestimmung der Windrichtung. Der Durchmesser der Kugelschalen des Anemometers beträgt 115 *mm*, die Abstände der Mittelpunkte der Schalen vom Drehungspunkte 267 *mm*, so dass 100 Umdrehungen, welche durch einen Punkt auf dem Papierstreifen markiert werden, nahezu einen Windweg von 0·5 *km* ergeben. Der Typendruckapparat gibt 16 verschiedene Windrichtungen an. Beide Apparate sind auf der Zinne der Sternwarte 54 *m* über dem Erdboden aufgestellt und ragen 5 *m* über die Plattform empor. Das Anemometer befindet sich auf der südöstlichen, das Windrad auf der südlichen Seite der Plattform. Leider stehen auf derselben Plattform noch drei Dachkuppeln für astronomische Instrumente, und zwar eine, die höhere, auf der Nord-, die zweite auf der Ost- und die dritte auf der Südwest-Seite. Zwar ragen die Windapparate noch 0·5 *m* über die höchste Kuppel hinaus, doch ist die Aufstellung nicht vorwurfsfrei, aber es war im Orte selbst kein geeigneterer Platz zu finden. Was die topographischen Verhältnisse betrifft, ist zu er-

Häufigkeit in Procenten					
Richtung	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
N	0·70	1·69	1·05	0·63	[illegible]
NNE	1·45	2·48	1·20	1·04	1·54
NE	6·64	7·83	5·51	7·07	[illegible]
ENE	14·25	18·94	10·90	16·98	15·27
E	8·73	8·26	5·09	8·00	7·51
ESE	1·41	1·60	1·60	0·92	1·38
SE	0·46	1·24	1·01	0·83	0·88
SSE	0·23	0·65	0·42	0·34	0·41
S	0·60	0·98	1·18	0·48	0·81
SSW	1·75	2·65	3·56	2·29	2·56
SW	11·53	8·21	12·20	8·52	10·07
WSW	11·72	13·64	17·41	16·88	14·91
W	18·28	14·25	18·95	18·83	17·58
WNW	8·10	7·91	10·12	7·10	8·31
NW	2·83	4·19	4·78	2·79	3·65
NNW	0·60	1·15	1·27	0·54	0·89
Calmen	10·92	4·33	3·75	6·76	6·45

Mittlere Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde					
Richtung	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
N	7·9	7·9	8·5	6·8	7·8
NNE	9·3	10·1	8·4	7·4	8·8
NE	9·6	14·0	9·6	10·4	10·9
ENE	11·5	13·8	10·2	11·0	11·6
E	16·2	16·6	12·5	14·9	14·0
ESE	6·7	9·1	3·7	11·8	7·8
SE	5·3	11·3	6·7	9·0	8·1
SSE	8·4	11·6	8·5	16·1	11·1
S	10·1	10·5	10·2	8·2	9·8
SSW	11·5	10·7	9·8	8·8	10·2
SW	10·3	12·4	11·7	11·2	11·5
WSW	15·3	17·3	14·8	13·5	15·2
W	19·1	18·6	16·2	15·7	17·4
WNW	13·3	13·6	13·5	12·4	13·3
NW	10·7	9·1	11·1	9·2	10·0
NNW	9·4	9·5	9·8	7·3	9·0

Aus diesen Tabellen ergibt sich, dass die Winde aus den Richtungen ESE bis SSW und die aus der N-Richtung sehr selten vorkommen und zugleich die kleinste mittlere Geschwindigkeit besitzen. Diese Erscheinung ist aus den topographischen Verhältnissen vollkommen erklärt. Diese Winde werden nämlich durch das in nächster Nähe sich erhebende Terrain und durch die hinter demselben emporragenden Berge der Alpen theilweise abgelenkt oder ganz abgehalten, so dass sie in höheren Regionen über dem Orte hinwegziehen und nur aus der Richtung des Wolkenzuges erkenntlich sind. Wenn sie schon tiefer herabsteigen, so halten sie wenige Stunden an, sind aber dann lebhafter; darauf folgen gewöhnlich mehrere Stunden, die nahezu windstill sind, bis der Wind aus westlicher Richtung kräftiger einfällt. Da während dieser ruhigen Stunden das Windrad immer noch nach der früheren Richtung gewendet ist, erscheint die Häufigkeit größer, dafür wird aber die mittlere Geschwindigkeit kleiner als sie in Wirklichkeit während der eigentlichen Dauer des Windes ist. Diese Thatsache kommt in den Tabellen für die tägliche Periode der Windrichtungen besonders für die Winde aus SE und SSE zur Geltung, weil bei Aufstellung dieser Tabelle die Windwege unter 5 *km* in der Stunde als Calmen gezählt wurden. Es erscheinen demnach dort für diese beiden Windrichtungen größere mittlere Geschwindigkeiten, als bei den übrigen Windrichtungen vorkommen. Weiter erscheint aus dieser Tabelle, dass die Winde aus den Richtungen NE—E und SW—WNW am häufigsten sind und dass erstere im Frühling und Herbst, letztere im Winter und Sommer mehr hervortreten.

Unter allen Winden kommt dem W die größte Geschwindigkeit und auch die größte Häufigkeit zu, die nur im Frühling vom ENE übertroffen wird.

Die tägliche Periode des Windes ohne Rücksicht auf die Richtung desselben.

Die stündliche Periode der Luftbewegung in den einzelnen Monaten des Jahres erscheint in der Tabelle III im Anhange. Hier folgt dieselbe Periode für die vier Jahreszeiten und das Jahr in Centimetern pro Secunde. Da die rohen Werte leicht aus der Tabelle III gebildet werden können, wurden dieselben hier weggelassen, und es folgen sogleich die nach Bessels Formel

berechneten absoluten Werte, sowie die Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel. Die am Fuße dieser letzten Reihe stehenden Zahlen geben das Maß der Größe der täglichen Periode.

Winter: $338 + \overline{1}\cdot0850\, sin\, (153^\circ + 15x) + \overline{0}\cdot4707\, sin\, (240^\circ + 30x)$

Frühling: $382 + \overline{1}\cdot6777\, sin\, (218^\circ + 15x) + \overline{1}\cdot3719\, (79^\circ + 30x) + \overline{0}\cdot2745\, sin\, (84^\circ + 45x)$

Sommer: $343 + \overline{1}\cdot5448\, sin\, (192^\circ + 15x) + \overline{1}\cdot4452\, sin\, (85^\circ + 30x)$

Herbst: $330 + \overline{1}\cdot3925\, sin\, (177^\circ + 15x) + \overline{1}\cdot2165\, sin\, (99^\circ + 30x)$

Jahr: $384 + \overline{1}\cdot2964\, sin\, (201^\circ + 15x) + \overline{1}\cdot0207\, sin\, (88^\circ + 30x) + \overline{0}\cdot5051\, sin\, (231^\circ + 45x)$.

Die Zeit wurde von Mitternacht an gerechnet, d. h. es ist $x = 0$ für $12^h\, {}^{1}\!/_{2}{}^h$ a. m., und die überstrichenen Coëfficienten sind Logarithmen. Beim Frühling und beim Jahresmittel wurde auch das 3. Glied noch berechnet.

Täglicher Gang der Windesgeschwindigkeit.
(Centimeter pro Secunde.)

Stunde	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
a. m.										
12—1	341	378	365	340	355	+3	−4	−20	+10	+7
1—2	338	368	352	329	347	0	−14	−9	−1	−1
2—3	337	354	335	320	338	−1	−28	−8	−10	−10
3—4	333	338	316	313	330	−5	−44	−27	−17	−18
4—5	331	326	298	307	323	−7	−56	−45	−23	−25
5—6	330	319*	285	300	318	−8	−63	−58	−30	−30
6—7	329	321	281*	296	316*	−9	−61	−62	−36	−32
7—8	329	332	287	291*	317	−9	−50	−56	−39	−31
8—9	328	350	303	294	325	−10	−32	−42	−36	−23
9—10	328*	373	322	305	336	−10	−9	−21	−25	−12
10—11	328	[illegible]	[illegible]	322	[illegible]	[illegible]	−24	[illegible]	−8	+2
11—12	329	417	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−9	−35	−21	−9	+16
p. m.										
12—1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−7	−5	[illegible]	−22	+35
1—2	[illegible]	441	374	357	379	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−27	+30
2—3	336	441	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−2	[illegible]	[illegible]	−22	+27
3—4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−2	[illegible]	−32	−22	+19
4—5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−7	[illegible]	[illegible]	−2	+9
5—6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−25	[illegible]	[illegible]	+8
6—7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−3	0
7—8	352	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−24	−2
8—9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−24	−6
9—10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	320	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−30	−11
10—11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	361	[illegible]	[illegible]	[illegible]	−29	−13
11—12	[illegible]	[illegible]	365	[illegible]	[illegible]	−7	[illegible]	[illegible]	−22	−11
Mittel	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15·2

Man findet im Jahresmittel zwei Maxima und zwei Minima. Das Hauptmaximum fällt auf $1^1/_2{}^h$ p. m., das Hauptminimum auf $6^1/_2{}^h$ p. m., das secundäre Maximum tritt um $10^1/_2{}^h$ p. m. und das secundäre Minimum um $6^1/_2{}^h$ p. m. ein. Ebenso erscheinen im Sommer und Herbst deutlich zwei Maxima und zwei Minima, im Frühling ist das secundäre Maximum kaum merkbar, im Winter gibt es nur ein Maximum und ein Minimum, die beide bedeutend später eintreten als in den übrigen Jahreszeiten. Im Herbste ist das zweite Maximum abends größer als das erste nach Mittag. Es ist bemerkenswert, dass schon A. Reslhuber aus den nach der vierstufigen Scala geschätzten Windstärken, die während der Jahre 1845—1854 alle zwei Stunden beobachtet wurden, das Maximum zu Mittag erkannte. Derselbe gibt in den „Beiträgen zur Klimatologie von Oberösterreich“, Linz 1855, für das Jahr folgende Mittelwerte der Windstärke:

4^h a. m.	6^h	8^h	10^h	12 Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h
0·38	0·49	0·62	0·68	0·76	0·79	0·70	0·53	0·50

aus welchen deutlich das Maximum der Windstärke zwischen 12^h und 2^h p. m. hervortritt. Die Windgeschwindigkeit bleibt im Sommer nur 8 Stunden (von 2^h—10^h a. m.), im Frühling 10, im Herbst 11 und im Winter 13 Stunden unter dem Tagesmittel.

Die tägliche Periode der Windrichtung.

Die Tabellen IV und V im Anhange enthalten die von 8 Windrichtungen während jeder Stunde des Tages innerhalb zehn Jahren zurückgelegten Wege in Kilometern. Es sind nämlich je zwei der 16 durch den Typendruck-Autographen aufgezeichneten Windrichtungen in eine Gruppe zusammengestellt worden, und zwar 1. N und NNE; 2. NE und ENE; 3. E und ESE; 4. SE und SSE; 5. S und SSW; 6. SW und WSW; 7. W. und WNW; 8. NW und NNW. Diese Zusammenstellung entspricht den localen Verhältnissen, indem zwei so zusammengestellte Windrichtungen häufig untereinander wechseln und denselben Charakter haben. In diese Wegsummen sind die Windwege unter 5 *km* pro Stunde nicht einbezogen, da die Richtung so schwacher Winde unsicher ist, weil das Windrad durch dieselben nicht gedreht wird. Die Fahne, welche sich auf der Zinne der Sternwarte befindet, ist empfindlicher und zeigt z. B. bei einer Drehung des Windes gegen Osten häufig schon die neue Richtung an, während

das Windrad noch die frühere Richtung beibehält. Aus diesen Tabellen ist für jede Jahreszeit und für das Jahr der tägliche Gang der vier Componenten, der West- und Süd-Resultante, sowie der mittleren Windrichtung und der Resultierenden abgeleitet worden. Um die tägliche Periode dieser Größen genauer darzustellen, wurde auch die Bessel'sche Formel angewendet.

W-Resultante: $1370{\cdot}5 + \overline{2{\cdot}7761}\ sin\ (56^{0}{\cdot}0 + 15x) + \overline{2{\cdot}0978}\ sin\ (145^{0}{\cdot}5 + 30x) + \overline{1{\cdot}8821}\ sin\ (225^{0}{\cdot}1 + 45x)$

S-Resultante: $179{\cdot}1 + \overline{2{\cdot}7989}\ sin\ (71^{0}{\cdot}6 + 15x) + \overline{2{\cdot}0266}\ sin\ (202^{0}{\cdot}3 + 30x) + \overline{1{\cdot}5689}\ sin\ (223^{0}{\cdot}9 + 45x)$.

Täglicher Gang der mittleren Windrichtung.
(Kilometer pro Stunde.)

Stunde	Resultanten nach der Beobachtung				Berechnet			
	W	S	φ	R	W	S	φ	R
a. m.								
12—1	1890	705	W 20⁰·5 S	2017	1883	710	W 20⁰·7 S	2107
1—2	1849	671	19·9	1967	1869	686	20·2	1993
2—3	1870	679	20·0	1989	1859	664	19·7	1974
3—4	1868	659	19·4	1981	1854	643	19·1	1962
4—5	1809	595	18·2	1904	1826	610	18·5	1925
5—6	1801	563	17·3	1887	1783	548	17·1	1865
6—7	1707	419	13·8	1758	1687	445	14·8	1745
7—8	1560	318	11·5	1592	1555	301	10·9	1582
8—9	1436	103	4·1	1440	1412	132	5·7	1418
9—10	1248	5	0·2	1243	1284	— 43	W 1·9 N	1285
10—11	1165	—224	W 10·9 N	1186	1180	—201	9·7	1197
11—12	1106	—328	16·5	1154	1092	—332	16·9	1141
p. m.								
12—1	1016	—433	23·1	1105	1001	—433	23·6	1091
1—2	917	—509	29·0	1049	892	—496	29·1	1021
2—3	732	—521*	35·4	899	775	—516*	33·7	931
3—4	633*	—456	35·8	780	681	—481	35·2	834
4—5	694	—387	29·2	795	655*	—382	30·2	758*
5—6	708	—233	18·2	745*	730	—218	16·6	762
6—7	951	30	W 1·8 S	952	912	— 6	0·4	912
7—8	1171	180	8·7	1185	1166	226	W 11·0 S	1188
8—9	1421	423	16·6	1483	1437	437	16·9	1502
9—10	1636	653	21·8	1761	1664	596	19·7	1767
10—11	1802	678	20·6	1925	1811	689	20·8	1938
11—12	1903	709	20·4	2031	1875	719	21·0	2008
Mittel	1370	179	W 7⁰·6 S	1451	1370	179	W 7⁰·6 S	1451

Beide Resultanten zeigen eine auffallende tägl[illegible]
Die W-Resultante erreicht das Maximum zwisch[illegible]

a. m., das Minimum zwischen 4^h und 5^h p. m. Fast zur selben Zeit erreicht auch die S-Resultante das Maximum, nämlich zwischen 11^h—12^h p. m. Diese geht um 9^h a. m. in eine N-Resultante über, die zwischen 2^h und 3^h p. m. das Maximum erreicht und bis 7^h p. m. anhält. Dieses Maximum bleibt aber etwas hinter dem der S-Resultante zurück.

Die mittlere Ordinate der täglichen Störungscurve beträgt nach J. Hann (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien 1879, Heft I, pag. 28) bei der W-Resultante 392·5, bei der S-Resultante 412·0. Die specifische Größe des Effectes der die tägliche Periode erzeugenden Kraft wird bei der W-Resultante dargestellt durch den Quotienten 0·2865, bei der S-Resultante durch 2·3017; die Ursache, welche die tägliche Periode erzeugt, hat demnach auf die S-Resultante einen 8·03mal größeren Einfluss als auf die W-Resultante. Die mittlere Windrichtung (W 7°·6 S) dreht sich während 24 Stunden um 56°·2, von W 21°·0 S um Mitternacht, wo sie sich am stärksten nach Süden wendet, bis W 35°·2 N um 3^h p. m., wo sie die größte nördliche Abweichung erfährt. Die Resultierende erreicht ihren größten Wert zwischen 12^h und 1^h nachts, nimmt mit der Drehung der mittleren Windrichtung gegen N ab und kommt zwischen 4^h und 5^h p. m. auf das Minimum. Das Verhältnis zwischen dem Maximum und Minimum ist bei der Resultierenden 2·78, bei der W-Componente 2·87, bei der S-Componente — 1·39.

Betrachten wir jetzt den täglichen Gang der vier Componenten des Jahres. Es folgen zuerst die einfachen Mittelwerte und dann die nach der Bessel'schen Formel berechneten Werte sowie die Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel.

Täglicher Gang der Wind-Componenten im Jahre.
(Kilometer.)

Stunde	N	E	S	W
a. m.				
12—1	644	811	1349	2701
1—2	598	806	1269	2655
2—3	549	755	1228	2625
3—4	528	728	1187	2596
4—5	512	705	1107	2514
5—6	511	702*	1074	2503
6—7	502*	706	921	2413
7—8	519	785	837	2345
8—9	670	940	773	2376
9—10	776	1105	781	2353
10—11	943	1224	719	2389
11—12	1035	1318	707	2424
p. m.				
12—1	1116	1413	683	2429
1—2	1159	1500	650*	2417
2—3	1225	1541	*704	2273
3—4	**1229**	**1598**	773	2231
4—5	1198	1551	811	2245
5—6	1117	1470	884	2178*
6—7	969	1298	999	2249
7—8	907	1187	1087	2358
8—9	813	1118	1236	2539
9—10	773	1019	**1426**	2655
10—11	710	937	1388	2739
11—12	654	866	1363	**2769**
Max. : Min.	2·45	2·28	2·20	1·27

Jahresgleichungen für den täglichen Gang.

N-Componente: $819\cdot0 + \overline{2\cdot5413}\ \sin\,(225^\circ\cdot8 + 15x) + \overline{1\cdot9098}\ \sin\,(49^\circ\cdot8 + 30x) + \overline{0\cdot9979}\ \sin\,(28^\circ\cdot4 + 45x)$

E-Componente: $1086\cdot8 + \overline{2\cdot6291}\ \sin\,(227^\circ\cdot1 + 15x) + \overline{1\cdot8654}\ \sin\,(42^\circ\cdot2 + 30x) + \overline{1\cdot3560}\ \sin\,(44^\circ\cdot4 + 45x)$

S-Componente: $998\cdot2 + \overline{2\cdot5446}\ \sin\,(97^\circ\cdot2 + 15x) + \overline{1\cdot6963}\ \sin\,(154^\circ\cdot1 + 30x) + \overline{1\cdot4334}\ \sin\,(229^\circ\cdot0 + 45x)$

W-Componente: $2457\cdot3 + \overline{2\cdot2809}\ \sin\,(75^\circ\cdot4 + 15x) + \overline{2\cdot1038}\ .\ \sin\,(112^\circ\cdot6 + 30x) + \overline{1\cdot7116}\ \sin\,(227^\circ\cdot9 + 45x).$

Täglicher Gang der Wind-Componenten.

(Berechnet nach Bessels Formel.)

Stunde	N	E	S	W	N	E	S	W
a. m.								
12—1	636	840	1347	2727	—183	—247	349	270
1—2	605	803	1292	2667	—214	—284	294	210
2—3	567	760	1232	2604	—252	—327	234	147
3—4	527	716	1170	2546	—292	—371	172	89
4—5	495	687*	1106	2489	—324	—400	108	32
5—6	483*	688	1032	2431	—336	—399	34	— 26
6—7	506	732	949	2373	—313	—355	— 49	— 84
7—8	567	818	868	2325	—252	—269	—130	—132
8—9	662	936	795	2306	—157	—151	—203	—151
9—10	781	1071	738	2323	— 38	— 16	—260	—134
10—11	909	1206	707	2333	90	119	—291	—124
11—12	1028	1329	695	2402	209	242	—303	— 55
p. m.								
12—1	1126	1432	693*	**2422**	307	345	—305	— 35
1—2	1193	1511	698	2401	374	424	—300	— 56
2—3	**1224**	1558	709	2341	405	471	—289	—116
3—4	1216	**1566**	737	2270	397	479	—261	—187
4—5	1172	1532	792	2224*	353	445	—206	—233
5—6	1099	1455	882	2232	280	368	—116	—225
6—7	1008	1343	1003	2307	189	256	5	—150
7—8	911	1216	1136	2434	92	129	138	— 23
8—9	823	1094	1258	2576	4	7	260	119
9—10	752	994	1347	2694	— 67	— 93	349	237
10—11	701	923	**1389**	**2784**	—118	—164	391	327
11—12	665	876	1385	2764	—154	—211	387	307
Mittel	819·0	1086·8	998·2	2457·3	225·0	273·8	226·4	144·6

Die vorausgehenden Tabellen lehren, dass die Winde aus nördlicher und östlicher Richtung aufsteigende Winde, Tagwinde sind. Die N- und E-Componente überschreitet nach 9^h a. m. den Mittelwert und sinkt erst um 9^h p. m. wieder unter denselben herab. Die N-Componente erreicht das Maximum zwischen 2^h und 3^h p. m., die E-Componente bald nach 3^h p. m., beide also um die Zeit des Temperatur-Maximums. Ebenso tritt um die Zeit des Temperatur-Minimums, nämlich zwischen 5^h und 6^h a. m., bei beiden Componenten das Minimum ein. Die S-Componente hingegen sinkt unter ihren Mittelwert um 6^h a. m. und bleibt bis 6^h p. m. unter demselben, das Minimum tritt um 12^h mittags

ein, das Maximum um 11^h p. m.; sie ist daher ein Nachtwind. Auch die W-Componente erreicht um 11^h p. m. den größten Wert und hält sich von 8^h p. m. bis 5^h a. m. über dem Mittel, doch erscheint bei derselben ein secundäres Maximum um 12^h p. m., das wohl den Mittelwert nicht erreicht; deshalb ist die Periode bei dieser Componente nicht so ausgeprägt wie bei den drei übrigen; dieselbe wird hauptsächlich durch den Einfluss der Winde aus WSW und SW hervorgerufen.

Aus obiger Tabelle ergibt sich:

	N	E	S	W
Maximum : Minimum:	2·53	2·28	2·00	1·25
Größe der täglichen Periode:	225·0	273·8	226·4	144·3
Relative Größe der Periode:	0·275	0·252	0·227	0·059

Der Quotient, welcher die relative Größe der Periode bestimmt, hat bei der W-Componente den kleinsten Wert und ist bei der S-Componente 3·8mal, bei der E-Componente 4·3mal und bei der N-Componente 4·7mal größer. Durch das starke Hervortreten des N- und E-Windes während des Tages ist auch die Abnahme der W- und S-Resultante während dieser Zeit erklärt; diese Abnahme ist bei der S-Resultante so bedeutend, dass sie während des stärker hervortretenden N-Windes in eine N-Resultante übergeht.

Untersuchen wir nun die tägliche Periode der vier Componenten in den einzelnen Jahreszeiten. Zu diesem Zwecke folgen für jede Componente die Tagesmittel und die Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel, berechnet nach der Bessel'schen Formel, ferner die Süd- und West-Resultante und die mittlere Windrichtung für jede Stunde.

Gleichungen für den täglichen Gang in den vier Jahreszeiten.

A. Winter.

N-Componente: $181\cdot0 + \overline{1\cdot7114}\ sin\ (192^{0} + 15x) + 0\cdot7445\ sin\ (172^{0} + 30x)$

E-Componente: $272\cdot9 + \overline{1\cdot7693}\ sin\ (208^{0} + 15x) + \overline{1\cdot0104}\ sin\ (24^{0} + 30x)$

S-Componente: $207\cdot6 + \overline{1\cdot5992}\ sin\ (83^{0} + 15x) + 1\cdot2714\ sin\ (224^{0} + 30x)$

W-Componente: $606\cdot3 + \overline{1\cdot6962}\ sin\ (58^{0} + 15x) + \overline{1\cdot2920}\ sin\ (209^{0} + 30x)$

Stunde	N	E	S	W	S-R	W-R	φ
a. m.							
12—1	—10	—24	26	32	63	390	W 9°·2 S
1—2	—26	—32	21	31	74	396	· 10·6
2—3	—39	—40	19	30	84	403	11·8
3—4	—49	—47	18	31	94	412	12·9
4—5	—54	—58	19	34	99	420	13·3
5—6	—55*	—56*	20	36	100	426	13·2
6—7	—51	—56	18	36	96	425	12·7
7—8	—44	—51	13	32	83	416	11·3
8—9	—34	—41	3	22	67	390	9·7
9—10	—23	—26	—11	6	38	366	5·6
10—11	—11	— 8	—26	—13	11	328	1·9
11—12	1	13	— 41	—33	—16	288	W 3·2 N
p. m.							
12—1	12	32	—53	—51	—37	250	8·6
1—2	21	49	—58	—64	—52	220	13·3
2—3	30	60	—55	—69	—58*	204	15·9
3—4	38	66	—45	—66	—57	202*	15·8
4—5	43	65	—29	—54	—47	214	12·4
5—6	48	58	—11	—37	—32	238	7·7
6—7	50	48	8	—17	—16	268	3·4
7—8	48	35	23	2	2	301	W 0·4 S
8—9	43	21	33	17	17	330	2·9
9—10	34	8	38	28	31	353	5·0
10—11	21	— 4	37	33	42	370	6·5
11—12	6	—15	32	34	53	382	7·9
Mittel	181·0	272·9	207·6	606·3	26·6	330·0	W 4°·6 S

B. Frühling.

N-Componente: $292{\cdot}5 + \overline{2{\cdot}0981}\ sin\ (230^\circ + 15x) + \overline{1{\cdot}4812}\ sin\ (62^\circ + 30x)$

E-Componente: $373{\cdot}6 + \overline{2{\cdot}2116}\ sin\ (228^\circ + 15x) + \overline{1{\cdot}2544}\ sin\ (44^\circ + 30x)$

S-Componente: $259{\cdot}5 + 1{\cdot}960\overline{7}\ sin\ (102^\circ + 15x) + \overline{1}{\cdot}2132\ sin\ (119^\circ + 30x)$

W-Componente: $590{\cdot}8 + \overline{1{\cdot}5947}\ sin\ (44^\circ + 15x) + \overline{1{\cdot}5191}\ sin\ (97^\circ + 30x)$

Stunde	N	E	S	W	S-R	W-R	φ
a. m.							
12—1	— 69	—109	104	60	140	386	W 19°·9 S
1—2	— 83	—128	90	60	140	405	19·1
2—3	— 98	—142	68	52	133	411	17·9
3—4	—111	—150	42	35	119	402	16·5
4—5	—119*	—150*	14	18	100	385	14·6
5—6	—119	—141	—12	4	74	363	11·5
6—7	—107	—122	—33	— 4	41	334	7·0
7—8	— 83	— 91	—50	— 6	0	303	0·0
8—9	— 48	— 51	—61	— 2	— 47	267	W 10·0 N
9—10	— 3	— 4	—69	5	— 98	227	23·4
10—11	44	45	—73	11	—150	182	39·5
11—12	88	93	—74	11	—195	105	61·7
p. m.							
12—1	123	134	—75*	6	—231	89	69·0
1—2	144	162	—73	— 8	—250	48	79·1
2—3	149	177	—70	—25	—252*	16	86·3
3—4	139	175	—58	—43	—230	— 1*	N 0·3 E
4—5	117	160	—42	—58	—192	0	W 90·0 N
5—6	87	132	—21	—65*	—138	20	81·8
6—7	54	97	5	—61	— 82	60	53·8
7—8	23	57	33	—47	— 22	114	10·9
8—9	— 4	16	61	—24	31	177	W 9·9 S
9—10	— 25	— 21	85	3	77	242	17·6
10—11	— 42	— 55	101	29	109	302	19·9
11—12	— 56	— 84	108	49	130	351	20·4
Mittel	292·5	373·6	259·5	590·8	— 33·0	220·3	W 8°·5 N

C. Sommer.

N-Componente: $157{\cdot}8 + \overline{2{\cdot}0467}\ sin\ (238^0 + 15x) + \overline{1{\cdot}4545}\ sin\ (47^0 + 30x)$

E-Componente: $159{\cdot}8 + \overline{2{\cdot}0552}\ sin\ (232^0 + 15x) + \overline{1{\cdot}3595}\ sin\ (39^0 + 30x)$

S-Componente: $306{\cdot}3 + \overline{2{\cdot}1359}\ sin\ (103^0 + 15x) + \overline{1{\cdot}4569}\ sin\ (118^0 + 30x)$

W-Componente: $703{\cdot}7 + \overline{1{\cdot}6661}\ sin\ (96^0 + 15x) + \overline{1{\cdot}7476}\ sin\ (99^0 + 30x)$

Stunde	N	E	S	W	S-R	W-R	φ
a. m.							
12—1	—73	—74	159	87	**385**	706	**W28°·6** S
1—2	—78	—83	140	63	366	690	28·0
2—3	—85	—90	101	38	333	672	26·3
3—4	—89	—95	59	17	296	656	24·3
4—5	—92*	—97*	16	— 2	256	639	21·8
5—6	—90	—94	— 24	—21	214	627	18·9
6—7	—81	—84	— 56	—41	173	587	16·4
7—8	—61	—63	— 83	—57	126	550	12·9
8—9	—32	—38	— 94	—62	86	520	9·4
9—10	5	— 4	—103	—51	40	497	4·6
10—11	46	34	—107	—26	— 5	494	W 0·6 N
11—12	84	72	—108*	3	—44	475	5·3
p. m.							
12—1	115	104	—108	23	—75	463	9·2
1—2	134	126	—101	24	—87	442	11·1
2—3	**138**	**136**	— 99	2	—90*	411	**12·4**
3—4	128	130	— 86	—35	—66	379	9·9
4—5	105	114	— 64	—69	—21	361*	3·3
5—6	73	89	— 33	—83*	42	374	W 6·4 S
6—7	39	46	6	—70	115	424	15·3
7—8	5	23	45	—30	188	491	21·0
8—9	—22	— 7	92	22	262	573	24·6
9—10	—44	—32	129	69	321	645	26·5
10—11	—58	—51	155	98	361	692	27·6
11—12	—67	—61	**164**	**101**	380	**709**	28·2
Mittel	157·8	159·8	306·3	703·7	148·2	544·8	W 15°·2 S

D. Herbst.

N-Componente: $187 \cdot 3 + 1 \cdot 8581 \sin (223^\circ + 15x) + \overline{1 \cdot 1720} \sin (53^\circ + 30x)$

E-Componente: $281 \cdot 5 + 1 \cdot 9844 \sin (231^\circ + 15x) + \overline{1 \cdot 3667} \sin (49^\circ + 30x)$

S-Componente: $213 \cdot 0 + 1 \cdot 9825 \sin (90^\circ + 15x) + \overline{0 \cdot 9859} \sin (169^\circ + 30x)$

W-Componente: $[illegible] \cdot 2 + 1 \cdot 8407 \sin (93^\circ + 15x) + \overline{1 \cdot 5934} \sin (128^\circ + 30x)$

Stunde	N	E	S	W	S-E	W-E	φ
h m							
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15[illegible]	418	W 19·7 S
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	152	402	20·7
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	544	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	W [illegible] N
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]							
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
[illegible]			[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]

Aus diesen Tabellen ist zu ersehen, dass der tägliche Gang der vier Wind-Componenten in allen vier Jahreszeiten nahezu der gleiche ist. Die Winde aus nördlicher, östlicher und südlicher Richtung haben eine ausgeprägte Periode, und zwar sind die aus N und E — Tagwinde, die aus S — Nachtwinde. Die W-Componente hat im Frühling und Sommer zwei Maxima, das Hauptmaximum um Mitternacht; ein secundäres Maximum, das auch den Mittelwert überschreitet, um Mittag. Im Herbst tritt dieses secundäre Maximum nur schwach hervor, im Winter gibt es zwei fast gleiche Maxima um 6^h a. m. und um 11^h p. m. Die Nord- und E-Componenten erreichen im Frühling, Sommer und Herbst um dieselbe Zeit ($2-3^h$ p. m.) ihren größten Wert; im Winter verspätet sich der Eintritt des Maximums bei beiden Componenten, am meisten bei der N-Componente (um $6^1/_2{}^h$ p. m.). Die S-Componente erreicht das Maximum um Mitternacht, nur im Winter um zwei Stunden früher; das Minimum tritt im Frühling und Sommer mittags, im Herbst und Winter um eine Stunde später ein. In allen Jahreszeiten mit Ausnahme des Winters überschreiten die Stundenmittel bei allen Componenten fast zur selben Zeit das Tagesmittel und bleiben 10—12 Stunden über demselben; im Winter sinken die Stundenmittel der S- und W-Componente erst um 9^h a. m. unter das Tagesmittel, dafür überschreitet auch die N- und E-Componente erst um 11^h a. m. den Mittelwert.

Größe der täglichen Amplitude.

	N	E	S	W
Winter:	33·0	37·8	27·4	33·7
Frühling:	80·7	104·0	59·3	28·6
Sommer:	72·4	72·8	88·8	45·6
Herbst:	46·2	62·6	54·3	49·7

Relative Größe der täglichen Periode.

	N	E	S	W
Winter:	0·182	0·138	0·132	0·056
Frühling:	0·276	0·278	0·228	0·048
Sommer:	0·407	0·456	0·290	0·065
Herbst:	0·247	0·222	0·255	0·089

Die E-Componente hat unter allen vier Componenten im Frühling, Herbst und Winter die größte Amplitude, im Sommer wird sie von der S-Componente übertroffen.

Die relative Größe der Periode ist bei allen Componenten im Winter am kleinsten und im Sommer 2—3mal so groß als im Winter; nur bei der W-Componente sind die Unterschiede nicht bedeutend.

Die mittlere Windrichtung weicht im Frühling wegen des bedeutenden Hervortretens der N- und E-Winde am stärksten gegen Norden ab und wird zwischen 3—5 ^h^ p. m. geradezu nördlich, sie dreht sich im Laufe des ganzen Tages um 110°·7. Auch im Herbst ist die Amplitude ziemlich groß und beträgt 75°·2. Im Sommer wendet sich die mittlere Windrichtung am meisten gegen S, im Winter ist die Abweichung nach N und S fast gleich groß und die Amplitude 29°·2 am kleinsten.

Häufigkeit der verschiedenen Windgruppen.

In den Tabellen VI und VII im Anhange ist die Häufigkeit von [illegible] Windgruppen für [illegible] Jahre zusammengestellt. In denselben sind die Winde, deren Weg unter 5 *km* per Stunde beträgt, nicht gezählt. Aus diesen Tabellen ergibt sich, dass die Winde aus dem nördlichen und östlichen Quadranten in allen Jahreszeiten zwischen 2 [illegible] und 4 [illegible] [illegible] das Maximum ihrer Frequenz erreichen und zwischen 4 [illegible] und [illegible] am seltensten vorkommen. Hingegen sind die Winde zwischen S und WSW am [illegible] am häufigsten, [illegible] am kleinsten. Die Winde aus W und [illegible] haben zwei [illegible] Maxima der Häufigkeit [illegible] das zweite [illegible] und [illegible] ist die geringe [illegible] der Winde aus den [illegible] SE und SSE. Diese [illegible]

[illegible] Gang der Windgeschwindigkeit.

[illegible] Windrichtungen [illegible] im [illegible] Winden.

Fassen wir die Ergebnisse dieser Untersuchungen über die tägliche Periode der Geschwindigkeit und Richtung des Windes in Kremsmünster zusammen, so erfahren wir:

1. Das Maximum der absoluten Luftbewegung tritt auch hier wie an anderen Orten um Mittag ein; nur im Winter, wo die tägliche Periode der Luftbewegung eine sehr kleine Amplitude hat, verspätet sich der Eintritt des Maximums bis 8^h p. m. Auch die einzelnen Windrichtungen nehmen gegen Mittag an Intensität zu, so dass bei allen Windrichtungen die mittlere Geschwindigkeit um diese Zeit die größten Werte erreicht. In diesen beiden Punkten stimmen die Beobachtungen in Kremsmünster mit denen vieler anderer Orte überein.

2. Infolge localer Verhältnisse kommen hier einzelne Windrichtungen nur ausnahmsweise vor, ebenso wird die tägliche Periode derselben durch die localen Verhältnisse beeinflusst. Die an anderen Orten nachgewiesene Drehung des Windes mit der Sonne von Osten über Süden nach Westen lässt sich aus diesen Untersuchungen nicht ableiten; es macht sich vielmehr die Nähe des Gebirges geltend, so dass man eher Berg- und Thalwinde unterscheiden könnte.

Die Winde aus dem nördlichen und östlichen Quadranten wehen vom ebenen Lande her und sind aufsteigende, Tagwinde. Bei denselben erheben sich gleichzeitig die Stundenmittel um 10^h a. m. über das Tagesmittel und sinken, nachdem sie nach Mittag den größten Wert erreicht haben, gegen 8^h p. m. wieder unter dasselbe herab. Von SE bis SW ist der Horizont des Ortes, wie anfangs erwähnt wurde, durch die Alpen abgeschlossen. Die Vorberge rücken in SE und S ganz nahe an den Beobachtungsort heran und ragen sogar über denselben empor. Dadurch werden die Winde aus SE und S vom Beobachtungsort fast ganz abgehalten und steigen nur ausnahmsweise für kurze Zeit zu demselben herab. Gegen SSW öffnet sich das Kremsthal und von dieser Richtung bis gegen W hin haben die Winde vom Gebirge her ungehinderten Zutritt. Bei ruhigem Wetter kommen die Winde aus SW und WSW gegen 8^h p. m. zur Geltung, erreichen um Mitternacht das Maximum ihrer Häufigkeit und sinken zwischen 5^h und 6^h a. m. wieder unter ihren Mittelwert. In den Sommermonaten bilden sich in den späten Nachmittagsstunden gegen das Gebirge zu nicht selten locale Gewitter mit Niederschlägen, die dann auch wegen der dadurch entstandenen Abkühlung eine

lebhaftere Bewegung der Luft von diesen Gegenden her zur Folge haben. Von 5—8^h a. m. ist die Luft am ruhigsten, unter normalen Verhältnissen herrscht gewöhnlich vollkommene Windstille, bis sich mit zunehmender Erwärmung die Winde aus östlicher Richtung einstellen. Auch gegen W und WNW ist der Ort in unmittelbarer Nähe durch einen Höhenrücken abgeschlossen, hinter welchem sich aber wieder eine freie Ebene ausbreitet. Dadurch werden die Winde aus diesen Richtungen nicht abgehalten; wenn sie auch etwas abgeschwächt werden, so übertreffen sie dennoch die Winde aus allen anderen Richtungen an Intensität und Häufigkeit. Bei diesen beiden Richtungen ist eine Periode am wenigsten ausgeprägt, sie sind zugleich Tag- und Nachtwinde.

Anhang.

Tabelle I.

Windwege in Kilometern

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Summe
December	429	448	2879	7877	8633	372	87	75	240	810	8114	18146	32860	8513	2351	326	92160
Jänner ...	93	800	6620	11156	10511	1012	315	119	381	1917	9061	9975	21449	8050	2030	397	83886
Februar ..	684	1627	4705	17205	10099	654	141	197	680	1768	7903	10570	21264	6527	2169	373	86566
März.....	819	1612	7097	18851	11531	982	577	406	477	1652	6828	19311	27003	9709	2162	837	109854
April	898	1892	9295	22036	10839	1025	1292	530	892	1703	5653	14107	15607	5567	2637	853	94826
Mai......	1222	2093	7099	16345	7858	1062	1184	443	880	3009	10121	18624	16489	8357	3422	707	98910
Juni	697	1138	5776	9165	4794	508	665	497	993	2880	8954	19063	19633	9209	5149	1046	90167
Juli......	802	529	3014	8287	3812	365	468	138	1020	2378	13386	21221	22923	10901	3193	856	93293
August ...	480	609	3081	7220	4838	415	355	182	656	2430	10016	18462	25193	9937	3514	811	88199
September	262	739	5229	14672	4288	591	482	132	267	1562	7282	14238	19482	6730	2286	296	78538
October ..	499	633	5971	14455	9379	689	684	435	299	1127	5462	18403	22093	7130	2426	410	90095
November	159	331	4963	12036	13562	845	459	270	291	1732	8200	16794	22706	5298	975	87	88708
Jahr	7044	12451	65729	159305	100144	8520	6709	3424	7076	22968	100980	198914	266702	95928	32314	6994	1095202

Häufigkeit in Stunden

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calmen
December	64	78	353	885	573	83	25	21	24	82	818	1201	1690	590	202	24	727
Jänner ...	12	63	606	921	674	147	38	10	38	147	937	671	1268	701	219	55	933
Februar ..	75	173	481	1283	646	76	36	20	67	151	700	668	1004	462	193	51	706
März.....	111	185	450	1291	700	111	48	22	49	156	544	1019	1347	695	285	82	345
April	124	186	734	1739	588	153	115	56	72	168	490	855	840	392	238	103	347
Mai......	137	177	545	1153	535	90	110	65	94	262	778	1138	960	660	401	70	265
Juni	72	122	517	835	459	147	90	53	90	294	694	1157	1252	668	420	113	217
Juli......	92	71	332	825	244	94	81	20	99	257	1086	1392	1329	806	315	93	304
August ...	68	71	368	747	420	114	51	20	71	236	914	1295	1603	760	320	74	308
September	40	96	490	1393	422	65	58	8	37	168	666	1041	1350	541	240	34	551
October ..	76	84	541	1142	569	43	61	32	33	157	485	1401	1448	591	255	71	451
November	22	48	514	1174	757	93	62	35	35	174	709	1244	1314	418	115	12	474
Jahr	893	1354	5931	13388	6587	1216	775	362	709	2252	8821	13082	15405	7284	3203	782	5628

Tabelle II.

Mittlere Geschwindigkeit in Kilometern

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Mittel
December	6·7	5·7	8·2	8·9	15·1	4·5	3·5	3·6	10·0	9·9	9·9	16·1	19·4	14·4	11·6	13·8	12·4
Jänner ...	7·8	12·7	10·9	12·1	15·6	6·9	8·3	11·9	10·0	13·0	9·8	14·9	16·9	11·4	9·2	7·2	11·5
Februar ..	9·1	9·4	9·8	13·4	18·7	8·7	4·0	9·8	10·2	11·7	11·8	16·8	21·1	14·1	11·2	7·8	12·7
März	7·4	8·7	15·8	14·6	16·5	8·9	12·0	16·5	9·8	10·8	12·8	18·9	20·1	13·0	7·6	10·2	13·8
April......	7·3	10·2	12·7	12·7	18·5	6·6	11·1	9·5	12·4	10·1	11·8	16·5	18·6	14·2	11·1	9·3	13·2
Mai	8·9	11·8	13·6	14·2	14·7	11·8	10·8	6·8	9·4	11·5	13·0	16·4	17·2	12·7	8·5	10·0	13·3
Juni	9·7	9·3	11·2	10·9	10·4	3·5	7·3	9·4	11·0	9·8	13·9	16·5	15·7	13·8	12·2	9·2	12·5
Juli.......	8·7	7·4	9·1	10·0	15·6	4·0	5·8	6·9	10·3	9·2	11·4	15·2	17·3	13·5	10·1	9·2	12·5
August ...	7·1	8·6	8·4	9·7	11·5	3·6	7·0	9·1	9·2	10·3	10·9	12·8	15·7	13·1	11·0	11·0	11·2
September	6·5	7·7	10·7	10·2	10·1	9·1	8·3	16·6	7·2	9·8	11·0	13·7	14·4	12·4	9·6	8·7	10·2
October ..	6·6	7·5	11·0	12·7	16·8	16·0	11·2	13·6	9·1	7·2	11·3	13·1	15·8	12·1	9·6	9·8	12·1
November	7·2	6·9	9·6	10·2	17·9	9·1	7·4	8·0	8·3	9·9	11·4	16·6	17·8	12·7	8·6	7·8	12·3
Jahr	7·8	8·8	10·9	11·6	14·0	6·7	8·1	8·4	9·8	10·2	11·6	16·2	17·4	14·4	10·0	8·8	12·0

Stündliche Maxima der Geschwindigkeit in Metern per Secunde

	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
December	6·9	6·1	11·1	12·3	16·4	8·4	5·7	7·2	4·7	15·8	20·3	16·9	20·8[1]	17·5	13·6	9·6
Jänner ...	4·0	11·7	14·7	14·9	12·5	14·4	13·9	9·8	12·8	10·8	17·2	15·6	18·1	18·5	10·5	9·9
Februar ..	8·1	8·9	12·3	16·9	18·6	12·6	8·9	8·9	8·9	11·2	20·4	14·4	19·7	16·8	14·4	8·9
März......	8·2	11·5	14·7	13·2	15·1	12·3	15·0	12·8	14·7	10·9	16·6	16·7	18·8	16·8	10·9	10·9
April	7·0	11·1	14·2	15·1	17·8	14·2	12·9	10·4	8·9	9·8	11·4	18·8	14·7	16·7	11·1	7·7
Mai.......	8·9	10·4	13·4	12·5	13·3	11·2	8·9	7·9	10·0	11·0	14·9	16·6	17·0	16·9	10·9	11·9
Juni	7·9	8·6	11·7	11·9	10·0	9·7	6·7	7·6	8·9	10·6	12·6	15·9	16·4	11·1	10·7	8·4
Juli.......	7·6	8·3	8·9	9·7	9·6	8·1	7·3	9·0	9·2	10·0	14·8	16·8	16·9	16·7	16·1	8·7
August....	7·0	8·1	10·3	10·8	12·5	11·7	11·2	7·8	7·9	10·6	13·5	15·3	16·9	14·4	14·3	7·6
September	4·8	10·1	11·5	11·1	10·4	9·3	7·3	9·8	7·8	7·8	10·1	16·9	13·9	14·8	11·1	7·6
…ber ..	8·6	7·6	12·9	13·2	15·4	13·2	12·2	6·9	7·6	11·9	10·6	17·6	19·7	14·8	19·6	7·9
…ember	5·1	4·4	12·9	15·8	15·4	12·8	13·2	8·7	6·0	10·1	14·3	14·8	15·8	18·9	17·6	4·4

[1] Am 16. December 1894 von 6—7h a. m.

Tabelle III.

Täglicher Gang der mittleren Windgeschwindigkeit in Centimetern pro Secunde													
Mitternacht	December	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	Jahr
12—1	358	319	351	397	364	358	366	371	335	322	356	342	353
1—2	355	325	340	394	350	344	356	338	334	303	339	342	343
2—3	344	319	337	388	340	331	338	325	327	293	331	342	335
3—4	346	301	341	378	329	331	323	316	318	282	317	339	326
4—5	353	300	346	354	322	313	320	300	304	265	317	333	319
5—6	346	324	347	360	309	299	309	283	283	252	318	334	314
6—7	340	313	341	353	299	284	286	264	265	241	310	336	303
7—8	332	298	341	353	313	311	294	264	254	234	299	324	301*
8—9	343	300	342	363	362	344	337	296	283	246	313	325	321
9—10	330	293	351	380	394	350	352	311	323	274	330	318	334
10—11	327	286	346	412	421	368	367	349	350	299	344	324	349
11—12	325	292	356	432	444	376	368	359	358	316	359	346	361
12—1	330	306	371	444	455	393	379	362	363	334	365	355	371
1—2	343	312	384	445	457	404	889	376	368	338	356	357	377*
2—3	333	310	368	430	456	419	896	380	355	346	353	353	375
3—4	328	319	366	427	471	416	413	373	354	347	336	354	375
4—5	338	325	351	418	457	433	394	368	359	334	333	353	372
5—6	352	330	338	391	442	407	379	356	345	297	326	350	359
6—7	363	336	348	384	403	372	358	345	314	299	334	349	350*
7—8	360	347	376	400	386	356	340	343	316	319	352	354	354
8—9	358	351	371	404	390	357	345	373	342	348	368	361	364
9—10	351	331	372	412	398	360	366	389	363	365	377	852	370*
10—11	340	320	371	415	387	368	373	385	366	357	362	357	367
11—12	350	322	360	407	384	348	368	385	345	343	349	847	359
Mittel	343	316	354	398	389	360	355	342	330	306	339	344	348

Tabelle IV.

Stunde	N und NNE					NE und ENE					E und ESE					SE und SSE				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
a. m.																				
12—1	116	233	86	78	513	1978	2546	911	1872	7307	1012	940	247	760	2959	—	83	-	23	106
1—2	115	283	81	89	568	1917	2396	772	1530	6615	1090	800	340	1072	3302	—	45	—	48	93
2—3	117	209	71	93	490	1577	2274	795	1673	6319	1250	736	191	822	2999	—	45	—	47	92
3—4	77	103	65	111	356	1741	2079	716	1578	6114	1031	829	178	884	2922	—	19	—	42	61
4—5	94	136	63	71	364	1516	2050	603	1577	5746	1153	720	195	885	2953	—	15	—	20	35
5—6	112	194	67	75	448	1595	1973	542	1683	5793	1088	774	199	846	2907	—	8	—	17	25
6—7	106	125	85	85	401	1717	1936	498	1536	5687	940	902	257	919	3018	—	—	—	56	56
7—8	107	72	80	64	323	1437	2328	734	1509	6008	1173	1119	321	942	3555	—	21	—	86	107
8—9	114	242	97	76	529	1545	2796	1264	1919	7524	1198	1318	449	1013	3978	—	59	17	65	141
9—10	112	233	101	85	531	1683	3348	1559	2111	8701	1215	1592	614	1331	4752	—	86	37	88	211
10—11	113	358	173	79	723	1846	3952	2126	2385	10309	1380	1543	543	1279	4745	67	81	30	99	277
11—12	113	504	246	183	1046	2034	4185	2184	2472	10875	1446	1402	682	1693	5223	53	254	90	98	495
p. m.																				
12—1	135	419	209	169	932	2291	4437	2259	2730	11717	1354	1542	835	1749	5480	51	293	86	125	555
1—2	161	489	246	171	1067	2371	4163	2399	2914	11847	1519	1967	923	1795	6204	57	334	107	132	630
2—3	240	550	395	237	1422	2435	4397	2377	3099	12308	1589	2032	971	1726	6318	58	263	154	149	624
3—4	188	629	316	128	1261	2756	4395	2322	3375	12848	1493	2179	1149	1602	6423	54	312	191	139	696
4—5	274	618	262	112	1266	2597	4390	2406	3202	12595	1439	2233	981	1416	6069	43	396	241	138	818
5—6	276	420	281	121	1098	2706	4106	2255	2957	12024	1317	2117	1102	1245	5781	38	313	122	145	618
6—7	233	321	291	68	913	2392	3849	1626	2564	10431	1484	1632	879	1157	5152	30	310	179	144	663
7—8	212	386	293	67	958	2532	3489	1299	2635	9955	1312	1480	617	1043	4452	35	269	153	107	564
8—9	189	328	122	35	674	2358	3334	1133	2454	9279	1311	1263	605	1088	4267	55	218	100	113	486
9—10	123	296	127	46	592	2178	3151	1128	2361	8818	1270	1131	378	937	3716	48	126	46	113	333
10—11	131	222	118	42	513	2260	2816	1095	2103	8274	1080	1095	294	925	3394	38	77	42	97	254
11—12	140	176	89	57	462	2060	2578	979	2001	7618	1061	1008	283	807	3159	30	120	—	69	219
Summe	3598	7546	3964	2342	17450	49522	76968	33982	54240	214712	30205	32353	13233	27936	103728	657	3747	1595	2160	8179
Mittel	150	314	165	95	727	2063	3207	1416	2260	8946	1258	1348	551	1164	4322	27	156	67	90	341

Windweg in Kilometern

Tabelle V.

Stunde	S und SSW Winter	S und SSW Früh-ling	S und SSW Sommer	S und SSW Herbst	S und SSW Jahr	SW und WSW Winter	SW und WSW Früh-ling	SW und WSW Sommer	SW und WSW Herbst	SW und WSW Jahr	W und WNW Winter	W und WNW Früh-ling	W und WNW Sommer	W und WNW Herbst	W und WNW Jahr	NW und NNW Winter	NW und NNW Früh-ling	NW und NNW Sommer	NW und NNW Herbst	NW und NNW Jahr
Windweg in Kilometern																				
a. m.																				
12—1	336	533	865	424	2158	2725	4191	5287	3710	15913	4231	3287	3839	3644	15001	326	200	244	103	873
1—2	467	498	590	352	1907	2715	3840	4973	3601	15129	4278	3506	3843	3535	15162	190	223	276	148	837
2—3	342	424	505	321	1592	2669	3969	4664	3704	15006	4317	3496	3929	3366	15108	197	227	236	88	748
3—4	338	400	440	381	1559	2846	3614	4609	3465	14534	4078	3621	3860	3192	14751	203	228	276	89	796
4—5	351	370	429	343	1493	2568	3556	4231	3228	13583	4458	3212	4035	3198	14903	258	259	246	96	859
5—6	265	253	285	300	1103	2763	5618	4146	3126	13653	4599	3085	3818	3342	14844	171	229	269	43	712
6—7	316	139	295	293	1043	2913	2897	2988	2755	11553	4252	3601	4038	3470	15361	225	197	275	36	733
7—8	258	84	117	266	725	2711	2649	2798	2541	10699	4183	3888	3904	3318	15293	173	226	350	69	818
8—9	222	49	99	79	449	2613	2535	2503	2495	10146	4361	3850	4299	3195	15705	232	240	569	188	1229
9—10	204	115	115	73	507	2550	2467	2946	2150	10113	4067	3709	4240	3287	15303	215	381	571	265	1532
10—11	153	201	247	50	651	2271	2044	2585	2065	8965	3907	4058	4681	3538	16184	247	512	755	321	1935
11—12	90	134	148	111	483	2107	2329	2543	1892	8871	3908	3883	4697	3722	16282	294	744	884	417	2389
p. m.																				
12—1	178	214	148	59	599	1988	2284	2361	1666	8299	4002	3814	4643	3918	16377	458	820	1151	463	2892
1—2	139	178	234	45	596	1874	1923	2164	1793	7754	4085	4184	4723	3553	16545	457	837	1246	591	3131
2—3	89	283	193	43	608	1967	2198	2504	1880	8549	3678	3328	4319	3230	14555	497	822	1097	589	3005
3—4	84	199	386	91	760	2240	2194	2685	2046	9165	3380	3401	4060	3031	13872	327	898	1065	484	2774
4—5	104	204	354	102	764	2190	2283	2990	2179	9642	3674	3302	3768	3089	13833	273	884	1013	383	2553
5—6	145	409	362	133	1049	2533	2470	3112	2302	10417	3518	3136	3284	2903	12841	319	502	1069	334	2224
6—7	339	562	464	145	1510	2729	2496	3281	2842	11348	3691	2991	3440	2940	13062	333	425	896	341	1995
7—8	249	502	458	268	1477	2790	3033	3771	3078	12672	3922	2752	3564	3307	13545	448	359	466	247	1520
8—9	147	670	659	317	1793	3094	3290	4405	3669	14458	4047	3103	3731	3390	14271	330	274	380	191	1175
9—10	221	720	699	402	2042	3342	4105	5511	4002	16960	3702	2666	3747	3540	13655	387	217	394	181	1179
10—11	342	643	795	322	2103	2847	4316	5753	3561	16477	4045	3181	3851	3926	15003	300	207	190	249	946
11—12	325	544	712	303	1884	2881	4229	5828	3532	16470	4084	3414	3799	4061	15358	332	242	190	210	974
Summe	5705	8328	9599	5223	28855	61926	72530	88638	67282	290376	96539	82468	96112	80695	355814	7192	10153	14108	6136	37589
Mittel	238	347	400	218	1202	2580	3022	3777	2803	12099	4023	3436	4005	3363	14867	300	423	588	256	1566

Stunde	N und NNE Winter	N und NNE Frühling	N und NNE Sommer	N und NNE Herbst	N und NNE Jahr	NE und ENE Winter	NE und ENE Frühling	NE und ENE Sommer	NE und ENE Herbst	NE und ENE Jahr
a. m.										
12—1	9	20	8	7	44	159	157	66	126	[illegible]
1—2	10	20	7	8	45	161	162	60	106	[illegible]
2—3	10	17	6	7	40	143	133	68	106	[illegible]
3—4	7	10	6	8	31	160	135	67	103	[illegible]
4—5	8	10	6	6	30	139	136	46	101	[illegible]
5—6	10	14	6	8	38	143	119	48	102	[illegible]
6—7	9	10	8	10	37	111	119	41	91	[illegible]
7—8	9	7	8	8	32	133	110	66	90	[illegible]
8—9	10	16	8	7	41	143	160	96	111	[illegible]
9—10	8	16	9	8	41	155	197	116	131	[illegible]
10—11	8	24	17	7	56	160	231	117	162	[illegible]
11—12	7	30	20	15	72	173	239	161	166	[illegible]
p. m.										
12—1	8	29	19	14	70	180	250	149	172	[illegible]
1—2	10	33	23	14	80	187	231	167	141	[illegible]
2—3	17	37	37	21	112	197	248	162	191	[illegible]
3—4	13	43	24	12	92	226	242	166	206	[illegible]
4—5	20	41	18	11	90	217	240	161	197	[illegible]
5—6	21	31	20	12	84	209	226	164	179	[illegible]
6—7	18	26	23	6	73	192	224	142	164	[illegible]
7—8	16	30	24	7	77	189	216	100	161	[illegible]
8—9	14	27	11	4	56	191	209	92	180	[illegible]
9—10	9	24	13	5	51	186	188	83	162	[illegible]
10—11	10	20	10	4	44	186	177	90	141	[illegible]
11—12	11	16	8	5	40	176	161	69	128	[illegible]
Summe	272	551	339	214	1376	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Mittel	11	23	14	9	57	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

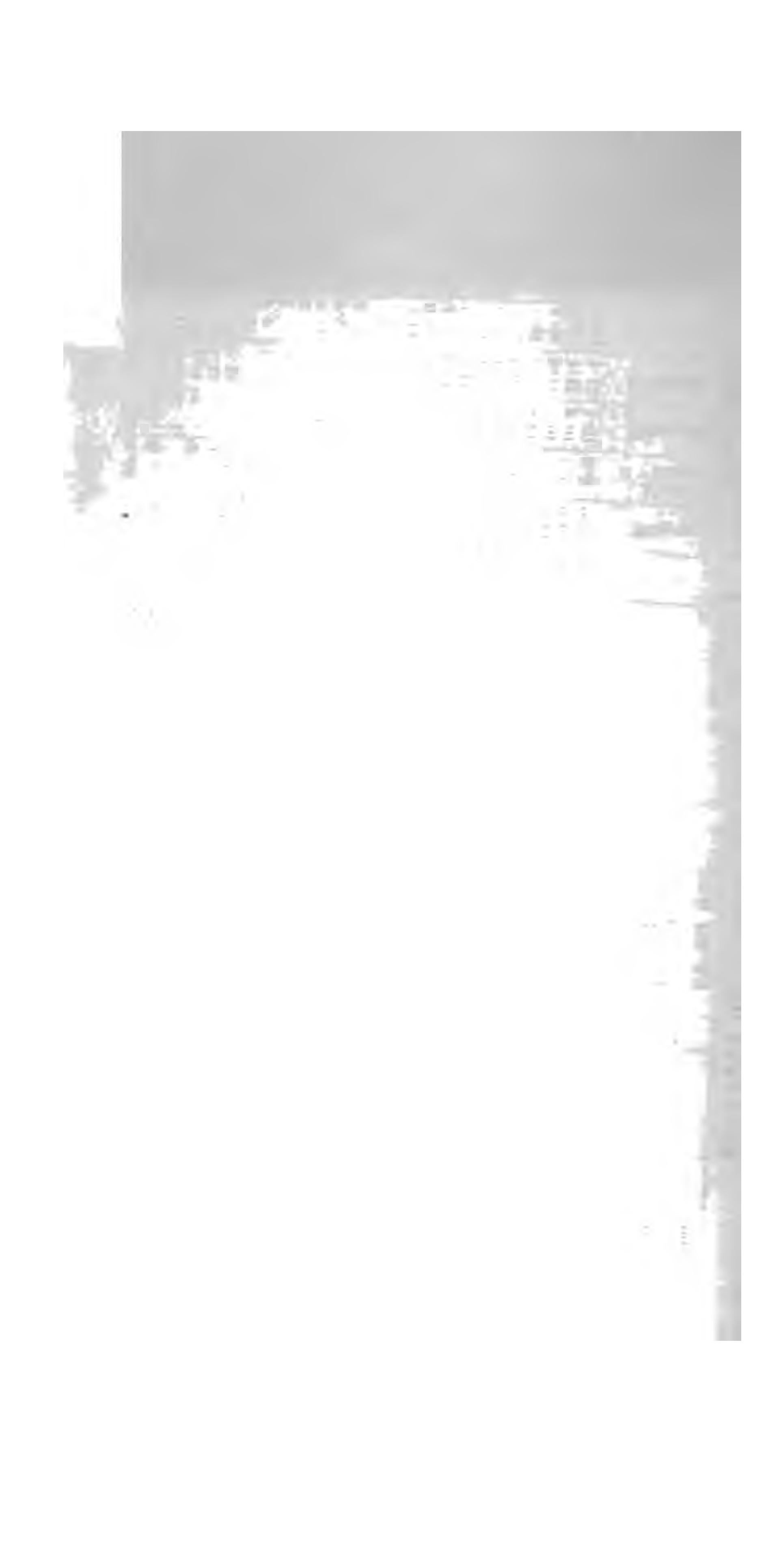
Häufigkeit in Stunden — further columns (E und ESE; [illegible]): values [illegible]

Tabelle VII.

Stunde	S und SSW					SW und WSW					W und WNW					NW und NNW				
Häufigkeit in Stunden																				
	Winter	Früh-ling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Früh-ling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Früh-ling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Früh-ling	Sommer	Herbst	Jahr
a. m.																				
12—1	28	47	61	40	176	222	241	356	247	1066	213	195	237	207	852	25	30	23	9	87
1—2	38	43	50	32	163	212	238	349	240	1039	214	190	231	204	839	18	31	26	13	88
2—3	31	43	43	30	157	218	245	333	250	1046	212	190	246	204	852	18	25	23	8	74
3—4	31	40	37	35	143	222	217	325	228	992	210	193	238	193	834	17	26	26	9	78
4—5	33	30	43	33	139	215	225	300	221	961	216	188	237	174	815	19	28	24	9	80
5—6	28	20	28	29	105	211	212	297	223	943	213	186	235	187	821	14	23	27	5	69
6—7	30		28	27	96	192	169	210	184	755	195	188	247	205	835	18	22	26	4	70
7—8	16	8	19	25	59	171	147	176	176	670	196	188	243	196	823	14	22	30	6	72
8—9	16	5	7	7	35	150	131	143	162	586	204	197	265	189	855	17	19	38	16	90
9—10	12	0	8	6	36	139	123	152	124	538	186	193	253	188	820	16	30	39	17	102
10—11	9	13	16	4	42	109	105	140	118	472	180	199	257	190	826	19	42	51	20	132
11—12	5		10	8	34	103	95	125	110	413	185	208	269	197	859	22	55	56	29	167
p. m.																				
12—1	10	3	0	5	38	96	102	119	91	411	182	201	272	203	858	29	65	81	33	208
1—2	8	0	5	4	37	88	87	113	101	389	189	208	256	181	834	34	67	92	40	233
2—3	5	5	2	4	36	104	99	127	105	435	183	187	247	185	802	32	61	75	42	210
3—4	5	5	9	5	44	123	108	141	124	496	178	184	244	179	785	24	73	75	35	207
4—5	7	5	23	8	53	131	119	164	128	542	190	174	232	187	783	20	68	75	30	193
5—6	2	35	28	10	85	152	128	173	140	593	184	167	209	184	744	22	48	71	25	166
6—7	29	44	30	12	115	168	139	193	175	670	187	160	206	188	741	26	41	66	26	159
7—8	24	42	31	23	120	171	176	236	205	788	192	160	221	208	781	32	36	36	20	124
8—9	4	5	43	30	138	211	199	310	253	973	195	192	223	207	817	28	34	30	15	107
9—10	20	55	47	40	162	223	238	348	247	1056	200	174	224	211	809	30	30	33	11	104
10—11	30	53	58	32	173	219	247	367	235	1068	214	193	226	226	859	25	29	17	15	86
11—12	30	43	66	32	171	225	242	372	228	1067	209	197	238	223	867	24	31	17	16	88
Summe	471	672	723	481	2347	4070	4032	5569	4318	17969	4727	4512	5756	4716	19711	543	936	1062	453	2994
Mittel	20	28	30	20	98	170	168	232	180	749	197	188	240	197	821	22	39	44	19	125

Tabelle IX.

Mittlere Geschwindigkeit in Kilometern	S und SSW					SW und WSW					W und WNW					NW und NNW				
Stunde	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
a. m.																				
12—1	12·0	11·3	14·2	10·6	12·2	12·3	17·4	15·0	15·0	14·9	19·9	16·8	16·2	17·6	17·6	13·0	6·6	10·4	11·4	10·0
1—2	12·3	11·6	11·8	11·0	11·7	12·8	16·1	13·9	15·0	14·5	20·0	18·4	16·6	17·3	18·1	10·6	7·2	10·6	11·4	9·5
2—3	11·0	9·9	11·8	10·7	10·2	12·2	16·2	14·0	14·8	14·3	20·3	18·4	16·0	16·5	17·7	11·0	9·1	10·3	11·0	10·1
3—4	10·9	10·0	11·9	10·9	10·9	12·8	16·6	14·2	15·2	14·6	19·4	18·7	16·2	16·5	17·7	12·0	8·8	10·6	9·9	10·2
4—5	10·7	12·3	10·0	10·4	10·7	11·9	15·8	14·1	14·6	14·1	20·6	17·1	17·0	18·2	18·3	13·6	9·3	11·1	10·7	10·7
5—6	9·5	12·6	10·2	10·3	10·5	13·1	17·1	13·9	14·0	14·5	21·6	16·5	16·2	17·9	18·1	12·2	10·0	10·0	8·6	10·3
6—7	10·5	12·6	10·5	10·8	10·9	15·2	17·2	14·2	15·0	15·3	21·8	19·2	16·3	16·9	18·5	12·5	9·0	10·6	9·0	10·5
7—8	16·1	10·5	11·7	10·6	12·3	15·8	18·1	15·5	14·5	16·0	21·3	20·7	16·1	16·9	18·8	12·4	10·3	11·7	11·5	11·4
8—9	13·9	9·8	14·1	13·2	13·2	17·4	19·3	17·5	15·4	17·4	21·3	19·5	16·2	16·9	18·5	13·7	12·6	15·0	11·8	13·7
9—10	17·0	11·5	14·4	12·2	14·1	18·3	20·1	19·3	17·3	18·8	21·9	19·2	16·8	17·5	18·8	13·4	12·7	14·6	15·6	14·9
10—11	17·0	15·5	15·5	12·4	15·5	20·9	19·4	18·4	17·5	19·0	21·7	20·4	18·2	18·6	19·7	13·0	12·2	14·8	16·0	14·6
11—12	18·0	12·2	14·8	13·9	14·2	20·4	24·5	20·3	17·4	20·6	21·5	18·6	17·5	18·9	19·1	13·4	13·6	11·5	14·0	14·1
p. m.																				
12—1	17·8	16·5	14·8	11·9	15·8	20·7	22·4	19·8	17·7	20·1	22·0	18·9	17·1	19·3	19·3	15·8	12·6	14·2	14·0	13·9
1—2	17·4	17·8	15·6	11·2	15·7	21·3	22·1	19·1	17·9	20·1	21·6	20·1	18·4	19·6	19·9	13·4	12·5	13·5	14·8	13·4
2—3	17·8	19·0	16·1	10·8	16·9	19·0	22·2	19·7	18·0	19·7	20·1	17·8	17·5	17·4	18·2	15·5	13·5	14·6	14·0	14·4
3—4	16·8	13·3	20·3	18·2	17·3	18·2	20·3	19·0	16·5	18·5	19·0	18·5	16·6	16·9	17·8	13·6	12·2	14·2	14·0	13·5
4—5	14·9	13·6	15·4	12·8	14·4	16·7	19·2	18·2	17·0	17·9	19·3	19·0	16·2	16·5	17·8	13·7	13·0	13·5	12·8	13·2
5—6	12·1	11·7	13·0	13·3	12·3	16·6	19·1	18·0	16·4	17·5	19·1	18·8	15·7	15·7	17·3	14·5	10·5	15·0	13·4	13·4
6—7	11·7	13·0	15·5	12·1	13·1	16·7	17·5	17·0	16·2	16·8	19·7	18·7	16·7	15·6	17·7	13·0	10·3	13·6	13·1	12·5
7—8	10·4	11·7	14·8	11·7	12·3	16·3	17·2	16·0	15·0	16·1	20·4	17·2	16·1	15·9	17·4	14·0	9·9	13·0	12·3	12·3
8—9	10·7	13·1	15·3	10·6	9·8	14·7	16·5	14·2	14·5	14·9	20·8	16·2	16·7	16·3	17·4	11·8	8·1	12·7	12·7	11·0
9—10	11·0	13·1	14·9	10·0	12·6	15·0	17·2	15·8	16·2	16·1	18·5	15·3	16·7	16·8	16·9	12·9	7·2	12·0	13·7	11·3
10—11	11·4	12·1	13·7	10·1	12·2	13·0	17·5	15·7	15·1	15·4	18·9	16·5	17·0	17·3	17·5	12·0	7·2	11·2	13·6	11·0
11—12	10·8	12·7	10·8	9·5	11·0	12·9	17·4	15·7	15·5	15·4	19·5	17·3	16·0	18·2	17·7	13·8	8·0	11·2	13·1	11·1
Mittel	12·1	12·4	13·3	10·9	12·3	15·2	18·0	16·3	15·6	16·2	20·4	17·5	16·7	17·1	18·1	13·2	10·8	13·3	13·5	12·6







IV.

Über die Schwere

auf der

Oberfläche der Erde.

Von

Dr. Heinrich Ritter von Hoepflingen und Bergendorf,
Professor an der k. k. ersten deutschen Staatsrealschule in Prag.



Vorwort.

Vorliegende Abhandlung bezweckt keineswegs den Leser mit den bisherigen Forschungen über die Schwere auf der Oberfläche der Erde bekannt zu machen; vielmehr sollen hier nur einige Ergebnisse meiner Studien über jenes Problem Platz finden. Ich habe diesmal bloß versucht, gewisse allgemeinere Formeln aus der Attractionstheorie, welche ich im 63. Theile von Grunerts Archiv der Mathematik und Physik (pag. 310 bis 325)[1]) veröffentlicht habe, auf einen speciellen Fall anzuwenden.

Um den Leser nicht zu zwingen, letztere Abhandlung allzuhäufig zurathe zu ziehen, habe ich in Kürze einige Formeln aus derselben hier nochmals entwickelt.

Über die Gestalt, Größe und mittlere Dichte der Erde.

§ 1. In Rücksicht auf die folgenden Untersuchungen über die Schwere will ich hier einige Bemerkungen über die Gestalt, Größe und mittlere Dichte der Erde vorausschicken, welche durchaus nicht eine historische Skizze, sondern nur eine Notiz behufs späterer Rechnungen sein sollen.

Bei unseren Untersuchungen über Gestalt und Größe des Erdkörpers können selbstverständlich locale Unebenheiten der Oberfläche nicht in Betracht gezogen werden. Wir müssen viel-

[1]) Vgl. Wiedemanns Beiblätter. Bd. 4, Stück 4.

mehr an Stelle der wirklichen Oberfläche eine gedachte Fläche setzen, welche einige Autoren mit dem Namen „geometrische Oberfläche" bezeichnet haben. Was unter dieser zu verstehen ist, sagt Gauss[1]) in folgenden Worten: „Was wir im geometrischen Sinne Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet und von der die Oberfläche des Weltmeeres einen Theil ausmacht."

Auch Bessel[2]) spricht sich über diesen Gegenstand aus, indem er sagt: „Diese dagegen (die geometrische Figur) ist eine Oberfläche, welche die Richtungen der Kräfte senkrecht durchschneidet, die aus allen von den einzelnen Theilen der Erde ausgehenden Anziehungen, verbunden mit der ihrer Umdrehungsgeschwindigkeit entsprechenden Centrifugalkraft, zusammengesetzt sind.....; da dieses (das Meer) aber vorhanden ist, so ist es der Natur angemessen, diejenige der Oberflächen für die Oberfläche der Erde anzunehmen, von welcher die Oberfläche des Meeres ein Theil ist. Denkt man sich also die Erde mit einem Netze von Canälen überzogen, welche mit dem Meer in Verbindung sind und durch dieses gefüllt werden, so fällt die Oberfläche des ruhigen Wassers in denselben mit der geometrischen Oberfläche der Erde zusammen."

Nach dem Gesagten kann die geometrische Oberfläche der Erde keine vollkommen regelmässige Fläche sein, sondern muss sie nach der Grösse und Art der Lothablenkungen grössere oder kleinere Auf- oder Abbiegungen gegen die von solchen Ablenkungen freie Oberfläche zeigen.[3]

[illegible] continentalen und oceanischen [illegible] an den Küsten der Continente Lothablenkungen [illegible] wodurch der Meeresoberfläche [illegible] gegeben wird.

[illegible] Unregelmässig- [illegible] eine reguläre [illegible]

[illegible] Sternwarten von [illegible]

[illegible] Darm- [illegible]

Nachdem Picard durch seine Erdmessungen in den Jahren 1669 und 1670 zu der Ansicht gekommen war, dass die Erde keine vollkommene Kugelgestalt habe, fand in Frankreich die Anschauung Verbreitung, dass die Erde ein an den Polen zugespitztes Rotationsellipsoid [1]) sei. In England wurde diese Ansicht verworfen, da man durch theoretische Untersuchungen zu dem Resultate gelangte, dass die Erde an den Polen abgeplattet sein müsse. Gestützt auf weitere Messungen gelangte man dann zur Überzeugung, dass die Erde ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Es soll hier noch bemerkt werden, dass Mac Laurin [2]) zu dem Resultate gelangte, dass ein unzusammendrückbarer, homogener, flüssiger, um eine Achse rotierender Körper bei einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Anziehung seiner Theile nur dann im Gleichgewichte sich befinden kann, wenn er die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoides hat. Allerdings hat Jakobi [3]) im Jahre 1834 den Beweis geliefert, dass auch ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen, von denen die kleinste die Achse der Rotation ist, eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden homogenen Flüssigkeit sein könne. Allein schon 1841 wies Clausen [4]) nach, dass das dreiachsige Ellipsoid mit den Halbachsen $a > b > c$ nur für $\frac{c}{a} < \sqrt{\frac{1}{2}}$ als Gleichgewichtsfigur bestehen kann, welche Bedingung bei der Erde nicht zutrifft.

Schubert vertrat in seiner Abhandlung [5]) „Essai d'une determination de la véritable figure de la terre" die Ansicht, dass auf Grundlage des Rotationsellipsoides keine übereinstimmenden Resultate aus den Gradmessungen zu erhalten seien, und gelangte zu dem Schlusse, die Erde sei ein Ellipsoid mit

---

[1]) In neuerer Zeit fand diese Idee einen Vertreter in dem astronomischen Literaten J. v. Gumpach, der in seiner Schrift: „Grundzüge einer neuen Weltlehre", München 1860 (16. bis 20. Brief), nachzuweisen sucht, dass die Erde ein an den Polen „um $\frac{1}{95}$ verlängertes" Revolutionsellipsoid ist.

[2]) Phil. Nat. princ. ed. Le Seur et Jacquier, III, 247. Mac Laurin, Treatise of Fluctions ch. XIV. II. § 686 ff.

[3]) Poggendorffs Annalen, Bd. 33, S. 229. Vgl. auch Crelles Journal f. r. u. a. M., Bd. 24, S. 44.

[4]) Astronom. Nachrichten, Bd. 18, Nr. 418, pag. 145.

[5]) Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Serie VII, Tom. I. (8. April 1859).

[illegible] mit [illegible]

[illegible] Einflusses [illegible] im ganzen [illegible]

[illegible] zwei Jahre [illegible] Ansicht, deren [illegible] unmöglich, aber doch [illegible]

[illegible] Schrift auf [illegible] geometrische Oberfläche der Erde [illegible] Sache hindert aber noch [illegible] elliptisches Rotationssphäroid zu [illegible] (geometrische) Oberfläche [illegible] schwächeren, bald in kürzeren, bald in längeren Undulationen abweicht. Wäre es möglich, die [illegible] Netze gleichsam zu [illegible] Lage aller Punkte dadurch zu [illegible] Rotationssphäroid dasjenige [illegible] Richtungen der Verticalen die [illegible] Übereinstimmung mit den astronomischen Beobachtungen [illegible]

[illegible] Helmert [illegible] über unseren [illegible] jedenfalls die Ab[illegible] Niveausphäroides [illegible] geringe, dass [illegible] das Geoid [illegible] continentalen [illegible]

Ich will hier auf diesen Gegenstand nicht weiter eingehen und nur noch bemerken, dass ich auf Grund älterer und neuerer Forschungen in meinen folgenden Rechnungen den Erdkörper als ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid betrachten werde.

§ 2. Es würde zu weit führen, hier auch nur die wichtigsten Bestimmungen der Erddimensionen zu besprechen, und sei hier nur erwähnt, dass auch die neuesten Forschungen keine allgemein anerkannten Resultate geliefert haben. Ich werde daher in meinen späteren Rechnungen für das Erdsphäroid die noch immer in hohem Ansehen stehenden, von Bessel[1]) im Jahre 1841 berechneten Dimensionen annehmen.

§ 3. Sind wir auch über die Gestalt und Größe unseres Erdkörpers ziemlich gut unterrichtet, so fehlt uns doch jede Kenntnis der inneren Beschaffenheit der Erde. So hat z. B. die früher so vielfach angenommene Hypothese, dass die Erde aus einem flüssigen Kerne mit verhältnismäßig dünner Kruste bestehe, in neuerer Zeit Gegner gefunden. Thomson[2]) sucht nachzuweisen, dass das Erdinnere fest sein müsse. W. Hopkins[3]) hat Untersuchungen über die Nutation und Präcession unter verschiedenen Voraussetzungen gemacht und ist zu dem Resultate gelangt, dass die Dicke der festen Kruste nicht geringer als ein Drittel bis ein Viertel des Erdradius sein könne.

Eine größere Anzahl von Forschern war bemüht, die Größe der mittleren Dichte der Erde zu bestimmen. Mit Rücksicht auf unsere späteren Rechnungen sollen hier einige Resultate Platz finden.

Es fanden für die mittlere Dichte der Erde durch Rechnung:

Laplace:[4]) $\varrho = 4\cdot761$, indem er die mittlere Dichte der äußeren Rinde $= 3$ setzte;

---

[1]) Schumachers astron. Nachrichten, Bd. 19, Nr. 438. Vgl. auch: Rud. Engelmann, Abhandlungen von F. W. Bessel. Leipzig 1876, Bd. 3, pag. 62.
Enckes Tafeln im Berliner astronomischen Jahrbuch 1852.
Baeyer, Über die Größe und Figur der Erde. Berlin 1861, pag. 70.
Helmert, l. c., Bd. I, pag. 15.

[2]) Proceedings of the royal Society. T. XII, Nr. 49 und 50.

[3]) Phil. Transact. 1839, 1840, 1842.

[4]) Traité de Mécanique céleste. An VII, T. V, L. XI, pag. 46 f.

Ivory:[1]) $\varrho = 5 \cdot 48$ unter der Voraussetzung, dass die ...lere Dichte der äußeren Oberfläche $= 2 \cdot 88$ ist;

Lipschitz:[2]) $\varrho = 5 \cdot 5832$ bei einem Versuche zur Her...ung eines Gesetzes, welches die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt.

Durch Lothablenkung fanden:

Maskeline und Hutton: $\varrho = 4 \cdot 481$[3]), dann $5 \cdot 377$[4]), und schließlich nahm Hutton das Mittel $\varrho = 4 \cdot 95$[5]);

Playfair[6]): $\varrho = 4 \cdot 71$;

Colonel James[7]): $\varrho = 5 \cdot 32$.

Mit Hilfe von Pendelbeobachtungen fanden:

Carlini[8]): $\varrho = 4 \cdot 39$;

Airy: $\varrho = 6 \cdot 57$ und später $\varrho = 6 \cdot 62$[9]);

R. v. Sterneck[10]): $\varrho = 5\ 77$ [nach einer späteren kritischen Berechnung[11]) ergab sich $\varrho = 5 \cdot 71$];

Wilsing[12]): $\varrho = 5 \cdot 594$.

Mittelst der Drehwage fanden:

Cavendish[13]): $\varrho = 5 \cdot 48$ [Huttons[14]) Revisionsrechnung ergab $5 \cdot 32$];

Reich: $\varrho = 5 \cdot 44$[15]), dann nach späteren Rechnungen aus den älteren Beobachtungen $\varrho = 5 \cdot 49$[16]), endlich aus neueren Versuchen $\varrho = 5 \cdot 5832$[17]);

---

[1]) Philosophical Magazine, T. LXVI, pag. 321.

[2]) Crelles Journal f. r. u. a. M. Bd. 62, pag. 35.

[3]) Phil. Trans. LXVIII, pag. 781.

[4]) Tracts. II, pag. 1.

[5]) Phil. Trans.. 1821, pag. 276.

[6]) Phil. Trans 1811, pag. 347.

[7]) Phil. Trans. Vol. 146, pag. 606.

[8]) Effemeride di Milano, 1824. Append. pag. 28.

[9]) Phil. Trans. Vol. 146, pag. 355.

[10]) Mittheilungen des k. k. militär-geographischen Institutes, Bd. 2 u. 3, Wien 1882 und 1883. (Versuche in Příbram.)

[11]) Helmert, l. c., Bd. II, pag. 499 f.

[12]) Publ. d. astrophys. Observ. Potsdam 1887. Berliner Sitzungsber. 1885, pag. 13.

[13]) Phil. Trans. Vol. 88, pag. 469 und Poggendorffs (Gilberts) Annalen, Bd. II, pag. 1 f.

[14]) Phil. Trans. 1821, pag. 276—292.

[15]) Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage. Freiberg 1838.

[16]) und [17]) Neue Versuche mit der Drehwage. Kgl. sächs. G... schaften zu Leipzig, 1852, Bd. I, pag. 389 u. 418.

Baily:[1]) $\varrho = 5{\cdot}66$ aus mehr als 2000 Versuchen:

A. Cornu und J. Baille:[2]) $\varrho = 5{\cdot}67$.

Mittelst der Wage fand:

Ph. v. Jolly:[3]) $\varrho = 5{\cdot}692$.

Die hier angeführten Dichtenwerte zeigen keine gute Übereinstimmung; der geringste dieser Werte verhält sich zu dem größten ungefähr wie 2 : 3. Zieht man jedoch nur die neueren und besonders sorgfältig ausgeführten Versuche von Reich, Baily und anderen in Betracht, so findet man eine gute Übereinstimmung mit einem Mittelwerte von etwa

$$\varrho = 5{\cdot}63.$$

Für die mittlere Dichte der oberflächlichen Schichte der Erde nehmen an:

Laplace: $\varrho_2 = 3$,

Ivory: $\varrho_2 = 2{\cdot}88$,

J. C. E. Schmidt:[4]) $\varrho_2 = 2{\cdot}642$,

Fischer:[5]) $\varrho_2 = 2{\cdot}88$.

Die auf der Erdoberfläche in größerer Menge — also für unsere Untersuchungen allein maßgebenden — mineralischen Substanzen haben fast immer eine Dichte zwischen den Grenzen 2·0 und 3·0; die Grenzwerte selbst werden selten erreicht. Nun sind aber beiläufig zwei Drittheile der Erdoberfläche mit Wasser bedeckt, welches zumeist eine beträchtliche Tiefe hat. Ich schätze demnach die mittlere Dichte der oberflächlichen Schichte der Erde auf

$$\varrho_2 = 2{\cdot}77.$$

Anziehung eines homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoides von sehr geringer Excentricität auf einen außerhalb desselben gelegenen Punkt.

§ 4. Es sei die Abplattung eines homogenen Rotationsellipsoides ein Bruch von solcher Kleinheit, dass bei der Be-

---

[1]) Baily, Experiments with the Torsion Rod for determining the mean density of the Earth. London 1843. — Poggendorffs Annalen, Bd. 57, pag. 453.

[2]) Comptes rendus, 1873, T. 76, pag. 954 und 1878, T. 86, pag. 699.

[3]) Jolly, Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. 2. Abhandl. München 1881. Aus den Abhandl. d. kgl. bayr. Akademie der Wissensch. II. Cl., Bd. 14, Abth. 2.

[4]) Schmidt, Lehrbuch der mathem. und phys. Geographie. Göttingen 1829, pag. 387.

[5]) Fischer, l. c., pag. 89.

rechnung der Anziehung des Sphäroides Glieder, welche die vierte oder eine noch höhere Potenz der numerischen Excentricität desselben als Factor enthalten, vernachlässigt werden können. In diesem Falle lässt sich die Action des Sphäroides — wie ich[1]) bereits vor längerer Zeit nachgewiesen habe — sehr einfach ermitteln.

Denken wir uns das abgeplattete Ellipsoid durch Rotation einer Ellipse mit den Halbachsen $a > b$ entstanden, so können wir uns dasselbe aus zwei Theilen zusammengesetzt vorstellen: und zwar aus einer „inneren Kugel", welche aus seinem Mittelpunkte mit dem Halbmesser b beschrieben ist und einem auf dieser Kugel aufliegenden und sie zum Ellipsoide ergänzenden Wulste. Dieser Wulst ist demnach von außen von der Oberfläche des Ellipsoides, von innen aber von der Oberfläche der inneren Kugel begrenzt.

Die Anziehung des Ellipsoides setzt sich demnach aus der Action der „inneren Kugel" und der Action des Wulstes zusammen. Es lässt sich leicht nachweisen (vgl. meine cit. Abhandl. pag. 312 ff.), dass die Anziehung eines homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoides auf einen Punkt seiner Oberfläche immer eine Richtung hat, welche zwischen den Radiusvector zum Centrum und die Normale, welche zu diesem Punkte gehören, fällt. Für einen Punkt außerhalb des Ellipsoides gilt derselbe Satz, sobald wir jene Geraden auf ein mit dem in Rede stehenden confocales, durch den angezogenen Punkt gehendes Ellipsoid beziehen. Hat man es mit einem Ellipsoid zu thun, dessen numerische Excentricität e so gering ist, dass in dem Ausdrucke für die Action desselben Glieder mit e^4 ohne bedeutenden Fehler vernachlässigt werden dürfen, so kann der absoluten Größe nach die Totalaction dieses Sphäroides ihrer in die Richtung des Radiusvectors fallenden Componente gleichgesetzt werden. Eine leichte Rechnung zeigt nämlich, dass der Unterschied dieser beiden Kräfte immer eine Größe von zu vernachlässigender Ordnung ist. Für die Richtung der Anziehung ist selbstverständlich das früher ausgesprochene Gesetz maßgebend.

Die Action des gekennzeichneten Wulstes kann in der erwähnten Annäherung — bei welcher Glieder mit der vierten oder einer noch höheren Potenz der Excentricität vernach-

[1]) Grunerts Archiv der Mathematik und Physik. Th. 63, pag. 310 ff.

lässigt werden — in ähnlicher Weise berechnet werden, wie die Action einer sehr dünnen Kugelschale, wobei man jedoch zu beachten hat, dass die Dicke der Schale variabel ist. Wir können uns die Sache auch so vorstellen, als ob die Masse des Wulstes auf der Oberfläche der inneren Kugel condensiert wäre.

Die untenstehende Figur stelle die innere Kugel des Sphäroides und den angezogenen Punkt m vor. Bezeichnet ϱ die Dichte des Sphäroides, f die Action zweier Masseneinheiten in der Entfernung 1 aufeinander, und ist die Masse des Punktes $m = 1$, so erhalten wir, den Bezeichnungen der Figur 1 entsprechend für das Potential der Anziehung einer homogenen

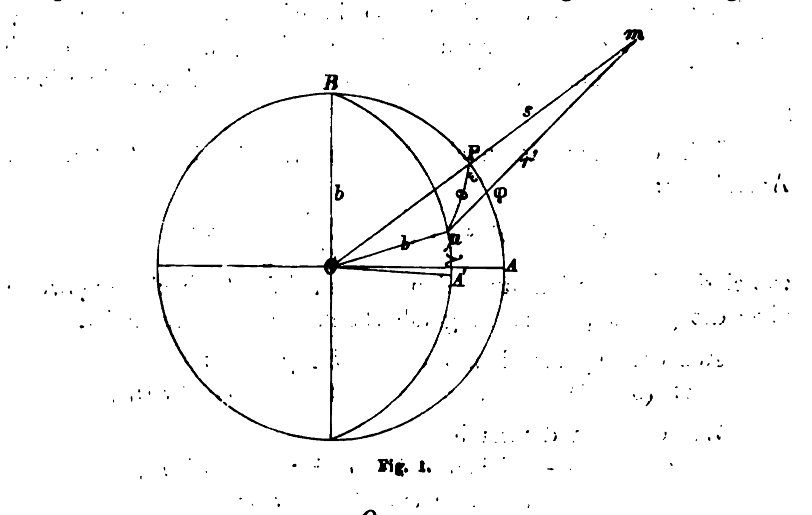


Fig. 1.

$$Om = s$$

$$AP = \varphi \quad \mu m = r'$$

$$A'\mu = \lambda \quad \left.\begin{array}{l} OA \\ OA' \\ OB \\ O\mu \end{array}\right\} = b$$

$$P\mu = \theta$$

$$\measuredangle AP\mu = \omega$$

Kugelschale mit der sehr geringen Dicke δ, dem Radius b und der Dichte ϱ auf den Punkt m

$$\int\int \frac{f \delta \varrho b^2 \sin \theta \, d\theta \, d\omega}{r'},$$

wobei die Integration über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist.

Für den Wulst ist die Dicke δ gleich dem Radiusvector r des Ellipsoides weniger dem Radius b der inneren Kugel:

$$\delta = r - b;$$

da aber für das Sphäroid die Gleichung besteht:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 i}$$

oder in unserer Annäherung

$$r = b\,(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \cos^2 i),$$

so erhalten wir die Dicke des Wulstes

$$\delta = \tfrac{1}{2}\, b e^2 \cos^2 i,$$

also nicht unendlich klein. Daher ist auch die Rechnung, als ob einem Massenelemente mit der Dicke δ nur ein r zukäme — das ganze Massentheilchen also in einem Punkte vereinigt wäre — nicht genau; jedoch liegt der Fehler, welchen wir durch eine solche Rechnung begehen, außerhalb unserer Approximationsgrenze.

Wir erhalten demnach für den Wulst als Potential der Anziehung:

$$V = \tfrac{1}{2} f b^3 e^2 \varrho \iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r} \cos^2 i,$$

wobei die Integration über den ganzen Wulst, beziehungsweise über die ganze „innere Kugeloberfläche" auszudehnen ist.

Aus dem sphärischen Dreieck BPm folgt:

$$\cos(90 - i) = \sin i = \sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta \cos\omega.$$

Wir erhalten demnach

$$\cos^2 i = 1 - \sin^2\varphi \cos^2\theta - \cos^2\varphi \sin^2\theta \cos^2\omega -$$
$$- 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\theta \cos\theta \cos\omega$$

und

$$V = \tfrac{1}{2} f b^3 e^2 \varrho \iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\omega}{r} \{1 - \sin^2\varphi \cos^2\theta - \cos^2\varphi \sin^2\theta \cos^2\omega -$$
$$+ 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\theta \cos\theta \cos\omega\},$$

wofür wir der Kürze halber schreiben:

$$V = \tfrac{1}{2} f b^3 e^2 \varrho \{ I_1 - I_2 \sin^2\varphi - I_3 \cos^2\varphi - 2 I_4 \sin\varphi \cos\varphi \}.$$

Nun ist aber

$$r^2 = b^2 + \varrho^2 - 2 b \varrho \cos\theta,$$

woraus sich durch Differentiation

$$\frac{r\, dr}{b\varrho} = \sin\theta\, d\theta$$

ergibt.

cos θ ist aber als Function von r' gegeben durch

$$\cos\theta = -\frac{r'^2 - (b^2 + s^2)}{2bs}.$$

Führen wir nun die Integration nach r' und ω aus, so ist r' zwischen den Grenzen $(s - b)$ und $(s + b)$ und ω zwischen den Grenzen 0 und 2π zu nehmen. Es ist demnach

$$I_1 = \int\limits_{(s-b)}^{(s+b)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\,r'}{b\,s}\, d\,\omega = \frac{4\pi}{s},$$

und, wenn

$$\tfrac{1}{2} f b^3 e^2 \varrho\, I_1 = v_1$$

gesetzt wird,

$$v_1 = \frac{2\pi f b^3 e^2 \varrho}{s}.$$

Ferner ist

$$I_2 = \int\limits_{(s-b)}^{(s+b)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\,r'}{b\,s}\left[\frac{r'^2 - (b^2 + s^2)}{2bs}\right]^2 d\,\omega,$$

woraus sich

$$I_2 = \frac{4\pi}{s}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2}\right]$$

ergibt.

Wird

$$\tfrac{1}{2} f b^3 e^2 \varrho\, I_2 \sin^2\varphi = v_2$$

gesetzt, so erhält man

$$v_2 = v_1\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2}\right]\sin^2\varphi.$$

Es ist ferner nach vollbrachter Integration nach ω

$$I_3 = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta\, d\theta}{r'}$$

oder

$$I_3 = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{r'} - \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{r'},$$

also auch

$$I_3 = \pi\left[\frac{I_1}{2\pi} - \frac{I_2}{2\pi}\right].$$

Somit erhält man

$$I_3 = \frac{4\pi}{s}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s_2}\right].$$

Setzt man

$$\tfrac{1}{2} f b^3 e^2 \varrho I_3 \cos^2\varphi = v_3,$$

so ergibt sich

$$v_3 = v_1\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2}\right]\cos^2\varphi.$$

Endlich folgt aus

$$\int_0^{2\pi} \cos\omega \, d\omega = 0$$

$$I_4 = 0.$$

Wir erhalten somit:

$$V = v_1 - v_2 - v_3$$

oder

$$V = v_1\left[1 - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2}\right)\sin^2\varphi - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{15}\frac{b^2}{s^2}\right)\cos^2\varphi\right],$$

woraus sich

$$V = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{s}\left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{15}\frac{b^2}{s^2} + \tfrac{1}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\varphi\right]$$

ergibt.

Der Differentialquotient von V nach s (mit geänderten Vorzeichen) liefert den gesuchten Ausdruck für die Action $\overline{R}_2$ des Wulstes auf den äußeren Punkt m. Wir erhalten:

1) $$\overline{R}_2 = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{s^2}\left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{s^2} + \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\varphi\right].$$

Nun ist aber in unserer Approximation $s^2 = b'^2 (1 + \varepsilon^2 \cos^2\varphi)$, wenn b' die kleine Halbachse und ε die numerische Excentricität des mit dem in Rede stehenden confocalen Sphäroides ($a' > b'$), dessen Oberfläche durch den Punkt m gehen würde, bedeuten. Wir erhalten jetzt durch Substitution

2) $$\begin{cases} \overline{R}_2 = \dfrac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{b'^2}\left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}\dfrac{b^2}{b'^2} + \tfrac{3}{5}\dfrac{b^2}{b'^2}\cos^2\varphi\right] \text{ oder} \\ \overline{R}_2 = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \dfrac{b^3}{b'^2} f e^2 \left[1 - \tfrac{3}{5}\dfrac{b^2}{b'^2} + \tfrac{9}{10}\dfrac{b^2}{b'^2}\cos^2\varphi\right], \end{cases}$$

wenn wir berücksichtigen, dass

$$\varepsilon^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{a^2}{a'^2} e^2$$

ist und in unserer Approximation

$$\varepsilon^2 = \frac{b^2}{b'^2} e^2 (1 + e^2 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{b'^2} e^2$$

gesetzt werden kann. Es ist immer $\varepsilon^2 < e^2$.

Für die Action der „inneren Kugel" auf den Punkt m findet man in unserer Annäherung leicht:

$$3)\qquad \overline{R}_1 = \tfrac{4}{3} \pi \varrho \frac{b^3}{b'^2} f \left[1 - \frac{b^2}{b'^2} e^2 \cos^2 \varphi \right].$$

Addiert man zu der Action des Wulstes die Action der inneren Kugel, so erhält man die Action $\overline{R}$ des ganzen Sphäroides auf dem Punkt m. Es ist:

$$4)\quad \begin{cases} \overline{R} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = \tfrac{4}{3} \pi \varrho \dfrac{b^3}{b'^2} f \left[1 + e^2 - \tfrac{3}{5} \dfrac{b^2}{b'^2} e^2 - \tfrac{1}{10} \dfrac{b^2}{b'^2} e^2 \cos^2 \varphi \right] \\ \text{oder} \\ \overline{R} = \tfrac{4}{3} \pi \varrho \dfrac{b^3}{b'^2} f [1 + e^2 - \tfrac{3}{5} \varepsilon^2 - \tfrac{1}{10} \varepsilon^2 \cos^2 \varphi]. \end{cases}$$

Liegt der Punkt m in der Oberfläche des Sphäroides, so wird $b' = b$ und wir erhalten der Reihe nach aus den obigen Formeln für die Action des Wulstes

$$5)\qquad \begin{cases} R_2 = 2 \pi \varrho b f e^2 [\tfrac{4}{15} + \tfrac{3}{5} \cos^2 \varphi] \text{ oder} \\ R_2 = \tfrac{4}{3} \pi \varrho b f e^2 [\tfrac{2}{5} + \tfrac{9}{10} \cos^2 \varphi], \end{cases}$$

für die Action der „inneren" Kugel

$$6)\qquad R_1 = \tfrac{4}{3} \pi \varrho b f [1 - e^2 \cos^2 \varphi]$$

und für die Action des Sphäroides

$$7)\qquad R = \tfrac{4}{3} \pi \varrho b f [1 + \tfrac{2}{5} e^2 - \tfrac{1}{10} e^2 \cos^2 \varphi].$$

Hat die „innere" Kugel die Dichte ϱ_1 und der Wulst die Dichte ϱ_2, so ist die Action des Sphäroides auf einen Oberflächenpunkt gegeben durch:

$$8)\quad \begin{cases} R = \tfrac{4}{3} \pi \varrho_1 b f [1 - e^2 \cos^2 \varphi] + \tfrac{4}{3} \pi \varrho_2 b f e^2 [\tfrac{2}{5} + \tfrac{9}{10} \cos^2 \varphi] \text{ oder} \\ R = \tfrac{4}{3} \pi b f [\varrho_1 + \tfrac{2}{5} e^2 \varrho_2 - (\varrho_1 - \tfrac{9}{10} \varrho_2) e^2 \cos^2 \varphi]. \end{cases}$$

Anziehung homogener Schalen auf einen äußeren Punkt.

§ 5. *a*) Die Anziehung einer homogenen Kugelschale auf einen Punkt, welcher außerhalb oder auf der äußeren Oberfläche der Schale liegt, findet bekanntlich so statt, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Denken wir uns — um auf einen späteren Fall vorzubereiten — den ellipsoidischen Wulst des vorigen Capitels durch eine Kugelschale

ersetzt, deren innerer Halbmesser b und deren äußerer Halbmesser der Abstand r des Oberflächenpunktes m, also gleich

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}}$$

ist, so erhalten wir in unserer früheren Annäherung für die Action der Kugelschale auf den Punkt m:

$$X_2 = \frac{4\pi b^2 (r-b)}{r^2},$$

oder

$$X_2 = 2\pi b e^2 \cos^2\varphi.$$

[illegible]

Der Differentialquotient von V nach s (mit geändertem Vorzeichen) gibt die Kraft

$$10)\qquad \bar{R}_4 = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{s^2}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{s^2} - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{s^2}\cos^2\varphi\right],$$

wofür wir aus früher dargethanen Gründen auch schreiben können:

$$11)\qquad \bar{R}_4 = \frac{2\pi\varrho b^3 f e^2}{b'^2}\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5}\frac{b^2}{b'^2} - \tfrac{3}{5}\frac{b^2}{b'^2}\cos^2\varphi\right].$$

Liegt der Punkt m auf der Kugelfläche, so ist $b' = b$ und wir erhalten für die Action der Schale:

$$12)\qquad R_4 = 2\pi\varrho b f e^2 \left[\tfrac{11}{15} - \tfrac{3}{5}\cos^2\varphi\right].$$

Auch hier haben wir eigentlich nur die Componente der Anziehung, welche gegen den Mittelpunkt gerichtet ist, berechnet.

Vergleiche zwischen den beobachteten und den unter verschiedenen Annahmen über die innere Beschaffenheit der Erde berechneten Werten der Acceleration der Schwere.

§ 6. Für die Beschleunigung g_φ, welche die Erde an sich, also abgesehen von der Verminderung zufolge der durch ihre Rotation entstehenden Fliehkraft, einem auf ihrer Oberfläche gelegenen Körper unter der geocentrischen Breite φ ertheilt, findet man aus zahlreichen sorgfältigen Versuchen:

$$13)\qquad g_\varphi = 9\cdot83139\, m - 0\cdot01724\, m \cos^2\varphi.$$ [1]

Einige Forscher[2]) haben in neuerer Zeit andere Constanten für g_φ angegeben; jedoch ist der Unterschied so gering, dass er für unsere weiteren Betrachtungen nicht von Belang ist. Die von Bessel angegebenen Dimensionen des Erdkörpers ergeben für die Abplattung $\frac{1}{299\cdot153}$ und für das Quadrat der numerischen Excentricität $e^2 = 0\cdot006675$.

Die Abplattung unseres Erdkörpers ist mithin eine so geringe Größe, dass wir ohne bedeutenden Fehler bei Berechnung der Beschleunigung (wie im Eingange dieser Abhandlung) die Glieder mit e^4 vernachlässigen können. Wir dürfen uns dies

---

[1]) Vgl. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig 1867, pag. 97, § 72. 2. Aufl. 1891.

[2]) Vgl. F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Leipzig 1880—1884, 2. Bd., pag. 85 u. 241.

umsoeher erlauben, als locale Einflüsse und unsere noch immer mangelhafte Kenntnis der Gestalt und Beschaffenheit der Erde eine ganz genaue Rechnung hier gar nicht zulassen.

§ 7. Wir wenden uns nun zunächst der Frage zu, ob die Annahme, die Erde sei ein homogenes oder mindestens so beschaffenes elliptisches Sphäroid, dass seine Action überall einer einzigen, ganz bestimmten mittleren Dichte entspricht, mit der Gleichung 13) im Einklange steht.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir aus der Identificierung der Gleichungen 7) und 13) einen Ausdruck für die Dichte ϱ suchen, wobei wir der Kürze halber $g_\varphi = \alpha - \beta\cos^2\varphi$ und $\frac{4}{3}\pi b f = \gamma$ setzen.[1]) Es ist dann

$$\alpha - \beta\cos^2\varphi = \gamma[1 + \tfrac{3}{5}e^2 - \tfrac{1}{10}e^2\cos^2\varphi]\,\varrho.$$

Daraus folgt

$$\varrho = \frac{\alpha - \beta\cos^2\varphi}{\gamma}[1 - \tfrac{3}{5}e^2 + \tfrac{1}{10}e^2\cos^2\varphi]$$

oder nach Potenzen von $\cos\varphi$ geordnet

$$\varrho = \frac{\alpha(1 - \frac{3}{5}e^2)}{\gamma} - \frac{\beta(1 - \frac{3}{5}e^2) - \alpha\frac{1}{10}e^2}{\gamma}\cos^2\varphi - \frac{\beta\frac{1}{10}e^2}{\gamma}\cos^4\varphi.$$

Es hat demnach ϱ die Form $A - B\cos^2\varphi - C\cos^4\varphi$. Sollte ϱ einen und denselben Wert für alle Werte von φ haben, so müsste $B = C = 0$ sein, was nicht der Fall ist. Je nach der Lage des angezogenen Körpers müssten wir demnach verschiedene Werte für ϱ annehmen, um die Rechnung mit der Beobachtung in Einklang zu bringen.

§ 8. Wir wollen nun untersuchen, ob die Annahme, dass die Erde aus einer homogenen[2]) „inneren Kugel" mit der Dichte ϱ_1 und einem homogenen „ellipsoidischen Wulste" (vgl. pag. 134) mit der Dichte ϱ_2 besteht, wobei ϱ_1 von ϱ_2 verschieden angenommen wird, mit der Beobachtung in Einklang zu bringen ist. Diese Annahme über die Massenvertheilung in der Erde kann wohl nicht von vornherein verworfen werden.

Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so ergibt sich durch Identificierung der Gleichungen 8) und 13)

[1]) $b = 6356079 \cdot 587\ m$, $f = 0 \cdot 0000000654$.

[2]) Wir werden hier öfters unter Homogenität auch eine Massenanordnung verstehen, welche nur ihrer Action nach mit einer gleichförmigen identificiert werden kann. So kann z. B. hier ϱ_1 auch die mittlere Dichte einer Kugel vorstellen, sobald die Dichtigkeit nur von Schale zu Schale variiert.

14) $$\gamma\,[\varrho_1 + \tfrac{2}{5}\varrho_2 e^2 - (\varrho_1 - \tfrac{9}{10}\varrho_2)\, e^2 \cos^2\varphi] = \alpha - \beta \cos^2\varphi.$$

Soll diese Gleichung für alle Werte von φ bestehen, so muss auch

15) $$\gamma\,[\varrho_1 + \tfrac{2}{5}\varrho_2 e^2] = \alpha$$

und

16) $$\gamma\,[\varrho_1 - \tfrac{9}{10}\varrho_2]\, e^2 = \beta$$

sein.

Aus Gleichung 15) findet man:

$$\varrho_1 = \frac{\alpha - \frac{2}{5}\gamma\varrho_2 e^2}{\gamma}.$$

Substituiert man hier den Wert für ϱ_2, welchen man aus 16) erhält, nämlich

17) $$\varrho_2 = \tfrac{10}{9}\left(\varrho_1 - \frac{\beta}{\gamma e^2}\right),$$

so findet man

18) $$\varrho_1 = \frac{9\alpha + 4\beta}{9\gamma + 4\gamma e^2}.$$

Die numerischen Werte für ϱ_1 und ϱ_2 sind dann nach den Gleichungen 17) und 18):

$$\varrho_1 = 5 \cdot 632$$

und

$$\varrho_2 = 4 \cdot 610.$$

Dieser Wert für ϱ_1 kann nach unseren Vorbemerkungen wohl nicht bemängelt werden; jedoch ist der Wert für ϱ_2 jedenfalls viel zu groß, da er in Wirklichkeit kaum 2·8 beträgt.

Eine besondere Form, in welcher sich das Gesetz der Schwere auf der Oberfläche der Erde darstellen lässt.

§ 9. Wenngleich der soeben für ϱ_2 berechnete Wert der Natur des Erdkörpers nicht entspricht, so führt er uns doch zu einer nicht uninteressanten Bemerkung.

Die linke Seite der Gleichung 14) besteht nämlich aus den beiden Theilen

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho_1\, bf\,(1 - e^2 \cos^2\varphi)$$

und

$$\tfrac{8}{15}\pi bf\varrho_2\, e^2 + 2\pi bf \,.\, \tfrac{3}{5}\varrho_2 e^2 \cos^2\varphi,$$

von denen der erste Theil die Action der inneren Kugel, der zweite aber die des Wulstes auf einen Punkt auf der Oberfläche des Sphäroides darstellt [vgl. Gl. 6) und 5)].

Verbinden wir nun im zweiten Gliede des zweiten Theiles den früheren Wert von $\varrho_0 = 4{\cdot}610$ mit dem Factor $\frac{3}{5}$, so erhalten wir:

$$4{\cdot}610 \times \frac{3}{5} = 2{\cdot}765,$$

eine Zahl, welche der Dichte der Erde an ihrer Oberfläche entspricht und welche wir für den Augenblick mit ϱ' bezeichnen wollen. Jenes zweite Glied erhält jetzt die Gestalt

$$2\pi\varrho' b\, c^2 \cos^2 \vartheta.$$

Einen ähnlichen Ausdruck haben wir aber bereits in Gleichung 9) für die Action einer Kugelschale mit der Dichte ϱ und der Dicke $c - b$ auf einen um $r = b(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta)$ von ihrem Mittelpunkte entfernten Punkt kennen gelernt.

Ich habe in meiner eingangs citierten Abhandlung[1] nachgewiesen, dass die Action eines homogenen, sehr wenig abgeplatteten Rotationsellipsoides mit der Dichte ϱ auf einen Punkt seiner Oberfläche der absoluten Größe nach gleichgesetzt werden kann der Summe aus der Action einer Kugel, deren Halbmesser gleich ist der kleinen Halbachse des Ellipsoides, mit der Dichte $(1 - [illegible])\varrho$ und der Action einer auf dieser Kugel aufliegenden Kugelschale, deren äußerer Halbmesser der Abstand des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte ist, mit der Dichte ϱ, wenn ε die numerische Excentricität des Ellipsoides bedeutet.

Da die Erde kein homogenes Ellipsoid ist, so können wir zwar dieses allgemeine Gesetz nicht unmittelbar auf unseren besonderen Fall anwenden, es zeigt sich aber, dass sich das Gesetz, nach welchem die Erde auf einen auf ihrer Oberfläche befindlichen Körper einwirkt, in ähnlicher Weise darstellen [illegible]. Wir betrachten nun $[illegible] = \varepsilon - \frac{1}{2} [illegible]$ als zusammengesetzt aus der Action der inneren Kugel mit der Dichte ϱ_1 und der Action einer ihr aufliegenden, durch den angezogenen Punkt hindurchgehenden, ebenfalls homogenen Kugelschale mit der Dichte ϱ_2.

Wir erhalten dann den früher entwickelten Formeln entsprechend

$$[illegible] \varrho_1 - \varrho_2 - [illegible] \cos^2 \vartheta = \varepsilon - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta.$$

Soll diese Gleichung für alle Werte von ϑ richtig sein, so muss

$$[illegible]\varrho_2 = \varepsilon$$

---

[1] [illegible] Abhandlungen [illegible]

und

$$\gamma\,(\varrho_1 - \tfrac{3}{2}\,\varrho_2)\,c^2 = \beta$$

sein.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$\varrho_1 = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ und } \varrho_2 = \tfrac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma\,c^2}\right).$$

Die numerische Rechnung liefert

$$\varrho_1 = 5{\cdot}644$$

und

$$\varrho_2 = 2{\cdot}774$$ [1]).

Diese Werte für ϱ_1 und ϱ_2 kommen den wirklichen Dichten des ganzen Erdkörpers beziehungsweise der oberflächlichen Schichte desselben jedenfalls so nahe, dass wir das Ergebnis unserer Rechnung folgendermaßen aussprechen können:

Die Schwere auf der Oberfläche der Erde ist unter jeder Breite sehr nahe gleich der Summe aus der Anziehung einer mit der halben Polarachse als Radius um den Erdmittelpunkt beschriebenen homogenen Kugel mit der mittleren Dichte der ganzen Erde (genauer: mit der Dichte 5·644) und der Anziehung einer auf dieser Kugel aufliegenden homogenen Kugelschale, deren äußerer Halbmesser derjenige Radiusvector des Erdsphäroides ist, welcher der betreffenden Breite zukommt, mit der Dichte der oberflächlichen Schichte der Erde (genauer: mit der Dichte 2·774).

Es ist somit die wirkliche Schwere an den Polen so beschaffen, als ob bloß der Erdkern, die innere Kugel, mit der Dichte 5·644 vorhanden wäre, während sie am Äquator eine solche Größe hat, als ob der Wulst zur Kugelschale mit der Dicke $(a - b)$ ergänzt wäre. Trotzdem ist natürlich die Schwere an den Polen größer als am Äquator.

Unter einer Breite von 35° 15′ 51·8″ ist die Action des Wulstes (vgl. pag. 140) gleich der Action der entsprechenden Kugelschale.

Wir müssen aus diesem Gesetze schließen, dass die „innere

---

[1]) Hätten wir die um den entsprechenden Theil der Fliehkraft verminderte Beschleunigung hier in Rechnung gezogen, so wäre ϱ_2 natürlich kleiner zu nehmen.

Kugel" nicht homogen, sondern an den Polen weniger dicht ist als am Äquator.

§ **10**. Es scheint mir nicht ganz uninteressant, die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphe mit einander zu vergleichen und die Frage aufzuwerfen, inwiefern die Gestalt der Erde von dem früher angenommenen Ellipsoid abweichen müsste, damit die Rechnung unter der Voraussetzung, dass die Erde aus der „inneren" Kugel mit der Dichte ϱ_1 und einer auf dieser aufliegenden Schichte mit der Dichte ϱ_2 bestünde, eine Anziehung ergibt, welche mit der Regel des vorigen Paragraphen unter jeder Breite übereinstimmt.

Ich will diese Frage bloß approximativ behandeln; denn es handelt sich hier nicht darum, wirkliche Abweichungen in der Gestalt der Erde von einem Rotationsellipsoid zu bestimmen, sondern nur in einer — ich möchte sagen — bildlichen Darstellung ein leichteres Urtheil über die innere Beschaffenheit der Erde zu ermöglichen.

Die äußere Oberfläche jener als auf der „inneren" Kugel befindlich angenommenen Erdschichte wird nun nicht mehr der früher betrachtete ellipsoidische Wulst sein; sie wird jedoch von demselben nur um so Geringes abweichen, dass wir diese positiven und negativen Abweichungen gewissermaßen als locale Störungen betrachten können. Geben wir uns nämlich mit einer rohen Annäherung oder Schätzung zufrieden, so genügt es, bei Berechnung der Schwere in einem bestimmten Punkte bloß diejenigen Abweichungen von der ellipsoidischen Gestalt zu berücksichtigen, welche diesem Punkte zunächst gelegen sind.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zur Lösung unseres Problems sofort einen Weg betreten, wie ihn Poisson in seiner Mechanik[1]) erläutert, um die Abnahme der Schwere mit der Erhebung über das Meeresniveau zu berechnen, wenn diese Erhebung durch eine weithin ausgedehnte continentale Masse hervorgerufen wird.

Poisson gelangt dort zu der Gleichung[2])

$$g = g'\left[1 + \frac{2h}{r} - \frac{3\varrho' h}{2\varrho r}\right]$$

---

[1]) Poisson, „Traité de Mécanique", 2. édit., Paris 1833. Tome premier, Nr. 255, pag. 495.

[2]) Diese Gleichung wird gewöhnlich die Regel von Young oder Formel von Poisson für ebenes Terrain genannt. Sie wurde von Young ohne Be-

und, unter der Voraussetzung, dass $\varrho' = \frac{\varrho}{2}$ ist, zu der vereinfachten Gleichung

$$g = g' \left[1 + \tfrac{5}{4} \frac{h}{r}\right],$$

wo g die auf die Meeresoberfläche reducierte, g' die auf der Erhöhung beobachtete Acceleration, h die verticale Dicke, ϱ' die gleichförmige Dichte dieser Erhöhungsschichte, r den Halbmesser und ϱ die Dichte der Erdkugel bezeichnet.

Bedeuten ferner in unserem Falle g_1 und g'_2 die Beschleunigungen, welche die innere Kugel und die zugehörige Kugelschale nach der Regel des § 9 dem beobachteten Körper ertheilen, und ist g_2 die Beschleunigung, welche der ellipsoidische Wulst dem Körper in dem Punkte seiner Oberfläche ertheilen würde, wo die letztere von der Verticalen getroffen wird, so kann man jetzt nach obiger Formel annähernd setzen:

$$g_1 + g_2 = (g_1 + g'_2)\left[1 + \tfrac{5}{4} \frac{h}{r}\right].$$

Daraus folgt $\quad h = \frac{g_2 - g'_2}{g_1 + g'_2} \cdot \tfrac{4}{5}\, r.$

Führt man für die Beschleunigungen ihre eingangs dieser Abhandlung gefundenen Werte ein, so erhält man

$$h = \frac{(\tfrac{4}{15} - \tfrac{2}{5}\cos^2\varphi)\, \varrho_2 e^2}{\tfrac{2}{3}\, \varrho_1 (1 - e^2 \cos^2\varphi) + \varrho_2 e^2 \cos^2\varphi} \cdot \tfrac{4}{5}\, b\, (1 + \tfrac{1}{2}\, e^2 \cos^2\varphi).$$

Man kann bei unserem Grade der Genauigkeit $\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{2}$ setzen. Dann geht diese Gleichung bei Vernachlässigung der Glieder mit e^4 über in

$$h = b e^2 \left[\tfrac{4}{25} - \tfrac{6}{25} \cos^2\varphi\right].$$

Die Höhe der auf dem Ellipsoid aufliegend gedachten Schichte ist demnach eine Function von φ; ihr Wert nimmt mit zunehmender Breite zu, und zwar ist für $\sphericalangle\, \varphi = 0^0$

---

gründung in Form einer Regel in den Philosoph. Transactions 1819, pag. 93, mitgetheilt, während sie bei Poisson erst in der 2. Auflage (1833) seiner Mechanik (s. v. Anmerkung) sich vorfindet. Laplace veröffentlicht diese Formel im Jahre 1825 in seiner Mécanique céleste, T. V, L. XI, pag. 55—56. Jedoch ist nach Todhunter, A History of the mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth, London 1873, I., pag. 248, bereits im Jahre 1749 Bouguer in seiner Schrift: La Figure de la Terre zu demselben Resultate gelangt.

$$h_0 = -\tfrac{2}{15}\, b e^2 = -3394 \cdot 14\, m,$$

für $\measuredangle\, \varphi = 35^0\, 15'\, 51 \cdot 8''$ (vgl. pag. 140)

$$h = 0,$$

für $\measuredangle\, \varphi = 90^0$

$$h_{90} = -2 h_0 = +6788 \cdot 28\, m.$$

An den Polen erscheint demnach die Erhöhung positiv, am Äquator negativ. Daraus ergibt sich für uns abermals der Schluss, dass die „innere Kugel" nicht homogen ist, sondern an den Polen eine geringere Dichte besitzt als am Äquator.

Specielle Annahme über die innere Beschaffenheit der Erde, für welche die berechneten Werte der Acceleration der Schwere mit den durch Pendelbeobachtungen gefundenen unter jeder Breite übereinstimmen.

§ 11. Um die beobachteten Werte mit den berechneten in gute Übereinstimmung zu bringen, empfiehlt sich folgende Annahme der Massenvertheilung im Innern der Erde.

Das Erdsphäroid $ABAB$ besteht aus:

1. einem „inneren", mit seiner Oberfläche $AB\,AB$ homofocalen Ellipsoide $A_1 B_1 A_1 B_1$ mit der gleichförmigen[1]) Dichte ϱ'_1,



Fig. 2.

$$OA = a \qquad OB = b$$
$$OA_1 = a_1 = b \quad OB_1 = b_1$$

---

[1]) Vgl. Anmerkung auf pag. 142.

dessen große Achse gleich ist der kleinen Achse der Oberfläche $ABAB$;

2. einem Wulste mit der inneren Begrenzung $A_1 B_1 A_1 B_1$ und der äußeren Begrenzung $A_1 B A_1 B$ und der gleichförmigen Dichte ϱ', welcher das innere Ellipsoid zur inneren Kugel ergänzt, und endlich

3. aus einem Wulste mit der inneren Begrenzung $A_1 B A_1 B$, der äußeren Begrenzung $A B A B$ und der gleichförmigen Dichte ϱ_2, welcher Wulst die innere Kugel zum Gesammtsphäroide ergänzt.

Dem entsprechend setzt sich die Totalaction des Erdsphäroides auf den Punkt m in der Entfernung r vom Mittelpunkte O aus den Einzelactionen dieser drei Theile zusammen. Da wir auch hier die frühere Approximationsgrenze beibehalten, so ersetzen wir wieder die Actionen ihren Größen nach durch die betreffenden Componenten, welche in die Richtung $m\,O$ fallen.

Ad 1. Die Action des inneren Ellipsoides mit den Halbachsen $a_1 > b_1$ auf den Punkt m ist nach Gleichung 4):

$$20) \quad E_{(a_1 b_1)} = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\varrho'_1\,\frac{b_1^{\,3}}{b^2}\,f\,[1 + e_1^{\,2} - \tfrac{3}{5}\,e^2 - \tfrac{1}{10}\,c^2 \cos^2\varphi],$$

wo e_1 die numerische Excentricität des inneren Ellipsoides bedeutet, also

$$e_1^{\,2} = \frac{a_1^{\,2} - b_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}$$

ist.

Da das innere und äußere Ellipsoid confocal sind, so ist, wie wir früher gesehen haben,

$$e_1^{\,2} = e^2\,\frac{a^2}{a_1^{\,2}}.$$

Da hier $a_1 = b$ ist, so erhalten wir

$$e_1^{\,2} = e^2\,\frac{a^2}{b^2}.$$

Drückt man nun a durch b und e^2 aus, so ergibt sich

$$e_1^{\,2} = e^2\,(1 + e^2),$$

oder mit Vernachlässigung von e^4

$$e_1^{\,2} = e^2.$$

Substituiert man nun in Gleichung 20) e^2 für $c_1^{\,2}$, so erhält man

$$21) \quad E_{(a_1 b_1)} = \tfrac{4}{3}\,\pi\,\varrho'_1\,\frac{b_1^{\,3}}{b^2}\,f\,[1 + \tfrac{2}{5}\,e^2 - \tfrac{1}{10}\,e^2 \cos^2\varphi].$$

Setzt man hier für b_1 seinen Wert $a_1(1-\frac{1}{3}e_1^2)$, beziehungsweise $b(1-\frac{1}{3}e^2)$, so erhält man

$$22)\quad \begin{cases} E_{(a_1 b_1)} = \frac{4}{3}\pi\varrho'_1 bf[1-\frac{11}{10}e^2-\frac{1}{10}e^2\cos^2\varphi] \\ \text{oder} \\ E_{(a_1 b_1)} = 2\pi\varrho'_1 bf[\frac{2}{3}-\frac{11}{15}e^2-\frac{1}{15}e^2\cos^2\varphi]. \end{cases}$$

Ad 2. Die Action dieses Wulstes auf den Punkt m ist nach Gleichung 11)

$$23)\quad W_1 = 2\pi\varrho'\frac{b_1^3}{b^2}fe^2\{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\frac{b_1^2}{b^2}-\frac{2}{5}\frac{b_1^2}{b^2}\cos^2\varphi\}.$$

Setzt man hierin $b_1 = b(1-\frac{1}{3}e^2)$ und vernachlässigt wieder die Glieder mit e^4, so erhält man

$$24)\quad W_1 = 2\pi\varrho' bfe^2[\frac{11}{15}-\frac{2}{5}\cos^2\varphi].$$

Ad 3. Die Action dieses Wulstes auf den Punkt m ist nach Gleichung 5)

$$25)\quad W_2 = 2\pi\varrho_2 bfe^2[\frac{4}{15}+\frac{2}{5}\cos^2\varphi].$$

Die Totalaction des Erdsphäroides auf den Punkt m finden wir nun durch Summierung der Werte von $E_{(a_1 b_1)}$, W_1 und W_2. Diese Addition ergibt:

$$26)\quad E_{(a_1 b_1)}+W_1+W_2 = 2\pi bf\{\frac{2}{3}\varrho'_1-(\frac{11}{15}\varrho'_1-\frac{11}{15}\varrho'-\frac{4}{15}\varrho_2)e^2 - (\frac{1}{15}\varrho'_1+\frac{2}{5}\varrho'-\frac{2}{5}\varrho_2)e^2\cos^2\varphi\}.$$

Die Beobachtungswerte für die Acceleration der Schwere sind uns durch das pag. 145 ausgesprochene Gesetz in folgender Form gegeben:

$$27)\quad g_\varphi = 2\pi bf\{\frac{2}{3}\varrho_1-(\frac{2}{5}\varrho_1-\varrho_2)e^2\cos^2\varphi\},$$

worin ϱ_1 und ϱ_2 die pag. 145 bestimmten Werte haben.

Durch Identificierung der Gleichungen 26) und 27) findet man leicht, welche Werte für ϱ'_1 und ϱ' in die Gleichung 26) einzusetzen sind, damit die berechneten Werte der Acceleration mit den beobachteten unter jeder Breite übereinstimmen.

Die Identificierung liefert sofort folgende zwei coexistierende Gleichungen:

$$\frac{2}{3}\varrho'_1-\frac{2}{3}\varrho_1-(\frac{11}{15}\varrho'_1-\frac{11}{15}\varrho'-\frac{4}{15}\varrho_2)e^2 = 0$$

$$\frac{1}{15}\varrho'_1-\frac{2}{5}\varrho_1+\frac{2}{5}\varrho'+\frac{3}{5}\varrho_2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$\varrho' = \varrho_1-\frac{1}{3}\left(6+\frac{6-4e^2}{9-11e^2}\right)\varrho_2$$

$$[illegible] = 10\varrho_1-9\varrho'-6\varrho_2$$

welchen Ausdrücken die numerischen Werte:

$$\varrho' = 3\cdot794,$$
$$\varrho'_1 = 5\cdot650$$

entsprechen, während wir nach pag. 145 für ϱ_2 zu setzen haben:

$$\varrho_2 = 2\cdot774.$$

Diese drei Werte für die Dichten ϱ'_1, ϱ' und ϱ_2 des inneren Ellipsoides und der zwei Wülste scheinen mit der Wirklichkeit gut übereinzustimmen. Führten wir nämlich in der Rechnung auch die drei einzelnen Theile der Erde als homogene Körper ein, so dachten wir doch nicht daran, dass diese Theile in der Natur von überall vollkommen gleicher Dichte wären. Es ist bloß nothwendig, dass diese drei Theile zusammen auf einen unter beliebiger Breite gelegenen Punkt nahezu eine Action ausüben, die unseren Dichten entspricht.

So werden in der Natur gemeiniglich die geringeren Actionen der Meere durch bedeutendere Actionen von Massen mit großer Dichte, die unter den Meeren sich befinden, compensiert, und umgekehrt werden öfters wieder Actionen dichterer Gesteinslager durch benachbarte Lager von weniger dichtem Gestein oder durch Höhlungen aufgewogen.

Der äußere Wulst, für dessen Dichte wir den geringsten Wert fanden, hat seine Hauptausdehnung — seine größte Tiefe — am und um den Äquator; dort finden wir aber auch in der Wirklichkeit fast gar kein Land, nur tiefes Meer. Gegen die Pole zu nimmt die Dicke dieses Wulstes ab; der dichtere innere Wulst tritt immer näher an die Oberfläche; wir sehen bedeutende Massen von Land.

Unsere Rechnung scheint sogar darauf hinzudeuten, dass an den Polen Land vorhanden ist.

§ 12. Die eben besprochene Theilung der Erde in drei an und für sich homogene Theile lieferte zwar annehmbare Werte für ihre Dichten; jedoch könnte es empfehlenswerter erscheinen, das Erdsphäroid aus einem inneren Ellipsoid, wie wir es eben früher annahmen, mit der Dichte ϱ'_1 und einer homogenen ellipsoidischen Schale mit der Dichte ϱ', welche von den Oberflächen des inneren und des Erdsphäroides selbst begrenzt wird, zusammengesetzt zu denken.

Die Action dieser Schale erhalten wir durch Addition der Gleichungen 5) und 11) nach gehöriger Umgestaltung von 11):

28) $$S = 2\pi\varrho' b f e^2,$$

also unabhängig vom Winkel φ, in der von uns acceptierten Annäherung. Durch Addition der Gleichungen 22) und 28) erhalten wir die Totalaction des Erdsphäroides nach der obigen Annahme. Drücken wir andererseits die wirkliche Totalaction nach dem pag. 145 gefundenen Gesetze aus, so erhalten wir

$$\varrho'_1 \left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{11}{15} e^2 - \tfrac{1}{15} e^2 \cos^2 \varphi\right] + \varrho' e^2 = \tfrac{2}{3} \varrho_1 - \left(\tfrac{2}{3} \varrho_1 - \varrho_2\right) e^2 \cos^2 \varphi.$$

Soll diese Gleichung für alle Werte des Winkels φ bestehen, so ergibt sich:

$$\varrho'_1 = 10 \varrho_1 - 15 \varrho_2$$

und

$$\tfrac{2}{3} \varrho'_1 - \tfrac{11}{15} \varrho'_1 e^2 + \varrho' e^2 = \tfrac{2}{3} \varrho_1.$$

Substituiert man nun für ϱ'_1 dessen Wert aus der ersten Gleichung in die zweite und löst dann letztere nach ϱ' auf, so erhält man

$$\varrho' = \frac{10 \varrho_2 - 6 \varrho_1}{e^2} + \tfrac{22}{3} \varrho_1 - 11 \varrho_2.$$

Die erste Gleichung liefert für ϱ'_1 den jedenfalls zu großen Wert

$$\varrho'_1 = 14 \cdot 827,$$

während die letzte Gleichung sogar einen negativen Wert für ϱ' ergibt, wie dies bei einem so großen Wert von ϱ'_1 nicht anders zu erwarten war. Da nun eine negative Dichte nicht bestehen kann, so ist diese letzte Annahme über die Constitution der Erde unstatthaft.

Es erübrigt uns somit von den hier betrachteten Hypothesen bloß die in § 11 dargestellte, da sie allein den Beobachtungswerten entsprochen hat.

V.

Über einige Folgerungen

aus der

Theorie der Elektricität von Maxwell.

Von

Dr. Ignaz G. Wallentin,

Director des k. k. Staatsgymnasiums in Troppau.

Die Frage nach der Fortpflanzung der elektromagnetischen Energie wurde insbesondere durch die theoretischen Forschungen von H. Poynting[1]) auf Grund der von Maxwell[2]) für die Theorie der Elektricität gegebenen Gleichungen in befriedigender Weise beantwortet und es wurde die von Poynting gegebene Theorie, die auf mehrere specielle Fälle sowohl von diesem Forscher als auch von anderen Physikern angewendet wurde, in völliger Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen erwiesen. Von besonderem Interesse ist das aus diesen Untersuchungen resultierende Verhalten der Leiter und der dielektrischen Körper, denen zufolge — wie Hertz[3]) zusammenfassend sagt — „die Metalle Nichtleiter für die elektrische Kraft sind und dadurch dieselbe unter gewissen Verhältnissen zwingen, sich nicht zu zerstreuen, sondern zusammenzubleiben und so Leiter des scheinbaren Ursprungs dieser Kräfte, der Elektricität, werden, auf welche sich die übliche Terminologie bezieht".

Es werden in der vorstehenden Abhandlung zuerst in gedrängter Form die fundamentalen Betrachtungen, welche Maxwell zu seiner Theorie der elektrischen und magnetischen Er-

---

[1]) H. Poynting, Phil. Transact. 1844, II., p. 343; dargestellt auch in Graetz, Physik. Revue, Bd. I, Heft 1, 1892. Im Auszuge in H. Poincaré, Elektricität und Optik (deutsche Ausgabe von Dr. W. Jäger und Dr. E. Gumlich, 2. Bd., p. 154 u. 208).

[2]) J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism, Oxford 1873, 2. Bd.

[3]) H. Hertz, Über die Fortleitung elektrischer Wellen (Wied. Ann., Bd. 37, 1889).

scheinungen[1]) leiteten, zusammengefasst und den aus diesen folgenden Gleichungen eine Gestalt verliehen, welche dieselben bei der Erörterung des Problems der Energieübertragung bequemer und leichter anwendbar macht. Im folgenden werden die Formeln für die Geschwindigkeit der Energiebewegung entwickelt, und zwar — wie der Verfasser wohl mit gutem Grunde behaupten kann — in weit einfacherer Weise, als dies von Poynting (l. c.) und Heaveside[2]) geschehen ist. Weiter werden aus den durchgeführten Rechnungen verschiedene Schlüsse gezogen, welche auf specielle Fälle von Übertragung magnetischer und elektrischer Energie Bezug nehmen. Im Anschlusse an diese Untersuchungen wird die Theorie der Elektricitätsbewegung in dicken Leitungsdrähten und jene der elektrischen Schwingungen in geraden Leitern, wie sie von Stefan[3]) nicht aus den Maxwell'schen Betrachtungen, sondern auf Grund jener von F. Neumann und W. Weber gegeben wurde, in kurzen Umrissen dargestellt. Auf die Experimente, welche zur Bestätigung der elektrodynamischen Schirmwirkung dienen, konnte nicht eingegangen werden. Den Schluss der Abhandlung bildet eine mehr populär gehaltene Erklärung der Energieübertragung durch die Verschiebung des das Weltall erfüllenden Lichtäthers.

I.

Nach Maxwell entstehen in einem einer inducierenden Kraft F unterworfenen Dielektricum Erscheinungen, hervorgerufen durch eine Verschiebung der Elektricität im Sinne der ersteren; dieselbe, bezogen auf ein Oberflächenelement dS, ist die dasselbe durchsetzende Elektricitätsmenge, somit $\frac{1}{4\pi} F.dS$ oder allgemein $\frac{KF.dS}{4\pi}$ bei der Berührung mit einem Dielektricum, dessen Dielektricitätsconstante K ist. In einem Dielektricum

[1]) Mascart et Joubert, Leçons sur l'électricité et le magnétisme; Paris 1882, 1. Bd., p. 619 u. d. f.

[2]) Heaviside, Phil. Mag. XXV, p. 153.

[3]) Stefan, Über veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten (Sitz.-Ber. der Wiener Akademie, 95. Bd. 1887) und Elektrische Schwingungen in geraden Leitern (ebendas. Bd. 99, 1890).

wird der Verschiebung ein von der „elektrischen Elasticität“ des Mediums herrührender Widerstand geleistet und es ist Gleichgewicht, wenn die elastische Rückwirkung in jedem Punkte der elektrischen Kraft gleich ist. Der Coefficient der elektrischen Elasticität ist das Verhältnis der elektrischen Kraft zur Verschiebung, somit $\frac{4\pi}{K}$.

In einem vollkommenen Leiter wird der Verschiebung kein Widerstand entgegengesetzt. Durch die Verschiebungen in einem Dielektricum wird die elektrische Wirkung fortgepflanzt; es tritt dann eine Polarisierung der Molecüle des Dielektricums ein. Durch den Act der Elektrisierung wird in dem Dielektricum potentielle Energie aufgespeichert, welche nach Maxwell für die Volumseinheit $\frac{1}{8\pi} K F^2$ oder gleich dem halben Producte aus der elektrischen Kraft in die Verschiebung ist. Die Elektricität verhält sich nach dieser Theorie wie ein incompressibles Fluidum, so dass einer von einem elektrisierten Conductor ausgehenden positiven Verschiebung eine ebenso große negative Verschiebung an einem anderen Conductor entspricht (Theorem der correspondierenden Elemente).

Durchsetzen magnetische Kraftlinien (ein magnetischer Kraftfluss) einen geschlossenen Stromkreis und unterdrückt man den Kraftfluss, so entsteht im Stromkreise eine elektromotorische Kraft der Induction. Nach Maxwells Anschauung wird jedes Leiterelement von elektromotorischen Kräften beeinflusst, die aus dem Zustande des Mediums stammen; es steht dasselbe im magnetischen Felde in einem gewissen Spannungszustande. Ändert sich die Feldintensität, sei es, dass die Erreger des magnetischen Feldes sich ändern oder der Leiterkreis im Felde sich bewegt, so dass eine Änderung des denselben durchsetzenden Kraftflusses eintritt, so ändert sich der Spannungszustand und es entstehen zufolge der elastischen Rückwirkung des Mediums im Leiter inducierte elektromotorische Kräfte, deren Componenten nach den Achsen eines orthogonalen Coordinatensystems F, G, H seien; dieselben sind Functionen der Coordinaten. Sind X, Y, Z die Componenten der magnetischen Kraft in einem Punkte der Oberfläche, die beliebig, aber begrenzt durch den Stromkreis, gelegt wird, ist ferner μ der Coëfficient der magnetischen Permeabilität des Mediums, d. h. der

t der Leitungsfähigkeit des Mediums für die magne-
raftlinien,[1]) dann ist nach Maxwell:

$$\ldots \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\,; \quad \mu\, Y = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\,; \quad \mu Z = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \qquad (1)$$

genügen die magnetischen Kräfte der Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die ganze elektromotorische Kraft eines Stromkreises ist nur von den Werten F, G, H in den verschiedenen Punkten des ersteren abhängig.

Nennt man die in einem gegebenen Augenblicke auf die Längeneinheit des Stromkreises parallel zur X-Achse wirkende elektromotorische Kraft P, so ist das Product dieser Größe in das Zeitdifferential dt der entsprechenden Verminderung von F gleich, es gelten somit die Gleichungen:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad Q = -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad R = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad . \; . \; . \quad (3)$$

wenn Q und R auf die Y- und Z-Achse sich beziehen.

Die Größe $-P$ drückt die Potentialdifferenz aus, die im betrachteten Augenblicke zwischen den beiden Enden einer Längeneinheit parallel zur X-Achse entsteht, wenn der Wert des magnetischen Inductionsflusses sich ändert. Hiebei ist vorausgesetzt, dass nur Variationen des Feldes stattfinden, dann sind die Componenten der elektromotorischen Kraft in jedem Punkte nur Functionen der Zeit. Ist aber die Feldintensität variabel und der Stromkreis einer Verrückung oder Verschiebung unterworfen, dann sind die Coordinaten eines jeden Punktes selbst Functionen der Zeit und man erhält in diesem allgemeinen Falle, wenn man noch die Anwesenheit elektrischer Massen annimmt, die in dem betreffenden Punkte ein Potential V liefern, als Componenten der elektromotorischen Kraft, die in jedem Augenblicke auf die Längeneinheit parallel zu den Achsen wirken, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu Y \frac{\partial z}{\partial t} - \mu Z \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} \\ Q &= \mu Z \frac{\partial x}{\partial t} - \mu X \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y} \\ R &= \mu X \frac{\partial y}{\partial t} - \mu Y \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

---

[1]) W. Thomson, Raprint of papers, § 628.

Die Größen P, Q, R hängen mit den in einem Punkte des Mediums stattfindenden Stromcomponenten u, v, w nach dem Gesetze von Ohm zusammen, so dass — wenn c das specifische Leitungsvermögen des Mediums ist —

$$u = Pc,\ v = Qc,\ w = Rc \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wenn das Medium nach allen Richtungen molecular gleich beschaffen ist.

Erwägt man, dass die Arbeit, welche geleistet wird, wenn ein Einheitsmagnetpol, der auf einer geschlossenen Curve beweglich ist, welche die Stromebene (Stromintensität i) durchsetzt, diese Curve durchläuft, $4\pi i$ ist, und wendet man diese Eigenschaft auf den Fall eines Einheitsmagnetpoles an, der drei unendlich kleine rechteckige Stromkreise, die parallel zu den Coordinatenebenen sind und deren Flächen den Coordinatenanfangspunkt in ihrer Mitte haben, durchsetzt, so findet man die Beziehungen zwischen den magnetischen Kräften X, Y, Z und den Stromcomponenten u, v, w durch die Formeln gegeben:

$$4\pi u = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y};\quad 4\pi v = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z};\quad 4\pi w = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (6)$$

Dieselben folgen direct aus dem Grundgesetze von Biot und Savart. Es ist auch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

d. h. es fließt durch jede Oberfläche in derselben Zeit ebenso viel Elektricität ein als aus. Bestehen in einem isotropen Medium gleichzeitig continuierliche Ströme und solche Ströme, die aus einer Veränderung der elektrischen Verschiebung entstehen, dann sind die Größen u, v, w zu ergänzen. Sind die Componenten der elektrischen Verschiebung f, g, h, die neuen Stromcomponenten u', v', w', so wird, da in einem Dielektricum mit der Dielektricitätsconstante K ein Gleichgewichtszustand zwischen der elektromotorischen Kraft und den durch die Verschiebungen entwickelten elastischen Reactionen eintritt, folgendes Gleichungssystem gelten:

$$f = \frac{K}{4\pi} P,\ g = \frac{K}{4\pi} Q,\ h = \frac{K}{4\pi} R. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Die neuen Strömungscomponenten setzen sich zusammen aus den früheren und jenen, welche der Elektricitätsbewegung

in den Molecülen des Dielektricums entsprechen, und es ist:

$$u' = u + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v' = v + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w' = w + \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \; . \quad (9).$$

Die Dichte der freien Elektricität im Innern des Mediums ist bekanntlich gegeben durch:

$$\varrho = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

während jene an der Oberfläche eines inducierten Dielektricums dargestellt ist durch:

$$\sigma = -(fl + gm + hn),$$

wenn l, m, n die Cosinusse der Winkel der nach einwärts positiv gezählten Normale mit den Coordinatenachsen sind. Vorausgesetzt ist hiebei, dass das Dielektricum an einen Leiter grenzt. An der Grenzfläche zweier Dielektrica gilt die analoge Dichtengleichung:

$$\sigma = fl + gm + hn + f'l' + g'm' + h'n' \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Im Falle eines Leiters ist noch die Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

zu berücksichtigen.

Dies sind im wesentlichen die von Maxwell gegebenen Grundgleichungen seiner Theorie, aus denen wir Formeln gewinnen wollen, die für die späteren Entwicklungen bequemer zu handhaben sind und die ähnlich den von Hertz[1]) gegebenen sind.

Es folgt aus (6), (8), (9), nach einfacher Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{1}{K}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) - \frac{4\pi}{K} u \\
\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{1}{K}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{4\pi}{K} v \\
\frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{1}{K}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{4\pi}{K} w
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Formeln (1) liefern:

$$\mu \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

oder unter Beachtung von (3)

---

[1]) H. Hertz, Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie (Wied. Ann., Bd. 36, 1889).

$$\mu \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und ebenso:

$$\mu \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

II.

Wenn wir die elektromotorische Intensität in einem Punkte (d. i. die elektrostatische Kraft, welche auf einen kleinen mit der positiven Elektricitätseinheit geladenen, in diesen Punkt gebrachten Körper wirken würde) mit E, die magnetische Intensität in demselben Punkte mit M (d. i. die Kraft auf einen in diesen Punkt gebrachten magnetischen Einheitspol) bezeichnen würden, so ist die Summe der elektrischen und magnetischen Energie in der Volumseinheit des Mediums, welche um diesen Punkt construiert gedacht wird, nach Maxwell:

$$\frac{K}{8\pi} \mathrm{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi} \mathrm{M}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

somit die elektrische und magnetische Energie in dem ganzen Felde:

$$W = \frac{K}{8\pi} \int (P^2 + Q^2 + R^2)\, d\tau + \frac{\mu}{8\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau \quad (16)$$

In diesem Ausdrucke sind die Integrale Raumintegrale und $d\tau$ bedeutet das Volumelement. Die früheren Bezeichnungen sind beibehalten.

Durch Differentiation der letzten Gleichung nach der Zeit erhält man:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ K \left(P \frac{\partial P}{\partial t} + Q \frac{\partial Q}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial t} \right) + \right.$$
$$\left. + \mu \left(X \frac{\partial X}{\partial t} + Y \frac{\partial Y}{\partial t} + Z \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \right\} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (13) und (14) ergibt sich nach leichter Rechnung:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int (Pu + Qv + Rw)\, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(QZ - RY) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(RX - PZ) + \frac{\partial}{\partial z}(PY - QX) \right\} . \, dx\, dy\, dz \quad . \quad (18)$$

und demgemäß:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int (Pu + Qv + Rw)\, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int \Big\{ (QZ - RY)\, dy\, dz + $$
$$+ (RX - PZ)\, dx\, dz + (PY - QX)\, dx\, dy \Big\},$$

wo die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung Flächenintegrale sind. Schließt die von der Oberfläche nach außen gezeichnete Normale mit den Coordinatenachsen Winkel ein, deren Cosinusse l, m, n sind, und nennt man das Oberflächenelement dS, so ist bekanntlich

$$dy\, dz = l.dS,\; dx\, dz = m.dS,\; dx.dy = n.dS,$$

und deshalb:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int (Pu + Qv + Rw)\, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int \Big\{ (QZ - RY)\, l + $$
$$+ (RX - PZ) m + (PY - QX) n \Big\} .dS \quad . \quad . \quad (19)$$

und diese Formel umfasst vollständig die Theorie der Übertragung der elektromagnetischen Energie durch das Medium. Das Volumenintegral bedeutet die Energie, die durch den Leiter in Wärme, chemische Energie und andere Energieformen verwandelt wurde. Die linke Seite drückt daher die gesammte Energieänderung in einer Secunde innerhalb der geschlossenen Fläche aus und Gleichung (19) zeigt, dass diese Energie durch die geschlossene Fläche eindringt, wobei jedes Element derselben einen Beitrag liefert, der durch die rechte Seite ausgedrückt wird. In dem Raumintegral ist der Energiebeitrag, ausgedrückt, welcher aus anderer Quelle als dem elektromagnetischen Energievorrathe stammt. Es sind dies die Energiebeträge, welche entweder durch thätige sogenannte elektromotorische Kräfte den Energievorrath des elektromagnetischen Systems vermehren oder die als Joule'sche Wärme denselben entzogenen Beträge.[1]) Wird diese in die Betrachtung herbeigezogen, dann sind die Componenten der in die Fläche eintretenden Energieströmung oder die Geschwindigkeitscomponenten derselben:

---

[1]) W. Wien, Über den Begriff der Localisierung der Energie (Wied. Ann., Bd. 45, 1892, Heft 4).

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{4\pi}(RY - QZ),\ \mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi}(PZ - RX),\ \mathfrak{w} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}(QX - PY) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und die gesammte Geschwindigkeit der Energieströmung ist

$$U = \sqrt{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Sind im Felde nur elektrische oder nur magnetische Kraftlinien vorhanden, dann ist diesen Gleichungen zufolge die Energie in Ruhe. Ebenso findet im Inneren der Leiter keine Energieströmung statt, da im nicht dielektrisch polarisierbaren Leiter $K = f = g = h = 0$ ist.

Aus leicht einzusehenden Gründen ist der Cosinus des Winkels zwischen der Energieströmung und der Richtung der elektrischen Kraft

$$\frac{1}{U\,\mathrm{E}}(\mathfrak{u}.P + \mathfrak{v}.Q + \mathfrak{w}.R) = 0 \text{ entsprechend (20).}$$

Es bildet daher die Richtung der Energieströmung mit jener der elektrischen Kraft einen rechten Winkel. Ebenso findet man, dass die Energieströmung normal zur Richtung der magnetischen Kraft ist. Es bewegt sich daher die Energie im elektromagnetischen Felde normal zu den magnetischen und elektrischen Kraftlinien, d. h. es sind die Stromlinien der Energie die Schnittcurven der magnetischen und elektrischen Niveauflächen. Daraus folgt unmittelbar, dass dort, wo die magnetischen und elektrischen Kraftlinien parallel sind, keine Energieströmung zustande kommen kann.

Die durch die Oberfläche in der Zeiteinheit eintretende Energieströmung ist, wenn L, M, N, die Cosinusse der Winkel der Energieströmung mit den Coordinatenachsen bedeuten:

$$-\int U(Ll + Mm + Nn)\, dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Rechnet man U aus den Formeln (21) und (20) und führt statt der Componenten der magnetischen Kraft X, Y, Z ihre durch die Resultierende M und die Winkel der ersteren mit den Coordinatenachsen gegebenen Werte ein und vollführt dies in analoger Weise mit den Componenten der elektrischen Kraft P, Q, R und deren Resultierenden E, bezeichnet man ferner den Winkel zwischen magnetischer und elektrischer Kraft an einer bestimmten Stelle des elektromagnetischen Feldes mit Θ, so findet man nach unschwerer trigonometrischer Rechnung:

[illegible]

Denken wir uns im Medium einen Würfel von dem Volumen 1, dann ist in demselben der Gesamtbetrag an magnetischer und elektrischer Energie

$$(KE^2 + \mu M^2) : 8\pi.$$

Dringt die Energie durch die eine Seitenfläche des Würfels senkrecht in denselben mit der Geschwindigkeit C ein, so ist, da das Quantum der in der Sekunde durch die Würfelfläche 1 strömenden Energie durch (24) gegeben ist und da dieselbe $\frac{1}{C}$ Zeit braucht, um die gegenüberliegende Würfelfläche zu erreichen, bzw. auszutreten, die in dieser Zeit in dem Würfel aufgenommene Energiemenge $E . M . \sin\vartheta : 4\pi C$ und es folgt für die Gleichung:

$$\frac{E . M . \sin\vartheta}{4\pi C} = \frac{KE^2}{8\pi} + \frac{\mu M^2}{8\pi},$$

woraus

$$C = \frac{2 \sin\vartheta}{\frac{KE}{M} + \frac{\mu M}{E}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

resultiert. C wird am größten, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist und wenn $KE^2 = \mu M^2$ wird, d. h. wenn die elektrische Kraft normal

zur magnetischen Kraft ist und wenn die magnetische der elektrischen Energie gleich wird. Dann ist die Maximalgeschwindigkeit:

$$C_{max} = \frac{M}{KE} = \frac{E}{\mu M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Aus dieser Formel folgt $E = C_{max} \,.\, \mu \,.\, M$ und, da nach der Formel für die Gleichheit der beiden Energien

$$E = M \,.\, \sqrt{\frac{\mu}{K}}$$

ist, erhält man:

$$C_{max} = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Wenn sich die Energie im Medium mit dieser Geschwindigkeit strahlenartig fortpflanzt, so sind in jedem Punkte dieser Strahlen die fortgepflanzten magnetischen und elektrischen Kräfte senkrecht zur Strahlenrichtung und selbst untereinander normal polarisiert.

Nach Maxwell verbreiten sich die elektrischen und magnetischen Verschiebungen im Medium in Wellen und stehen senkrecht auf der Richtung ihrer Fortpflanzung; es sind also die elektrischen und magnetischen Wellen Transversalwellen wie jene des Lichtes; das Licht selbst ist nach Maxwell eine elektromagnetische Störung, welche sich nach dessen Theorie genau mit jener Geschwindigkeit fortpflanzt, die durch (27) gegeben ist. Es wurde von Maxwell gezeigt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Störung in der Luft numerisch gleich der Anzahl von elektrostatischen Elektricitätseinheiten in einer elektromagnetischen Elektricitätseinheit ist und dass die hiefür erhaltene Zahl mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes übereinstimmt.

Es stimmt — und darauf wurde von Poynting aufmerksam gemacht — nach den obigen Betrachtungen die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der elektromagnetischen Störung in einem Medium mit der Maximalgeschwindigkeit, mit der die magnetische und elektrische Energie zusammen fortgepflanzt werden können, überein.

Die Strahlen der Energie sind nach den vorgetragenen Erörterungen identisch mit den Lichtstrahlen und es wird nach

Maxwell infolge der vereinigten Wirkung der elektrischen und magnetischen Kräfte ein Druck in der Fortpflanzungsrichtung der Energie ausgeübt.

III.

Als Anwendung der vorstehenden Lehren betrachten wir einen Draht von der Länge l und dem Radius r, in dem ein stationärer galvanischer Strom fließe. Die elektrischen Kraftlinien sind an der Drahtoberfläche parallel der Längenrichtung des Drahtes, die magnetischen sind Kreise, welche als Schnittlinien des Querschnittes mit der Oberfläche zu betrachten sind. Es tritt nach der vorgetragenen Theorie die Energie in jedem Punkte der Drahtoberfläche senkrecht zur Mantelfläche ein; durch die Enden des Drahtes findet keine Energieströmung statt, weil daselbst keine Componenten der elektromotorischen Intensität vorhanden sind. Da bei stationärem Strome keine andere Energieänderung vorkommt, muss die ganze durch die äußere Oberfläche eintretende Energie gleich der infolge des Widerstandes im Leiter entstehenden Wärme sein. Dies ergibt sich leicht: Ist M die magnetische Intensität an der Oberfläche des Drahtes, E die elektrostatische Kraft an einer beliebigen Stelle im Drahte oder die elektromotorische Intensität, V der Potentialunterschied zwischen den Drahtenden, dann ist die von außen in einer Secunde eintretende Energie:

$$Q = \frac{2\pi r l \,.\, \mathrm{E} \,.\, \mathrm{M}}{4\pi}.$$

Nun ist $\mathrm{E} \,.\, l = V$; ferner ist die Arbeit beim Bewegen eines Einheitsmagnetpoles um den Draht in einer magnetischen Kraftlinie $2\pi \,.\, r \,.\, \mathrm{M}$ oder nach den elektromagnetischen Grundgesetzen auch $4\pi i$, somit $r\mathrm{M} = 2i$ und dann folgt:

$$Q = Vi = i^2 R,$$

wenn R den Drahtwiderstand bezeichnet; dies ist aber die im Drahte entwickelte Joule'sche Wärme.

Es verhalten sich somit nach den hier dargelegten Anschauungen die Dinge so, dass die Stromenergie gar nicht durch den Draht der Länge nach geht, sondern dass sie, von der Elektricitätsquelle ausströmend, durch das nichtleitende, den Draht umgebende Medium in denselben einströmt und dass sie

unmittelbar nach dem Eintreten in Wärme verwandelt zu werden beginnt. Diese Verwandlung der Energie in Wärme erfolgt nach dieser Auffassung zuerst in den Oberflächenschichten und es dringt die Energie in das Innere des Leiters mehr oder weniger tief ein, je nachdem man es mit constanten oder mit mehr oder weniger rasch alternierenden Strömen zu thun hat. Bei sehr rasch verlaufenden Wechselströmen (Hertz'sche Schwingungen) bleibt die Energie ganz auf der Oberfläche und die Oberflächenschichte des Leiters gewährt in diesem Falle, wie von Hertz, Stefan (l. c.) u. a. experimentell gezeigt wurde, dem Innern des Leiters einen elektrodynamischen Schutz (Schirmwirkung).[1]) Die in den Metallmassen stattfindende Absorption von elektromagnetischer Energie verläuft nach den neueren Versuchen von V. Bjerkness[2]) um so schneller, je größer der specifische Leitungswiderstand und der Magnetismus des Metalles ist. Wenn in einem Medium der primäre und der secundäre Leiter sich befinden, so ist ursprünglich die Energie in elektrostatischer Form vorhanden, sie erfüllt den ganzen Raum, ist aber dennoch an den Primärleiter gebunden. Eine Auslösung erfolgt beim primären Leiter durch den Funken, dann kommt die Energie in Bewegung, und zwar in Form von elektromagnetischen Wellen. Der durch Influenz anfänglich polarisierte Secundärleiter besitzt auch Energie und nimmt von den vorüberziehenden Wellen größere Energiemengen auf und liefert elektrische Schwingungen. Die aufgefangene Energie wird zum Theil vom secundären Leiter, wie vom primären Leiter, wellenförmig ausgestrahlt, zum Theil findet im stromführenden Drahte eine Wärmeentwicklung statt, herrührend von der absorbierten elektromagnetischen Energie, welche Absorption in verschiedenen Metallen verschieden stark ist.

Auf verschiedene andere Fälle der Bewegung der elektromagnetischen Energie ist von Poynting l. c. aufmerksam gemacht worden. Wir wollen an dieser Stelle nur noch den Fall eines Stromkreises betrachten, der einen Motor enthält.

---

[1]) O. J. Lodge, Journ. of the Soc. of Arts; May 1888 und Phil. Mag. 26, 1888, p. 217. — L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes, I. Th., Leipzig 1891, p. 103.

[2]) V. Bjerkness, Die Resonanzerscheinungen und das Absorptionsvermögen der Metalle für die Energie elektrischer Wellen (Wied. Ann., Bd. 47, 1. Heft, 1892).

Hat derselbe keine Geschwindigkeit, dann schneiden alle Niveauflächen den Stromkreis und die den Elektromotor verlassende Energie wird ganz in Joule'sche Wärme verwandelt. Beim Antreiben des Motors, den wir jedes inneren Widerstandes bar voraussetzen wollen, nimmt der Strom ab, die Niveauflächen convergieren dann gegen den Motor und schneiden den Stromkreis in geringerer Zahl. Es wird ein Energiebetrag im Motor in Arbeit verwandelt. Im äußersten, idealsten Falle schneidet gar keine Niveaufläche den Stromkreis, alle gehen in den Motor, die ganze Energie wird dann im letzteren in Nutzarbeit umgewandelt.

IV.

In seiner Abhandlung „Über veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten" zeigt Stefan, ausgehend von der Theorie der Induction von F. Neumann und W. Weber, dass die Berechnung der Vertheilung der Stromdichte eines veränderlichen Stromes in einem Drahte von kreisförmigem Querschnitte zur Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

führt, wenn u die Stromdichte, σ der specifische Widerstand des Metalles, r die Entfernung eines Punktes von der Achse des Drahtes und $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ ist, wenn $\varkappa$ die Magnetisierungszahl bedeutet. Dies ist aber dieselbe Gleichung wie jene, welche die Temperaturvertheilung in einem Cylinder bestimmt unter der Voraussetzung, dass derselbe nur durch seine Mantelfläche Wärme durch Strahlung an den umgebenden Raum abgibt oder aus demselben empfängt und die Wärmestrahlung nach dem Gesetze von Newton erfolgt. In der entsprechenden Gleichung des thermischen Problems ist statt $\frac{\sigma}{4\pi\mu}$ der Quotient aus dem Wärmeleitungscoefficienten und der specifischen Wärme der Volumseinheit des Cylinders zu setzen. Auch die Gleichung für die Oberfläche des Cylinders im Wärmeleitungsproblem ist ganz analog jener für den Fall der Elektricitätsströmung geltenden.

Entsprechend dieser Analogie verhält sich ein Leitungsdraht, in dem plötzlich eine constante elektromotorische Kraft eingeschaltet wird, wie ein in allen Theilen gleich warmer Cy-

linder, der in einen Raum von constanter, aber höherer Temperatur gebracht wird. Es gleicht die Wirkung der elektromotorischen Kraft — wie es in Übereinstimmung mit den vorigen Betrachtungen ist — der Einstrahlung von Wärme. Der Strom gelangt zuerst in den Oberflächenschichten des Drahtes zu seiner definitiven Dichte, erst später in den inneren Schichten, zuletzt im centralen Faden. Nach Entfernung der elektromotorischen Kraft entsteht im Drahte ein Extrastrom und dessen Verlauf entspricht der Abkühlung des warmen Drahtes in einem kälteren Raume. Es ist aus der Discussion des Wärmeleitungsproblems bekannt, dass, wenn die Temperatur des Außenraumes variabel ist, die Amplituden der Temperaturschwankungen gegen die Achse abnehmen, und zwar je kürzer die Periode dieser Schwankungen ist, um so bedeutender; die Schwankungen haben gleichzeitig in den verschiedenen Schichten verschiedene Phasen und es treten die Maxima in den von der Oberfläche entfernteren Stellen um so später ein, je tiefer von der Oberfläche diese Stellen liegen. Ebenso verhält es sich in den elektrischen periodischen Strömungen; dieselben können unter Umständen in den Oberflächenschichten und den axialen Fasern entgegengesetzt gerichtet sein. Bei größerem specifischen Leitungswiderstande eines Drahtes werden die Abweichungen von der Gleichförmigkeit der Stromvertheilung geringer, sie sind in Eisendrähten sehr bedeutend. Dass man das Innere eines Leiters einer rasch oscillierenden Bewegung als stromlos betrachten kann, begründet Stefan in der Weise, dass dort die äußere elektromotorische Kraft und jene der Selbstinduction des Leiters das Gleichgewicht sich halten. Durch Rechnung findet Stefan, dass in einem Eisendrahte (4 *mm* Durchmesser), in dem der Strom 250 ganze Schwingungen in der Secunde vollführt, die Stromschwingungen in der Oberfläche des Drahtes eine mehr als 2·5mal so große Amplitude als jene in der Achse haben und dass diese den letzteren nahe um ein Drittel der ganzen Schwingungsdauer voraus sind. Bei einem Strome von doppelt so kurzer Periode haben die Oberflächenschwingungen eine fast sechsmal größere Amplitude als jene in der Achse und sind diesen nahezu um eine halbe Schwingungsdauer voraus. Bei einem Kupferdrahte findet man für den Strom von 250 Schwingungen die Vertheilung der Stromdichte sehr wenig von der Gleichförmigkeit abweichend. Auch die Phasendifferenzen der Schwingungen in der Achse

und in der Oberfläche sind nur gering. Es ist bereits von Lord Rayleigh beobachtet worden, dass der Widerstand eines Drahtes, in dem rasche elektrische Schwingungen stattfinden, vergrößert erscheint; dies hat nach der Stefan'schen Darlegung darin seinen Grund, dass die inneren Schichten sich wenig an der Stromleitung betheiligen und dass unter Umständen die Mittelschichten die Elektricität in einer Richtung leiten, welche jener in der Oberfläche entgegengesetzt ist. Infolge derselben Umstände tritt auch eine Verminderung der Wirkung der Selbstinduction ein und es kann durch die Vereinigung der beiden Thatsachen geschehen, dass — namentlich bei Strömen von hoher Schwingungszahl — trotz der Zunahme des Widerstandes keine Verkleinerung, sondern eine Vergrößerung der Stromintensität eintritt. Es ist aber zu betonen, dass alle diese aus der Theorie gezogenen Folgerungen nur dann streng giltig sind, wenn die Stärke der Magnetisierung des Eisens zur Größe der magnetisierenden Kraft in einem constanten Verhältnisse sich befindet.

V.

Alle Elektricitätsquellen sind nach der Äthertheorie der Elektricität als Erreger von Bewegungen des das ganze Weltall erfüllenden Lichtäthers zu denken. Diese Erregung findet z. B. in den Hydroelementen durch eine Auslösung von chemischer Energie statt. Die Energie der Ätherbewegung geht nach Poynting strahlenartig von der Elektricitätsquelle aus, durchsetzt das dielektrische Medium und wird von den Leitern aufgefangen und in denselben zum Theil absorbiert und in andere Energiearten, vorzugsweise in Wärme, umgesetzt. Durch die an den Leiter anprallende Ätherbewegung wird der den ersteren umgebende, ursprünglich ruhende Äther bewegt und auf diese Weise der Leiter zum Sitz einer statischen elektrischen Ladung oder einer Elektricitätsströmung gemacht. Immer aber ist nach den vorgetragenen Auffassungen der Leiter als Regulator der Energiebewegung zu denken und längs seiner Oberfläche gleitet die elektromagnetische Energie fort und wird übertragen. Die Rolle der Leiter ist nach der Auffassung von Maxwell somit eine ganz andere als nach den früheren Theorien der Elektricität, nach welchen dem die Leiter umgebenden Medium keine weitere Einflussnahme auf die Erscheinungen

zugewiesen wurde. Die Athertheorie der Elektricität scheint durch die theoretischen Forschungen von Poynting, Heaviside und anderen, sowie durch die Experimentaluntersuchungen namentlich von Hertz eine neue Stütze gewonnen zu haben. Nach der Theorie der Ätherverschiebung müssen wir uns einen Leiter, in dem elektrische Schwingungen stattfinden, vorstellen als umgeben mit einer Ätherhülle, welche entsprechend der Frequenz der Schwingungen in Pulsationen, welche normal zur Leiteroberfläche stattfinden, kommt. Da sich der Äther wie eine incompressible Flüssigkeit verhält, so werden diese Pulsationen in dem umgebenden dielektrischen Medium fortgepflanzt, bis sie an einen secundären Leiter gelangen; einer Verschiebung des Äthers auswärts vom primären Leiter (positive Ladung) wird eine Verschiebung des Äthers einwärts gegen den secundären Leiter (negative Elektricität) entsprechen und wir finden auf diese Weise unschwer das Phänomen der Inductionsströme erklärt. Die Verschiebung des Äthers an der Oberfläche des secundären Leiters wird sich von der Oberfläche dem inneren Äther mehr oder weniger schnell mittheilen, und zwar werden die inneren Partien des Leiters sehr wenig in Mitleidenschaft gezogen werden, wenn die Pulsationen des Äthers an der Oberfläche sehr rasch stattfinden, ähnlich wie dies für die Wärmeverbreitung und für die Fortpflanzung einer Wellenbewegung, die an der Oberfläche einer Flüssigkeit erregt wird, gegen das Innere derselben gilt. Dies ist die Theorie der elektrodynamischen Schirmwirkung auf Grund der Ätherhypothese. Dass das ponderable Medium, welches das Dielektricum erfüllt, einen großen Einfluss auf die Fortpflanzung der Ätherverschiebung hat, ist begreiflich und durch die Gleichung, welche von Maxwell für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Störung, von Poynting für jene der elektrischen und magnetischen Energie aufgestellt wurde, zum Ausdruck gebracht. Ebenso haben die ponderablen Molecüle des Leiters einen Einfluss auf die Geschwindigkeit des Eindringens der elektrischen Energie in denselben.



VI.

Über die

Beugung des Lichtes durch ein ebenes Doppelgitter.

Von

Dr. Karl Exner,

Professor am k. k. Staatsgymnasium im IX. Bezirke in Wien.



In der angewandten Physik findet der Fall Interesse, wo das Licht durch zwei identische, in derselben Ebene parallel liegende Gitter gebeugt wird. Das Folgende enthält die Berechnung so entstehender Beugungsbilder.

Liegen die Gitter identisch übereinander, so wirken sie wie ein einziges Gitter. Ist a die Breite einer Öffnung und δ der Beugungswinkel, so hat man für die Intensität einer Öffnung:

$$i = a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} = a^2 . f.$$

Die Minima ($= 0$) von f treten ein für

$$\sin \delta = \frac{m \lambda}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Die Intensität sämmtlicher Öffnungen ist:

$$I = a^2 f . \frac{\sin^2 n \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}} = a^2 . f . f',$$

wenn n die Zahl der Öffnungen und $a + d$ die Gitterconstante bedeuten.

Der Factor f' hat Maxima ($= n^2$) für

$$\sin \delta = \frac{m \lambda}{a + d} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)},$$

während die Räume zwischen zwei benachbarten Maximis nahe völlig dunkel sind.

Die Erscheinung besteht also aus äquidistanten hellen Linien (II), welche nur bei (I) verdunkelt sind.

Es werde nun eines der beiden Gitter gegen das andere um $\varepsilon < d$ verschoben. Da ändert sich a, während $a + d$ unverändert bleibt. Demnach ändern die Minima (I) ihre Lage und werden

$$\sin\vartheta = \frac{m\lambda}{a - \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Ia)}$$

Während sich also die gegenseitige Entfernung dieser Minima vergrößert, bleibt die Lage der Hauptmaxima unverändert.

Es werde $\varepsilon = d + \eta$. Man hat nun zwei Gitter. Für eines ist die Öffnung η, für das andere $a - (d + \eta)$. Die Gitterconstante ist aber für jedes der beiden Gitter immer noch $a + d$. Sind I_1 und I_2 die diesen beiden Gittern entsprechenden Intensitäten, so hat man für das combinierte Gitter:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi (a + d) \sin\vartheta}{\lambda}.$$

Die Hauptmaxima behalten immer noch ihre, der Gitterconstante $a + d$ entsprechenden Lagen, nur die periodischen Verdunklungen dieser Maxima entsprechen anderen Beugungswinkeln.

Um dies näher zu untersuchen, kann man, von dem Babinet'schen Principe Gebrauch machend, die gedeckten Stellen des Gitters durch offene und die offenen Stellen durch gedeckte ersetzen, ohne an der Beugungserscheinung etwas zu ändern; hiedurch werden die Öffnungen der beiden componierenden Gitter gleich breit $= d$.

Für jedes der beiden Gitter wird dann

$$I = d^2 \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{d \sin\vartheta}{\lambda}}{\pi^2 \cdot \frac{d^2 \sin^2\vartheta}{\lambda^2}} \cdot f' = d^2 \cdot f'' \cdot f'.$$

und für das combinierte Gitter ergibt sich folglich:

$$I = 4 d^2 \cdot f'' \cdot f' \cdot \cos^2 \pi \frac{(d - \eta) \sin\vartheta}{\lambda} = 4 d^2 \cdot f'' \cdot f' \cdot f'''$$

oder

$$I = 4\,d^2 . \frac{\sin^2 \pi \frac{d \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{d^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} . \frac{\sin^2 n \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}} . \cos^2 \pi \frac{(d+\eta) \sin \delta}{\lambda} =$$

$$= 4\,d^2 . f'' . f' . f''' \ldots\ldots (III)$$

f'' hat Minima ($= 0$) für $\sin \delta = \frac{m \lambda}{d} \ldots\ldots\ldots\ldots (Ib)$

f' hat Maxima ($= \eta^2$) für $\sin \delta = \frac{m \lambda}{a+d} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

f''' hat Minima ($= 0$) für $\sin \delta = \frac{(2m+1) \lambda}{(2d+\eta)} \ldots\ldots (IV)$

Es ergibt sich sonach für die Gittercombination:

Die Gittercombination zeigt (bei homogenem Lichte) dieselbe Folge äquidistanter heller Linien wie ein einziges der Gitter, doch erscheinen dieselben durch die Factoren f'' und f''' periodisch verdunkelt.

Noch übersichtlicher werden die Verhältnisse, wenn man d als sehr klein voraussetzt. Man erhält:

$$I = 4\,d^2 . \frac{\sin^2 n \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}} . \cos^2 \pi \frac{\eta \sin \delta}{\lambda} \ldots\ldots (IIIa)$$

Der erste Factor hat Maxima ($= n^2$) für $\sin \delta = \frac{m \lambda}{a}, \ldots\ldots (IIa)$

der zweite Factor hat Minima ($= 0$) für $\sin \delta = \frac{(2m+1) \lambda}{2 \eta}$, (IVa)

wo jetzt a die Gitterconstante ist. Die gewöhnliche Serie heller Linien, welche man durch ein einziges der beiden Gitter erhält, bleibt also bei der Combination bestehen, nur erscheinen die hellen Linien (entsprechend der Gl. IVa) periodisch verdunkelt.

Es mögen insbesondere die Stäbe des einen Gitters in der Mitte der Zwischenräume des anderen liegen. Hier müssen offenbar (entsprechend einem Gitter von doppelter Zahl der Stäbe) die hellen Linien eine doppelt so große gegenseitige Entfernung haben wie bei einem einzigen Gitter. Man hat in der That, wenn wieder d als sehr klein angenommen wird, $\eta = \frac{a}{2}$, und die Gleichungen (IIa) und (IVa) geben

Maxima für $sin\,\delta = \frac{m\,\lambda}{a}$,

verdunkelt für $sin\,\delta = \frac{(2\,m + 1)\,\lambda}{a}$,

d. h. es entfällt jede zweite helle Linie.

Auch in der folgenden Weise kann der Gegenstand dargestellt werden.

Ein Gitter, dessen Stäbe sehr dünn sind, gibt (bei homogenem Lichte) eine Reihe äquidistanter heller Linien, welche der Lage nach gegeben sind durch

$$sin\,\delta = \frac{m\,\lambda}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

m ganze Zahl,
λ Wellenlänge,
a Gitterconstante.

Hat man eine Combination zweier identischer Gitter, welche um η gegeneinander verschoben sind, so kann man nach dem Babinet'schen Principe die Stäbe als Spalten und die Zwischenräume als undurchsichtig in die Rechnung einführen. In einer gegebenen Beugungsrichtung setzen sich die von den (als Spalten betrachteten) Stäben des Gitters kommenden Elementarstrahlen zu Schwingungen von der Amplitude x zusammen, und die vom anderen Gitter kommenden ebenso. Diese beiden resultierenden Strahlen interferieren und geben eine resultierende Bewegung, deren Excursion y gegeben ist durch

$$y^2 = 4\,x^2\,cos^2\,\frac{\varphi}{2},$$

wenn φ der Phasendifferenzwinkel ist. Aus

$$\varphi : 2\,\pi = \eta\,sin\,\delta : \lambda$$

folgt dann

$$I = 4\,i\,.\,cos^2\,\pi\,\frac{\eta\,sin\,\delta}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

I Intensität des combinierten Gitters,
i „ „ einzelnen „

Es unterscheidet sich also das Phänomen des combinierten Gitters von jenem des einfachen nur dadurch, dass die hellen

Linien, entsprechend dem Factor $cos^2 \pi \frac{\eta \sin \delta}{\lambda}$, periodisch verdunkelt erscheinen. Bei wachsender Verschiebung η bewegen sich die Verdunklungen von den peripheren Theilen des Phänomens gegen die centralen.

Für eine kleine Verschiebung η entfernt sich dieser Factor nur langsam von der Einheit, das Beugungsbild verändert sich wenig. Später wird dieser Factor $= 0$ für

$$\sin \delta = \frac{(2m + 1)\lambda}{2\eta}, \qquad (3)$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Bei $\eta = \frac{a}{2}$, wenn die Stäbe des einen Gitters genau in der Mitte zwischen den Stäben der anderen liegen, tritt Verdunklung ein für

$$\sin \delta = \frac{(2m + 1)\lambda}{a},$$

d. h. es verschwinden die ungeradzahligen hellen Linien des Beugungsbildes eines einzigen Gitters, da diese letzteren gegeben sind durch

$$\sin \delta = \frac{m\lambda}{a}.$$

Man hat dann das Phänomen eines Gitters von doppelter Zahl der Stäbe.

VII. Abtheilung.

Naturgeschichte.

I.

Zur Conchylienfauna von China.

XVII. Stück.

Von

P. Vincenz Gredler,

Director des Privatgymnasiums der Franciscaner in Bozen.



Vorbemerkung. Ein „XVII. Stück“ erscheint als ein Bruchstück, als eine Fortsetzung von anderswo und somit nicht geeignet für eine Programmarbeit. Allein so wie die früheren Beiträge „Zur Conchylien-Fauna von China“ bildet auch dieser eine unabhängige Studie für sich; hiezu kommt noch, dass in den Jahren, wo unsere Lehranstalt noch ohne Öffentlichkeitsrecht und zur Programmausgabe nicht gehalten war, für zugesandte Gymnasialprogramme als Äquivalent die ersten „Stücke“ an viele Schulen abgegeben wurden, dass ferner Separatabzüge der ersten neun Lieferungen bei Friedländer in Berlin (zu 24 Mk.), der späteren bei Soëding in Wien in Verlag, und die Conchylien selbst bereits mehrfach in öffentlichen Museen und Privatsammlungen vertreten sind. — Wohl laufen aus West-Hupé, aus welcher Provinz die meisten der nachstehend beschriebenen Arten stammen, allmählich nur mehr wenige Novitäten ein, nachdem gerade aus diesem Districte und der angrenzenden Provinz Sy-tchuan die Herren Deshayes, Möllendorff, Heude, Ancey, Hilber, der Verfasser u. a. bereits sehr vieles publiciert haben. Immerhin aber bekundet sich besagtes Gebiet „der Mitte“ als eines der gesegnetsten des „Himmlischen Reiches“ und bezüglich der Gattung Clausilia, aus welcher China neben Japan die größten und kleinsten Individuen der Erde beherbergt, fast unerschöpflich.

Auch auf diesem Boden waren es hauptsächlich (katholische) Missionäre, die das Innere des unnahbaren Reiches erschlossen, so dass von demselben gegenwärtig an 1000 Species von Binnenmollusken bekannt sind, nachdem man vor einem halben Menschenalter noch nicht 100 zählte. Und wieder sind es die Gebrüder K. und L. Fuchs von der Tiroler Franciscaner-Provinz, die den

Löwenantheil an all diesen Entdeckungen genommen. Leider ist dies mir so werte Brüderpaar nicht ebenso mittheilsam über die geographische Lage, physikalische Beschaffenheit ihres Sammelgebietes oder über die näheren Verhältnisse des Vorkommens einzelner Arten, da beide ihrem nächsten Berufe mit heroischer Hingabe leben. So weiß ich nur, dass das nachstehend erwähnte Se-cu-san, die gegenwärtige Missionsstation des P. Lorenz, etwa sechs Tagereisen von der bekannten Hafenstadt I-tschang am Yangdsekiang entfernt im Gebirge gelegen ist. P. Kaspar, ehedem in Hunan, ist neuestens in Cin-san (Ost-Hupé), 300—400 Li nordwestlich von Hankow stationiert, einer auch zum Sammeln günstigen terra incognita, die sicher noch manche Novität birgt.

I.

Diagnosen neuer Arten und Varietäten.

1. **Patula atoma** Gredl. n. sp.

Testa minima, mediocriter umbilicata, depresse convexiuscula, spira parum elevata, costulis membranaceis distantibus cooperta, obscure fusca, sericina; anfractus 3, solito rapidius crescentes, convexiusculi, infra convexi, ad peripheriam vix angulati, sutura profunda; apertura ampla, subcircularis, subobliqua; peristoma simplex, rectum, marginibus fere conniventibus.

Lat. $1^1/_2$; *alt.* $^2/_3$ *mm.*

Dieses minutiöse Geschöpf aus der Provinz Hunan, kaum größer als die europäische P. pygmaea Drap., liegt seit Jahren in zwei Exemplaren in meiner chinesischen Sammlung. Ich wollte eben erst eine größere Anzahl abwarten; da jedoch gegenwärtig kein tirolischer Missionär in dieser unruhigsten Provinz von China mehr verweilt, das in Rede stehende Thierchen aber sehr auffällig gekennzeichnet ist, wage ich auf Grund dieser beiden Stücke ihre Publication. Patula atoma hat, mit ihrer nächst verwandten und bekannten P. pygmaea verglichen, einen merklich engeren Nabel, zumal unterseits gewölbtere und an Umfang rascher zunehmende Umgänge, daher sie ungeachtet der geringeren Anzahl derselben etwas größer erscheint, ist von dunklerer Färbung und vor allem dadurch ausgezeichnet, dass

der letzte Umgang in ziemlich weiten Distanzen von häutigen, nach dem Peristom zu immer kräftigeren Rippen, die gegen den Nabel verschwinden, bogig umzogen ist. — Mit der ungleich größeren, beinahe glatten „Helix orphana“ Hde. von Shanghai, die von den bisher bekannt gewordenen chinesischen Landconchylien ihr noch einigermaßen nahe kommt, ist eine Verwechslung unmöglich.

Über die generische Zutheilung dieser Minutie lässt der Totalhabitus ungeachtet der etwas geringen Nabelweite und verhältnismäßig rascheren Zunahme der Umgänge keinem Zweifel Raum.

2. **Helix** (Acusta Alb.) **Secusana** Gredl. n. sp.

Testa subobtecte umbilicata, globosa, spira depresso-conica, apice obtuso, tenuis, translucida, levissime striatula, indistincte decussata, nitidula, albido-aut flavido-hyalina, supra peripheriam duabus filiformibus aut una latiore fascia rubida ornata; anfractus $5^1/_2$, *regulariter crescentes, convexi, ultimus ad umbilicum inflatulus; apertura rotundato-lunaris, valde obliqua; peristomatis margo acutus, intus sublabiatus, superior vix dilatatus, inferior parum reflexus, ad columellam subangulatus, columellaris magis reflexus, ad umbilicum semitectum dilatatus.*

Diam. 14—16; alt. 9—10 mm.

Eine sehr zierliche, mittelgroße kugelige Art von papierdünnem, sehr durchscheinendem Gehäuse, das weißlich- oder gelblich-hyalin oder wie aus chinesischem Porzellan oder Achat gefertigt, und diesbezüglich mancher weißlichen Cochlostyla von den Philippinen oder einer Nanina infantilis m. vergleichbar. Ebenso niedlich nehmen sich die zwei, kaum 1 mm voneinander entfernten, fädlichen, rothbraunen Bänder aus (forma biserialis m.), indes eine, wie es scheint seltenere Nebenform nur ein breites Band über der Peripherie trägt (forma uniserialis m.), in der Regel milchweiß und merklich weiter genabelt ist. Über die Zusammengehörigkeit beider kann gleichwohl kaum ein Zweifel sein, wenn auch keine Übergänge (durch Verschmälerung oder theilweise Trennung des breiten Bandes od. dgl.) vorliegen. Analoge Erscheinungen geben uns Helix nemoralis, hortensis u. s. w. Immerhin aber verdienen beide Formen als solche eine eigene Benennung.

Mit den ebenfalls zweibänderigen chinesischen Frutico-Campylaeen Heudei und Gredleri Hilber ist unsere Art füglich

nicht zu vergleichen. Obgleich auch eine Verwechslung — zumal der f. biserialis — mit H. similaris Fér. nicht denkbar, so ist doch letztere, die zugleich um Se-cu-san in der Größe ungewöhnlich constant und diese mit H. Secusana vollständig theilt, in China die nächste Verwandte, so dass zunächst nur die kräftigere Streifung und das breit ausgelegte verdickte Peristom sie von unserer Art unterscheidet. Helix virilis m. von ähnlicher Größe und Schalen-Consistenz, sowie von fast gleichem Standorte, trennt sich durch den weiten Nabel und das breite braune Band um denselben. Endlich tritt H. Secusana f. biserialis — vielleicht allernächst — an Eulota bitaeniata Mlldff. von den Tenimber Inseln (Malaiischen Archipel) heran (man vgl. Nachr. Bl. d. deutsch. mal. Gesellschaft 1892, S. 91, Taf. I, Fig. 7). Jedenfalls hat letztere ihre nächste Verwandte in Secusana zu suchen.

Das Thier fast weißlich, an den Flanken bräunlich-isabell, über dem Rücken mit breitem, lichterem Streifen; die Fühler dünn und lang.

Mir hatten ungefähr 50 Stücke, von P. Lorenz mitgetheilt, zur Untersuchung vorgelegen.

3. **Helix Vagoina** Gredl. var. **Aloysii**, n.

Testa concolor brunea, strigis tantummodo arcuatis albidis decorata.

Eine hübsche Varietät dieser zierlichen Schnecke gieng mir mit dem Typus aus Se-cu-san (P. Lorenz) zu. Selbe zeigt wohl noch die weißen, unterbrochenen und beinahe S-förmig gebogenen Querstriemen, aber keine Spur von gelblichen und satt-kastanienbraunen Spiralbändern, sondern besitzt durchweg braune Grundfarbe, gleich einer H. arbustorum v. picea.

Wie die Species dem nunmehr abgetretenen verdienstvollen Ordensgeneral Vago, benenne ich die Varietät dem gegenwärtigen General des Franciscaner-Ordens R. P. Aloysius zu Ehren.

4. **Helix** (Fruticicola) **reformata** Gredl. n. sp.

Testa mediocris, semiobtecte-umbilicata, globoso-depressa, spira elevata, apice obtuso, inaequaliter transverse striata, tenuis et translucida, fulvo-cornea, linea obscuriore evanida supra peripheriam ornata; anfractus $5^1/_2$, convexi, regulariter crescentes, ultimus magnus, inflatulus, ad insertionem obtusissime angulatus, brevissime descendens; apertura oblique rotundato-lunaris (alt. 10, lat. 11 mm); peristoma tenue, leviter

et breviter expansum labiatumque, margine columellari superne plus minusve in lobum, umbilici partem obtegentem dilatato.

Diam. 17—20; alt. 12 mm.

Eine kritische Art, die fast nur durch Vergleich mit verwandten zur Vorstellung und hinwieder zur Unterscheidung von diesen gebracht werden mag. Sie steht zwischen Hel. Hungerfordiana Nev.*) und den größten Formen von similaris Fér. und assimilaris m., jedoch der Hungerfordiana entschieden näher, entbehrt aber der Körnelung (Borstenspuren) in der Sculptur**), deren Nabelweite und vor allem der Niedrigkeit des Gewindes, indes sie in der gelbbräunlichen Färbung völlig mit H. Hungerfordiana übereinstimmt. An H. similaris erinnert die halbverdeckte Nabelöffnung, die kugelige Gestalt und selbst ein kaum wahrnehmbar angedeutetes bräunliches Band über der Peripherie, sowie die unregelmäßige Streifung der Oberfläche. Dagegen sind die einzelnen Umgänge und daher auch die campylaeenartige Mündung niedriger; der Mundsaum, schmäler ausgelegt, besitzt nur schwachen Lippenbeschlag und entbehrt des winkeligen Anschlusses des Außenrandes an den Spindelrand gänzlich. Endlich ist der Spindelrand am oberen, den Nabel zur Hälfte bedeckenden Ende meist ohr- oder lappenartig erweitert.

Aus Se-cu-san in erklecklicher Anzahl übermittelt von P. L. Fuchs.

5. **Helix Franciscanorum** Gredl. var. **purpurea,** n.

Differt a typo testa fortiore, spira elevatiore, convexa, purpurea; anfractu ultimo altiore, inflato; peristomate isabellino, magis labiato, margine superiore minus rotundato-elevato.

Diam. 28—33, alt. 15—18 mm.

Um Secusan findet sich neben der typischen Art — allerdings nicht ohne Übergänge zu dieser — eine purpurfarbige Varietät von kräftigerem Baue, festerer Schale und höherem, convexem Gewinde, welches gewöhnlich auch um einen halben Umgang mehr ($5^1/_2$) zählt. Die Lippe ist gleichfalls stärker und isabell. Hauptsächlich ist der letzte Umgang aufgeblasener, höher, so dass sich ihr Verhältnis zum Typus wie Campylaea umbilicaris

*) Diese Art reicht nördlich auch in die Provinz Hunan hinein.

**) Auf diesen Mangel wird auch aus dem Grunde ausdrücklich hingewiesen, weil gerade verwandte Arten, die Deshayes beschrieben, sowie H. Franciscanorum m. durch diese Körnelung sich auszeichnen.

zu Tiesenhauseni gestaltet. Ohne Übergänge zu kennen, würde man sie unbedingt als Species aufstellen.

6. **Buliminopsis***) **cerasinus** Gredl. n. sp.

Testa magna, solida, turrita, apice maxime obtuso, imperforata, inaequaliter partimque rugulose, transverse striata, epidermide faciliter decidua, colore cerasino, haud raro viridi-flavo (forma albina?), nitidula; anfractus $8^1/_2$*—10, parum convexi, suturá profundá, regulariter sensim accrescentes, ultimus basim versus non attenuatus, vix* $^1/_4$ *altitudinis universae attingens; apertura oblique recedens, quadrilaterali-ovata, pariete exserta, magnitudine et forma varians, columella curta, modo recta, modo introrsus incurva, ad basim columellae vix subangulata, intus castanea; peristoma brevissime expansum, reflexiusculum, albido-purpureum, sublabiatum, marginibus distantibus, columellari brevi, supra adnato, callo parietali debili conjunctis.*

Alt. 30—38; lat. 9 mm.

Die größte und kräftigste aller bisher in China aufgefundenen Arten dieser Gattung und der Form nach nächste Verwandte meiner Stenogyra mira; durch die kirschrothe (ausnahmsweise auch ölgrünliche) Färbung**) leicht kenntlich, ja von

*) P. Heude stellte in seinem mehrerwähnten Werke über die Mollusken von China 1890, S. 146, die Gattung Buliminopsis auf, mit den früher beschriebenen Arten Helix buliminus (Taf. XX, Fig. 20), buliminoides (Taf. XVII, Fig. 6) und pseudobuliminus (Taf. XVII, Fig. 29), denen er (l. c.) noch die zwei Arten quaternarius (Taf. XXXVII, Fig. 24, angeblich subfossil; auf der Tafel erscheint der Name B. borealis H., welcher Name hat zu gelten?) und conoidius (Fig. 25) anreihte. Zu den fünfen gehört ferner B. doliolum m., welche Art, in jeder Beziehung die Mitte haltend, als Typus gelten könnte und endlich als die Krone aller der in Rede stehenden B. cerasinus. Die Gattung, deren Arten auf West-Hupé und das westlich angrenzende Sy-sthuan angewiesen und in Größe, Habitus, Mündung u. s. w. ziemlich variabel scheinen, hat insofern Berechtigung, als alle die hierin begriffenen Thiere ebenso nahe an Helix, Buliminus und selbst (B. cerasinus) an Stenogyra herantreten, oder besser von allen sich entfernen, so dass sie nirgends füglich einverleibt werden können, aber unter sich eine einheitliche Gruppe bilden. Der Autor P. Heude hat jedoch dies genus mit so wenigen, fast nichtssagenden Charakteren dürftig umrankt („Testa elevato-conica, perforata, spira acuta, apertura obliqua"), dass wir uns veranlasst sehen, seine Diagnose zu vervollständigen. Dieselbe dürfte lauten: Testa perforata (?), spira elevata, turrito-conica, anfr. stricte junctis; apertura valde supina, obliqua, haud alta, columella recta, nec torta nec truncata; peristoma obtusum. Animal?

**) Der Albinismus tritt allerdings auch, und zwar noch häufiger, bei B. doliolum auf.

ihren Gattungsverwandten durch Größe auffallend abweichend. — Das Gehäuse streng cylindrisch-gethürmt, festschalig und wenig durchscheinig. Die Zahl der sehr regelmäßig zunehmenden Umgänge und damit die Gesammthöhe veränderlich: von $8^1/_2$ bis 10 mm, nicht aber die Breite, die am letzten, weitesten Umgang 9 mm beträgt; die Epidermis scheint ziemlich hinfällig, die Streifung ungleich, stellenweise hammerschlägig oder narbig, quer und etwas geschwungen, da und dort mit Spuren von Spiralstreifung, die Naht tief eingezogen, die Umgänge jedoch nur schwach convex. Die Mündung tritt auffallend (fast in einem Winkel von 45°) von der senkrechten Lage zurück, was hauptsächlich maßgebend für die Zuweisung zu Buliminopsis, ist von viereckig-eirunder Gestalt, durch die fast wagrecht liegende Mündungswand abgeschnitten, zur Achse (von vorne gesehen) wenig schief, von Form und Höhe veränderlich, da die kurze, kaum gewundene Spindelsäule bald gerade und an den Unterrand schwach eckig anlehnt oder einwärts gebogen gerundet anschließt, innen purpurn oder kastanienbraun. Der Mundsaum stumpflich, innen kaum gelippt, weißlich oder blass röthlichbraun schmal ausgelegt und zurückgebogen, die weitabstehenden Ränder durch einen schwachen Callus auf der Mündungswand verbunden. Nur der überdeckte Nabelritz — meines Dafürhaltens nicht sehr von Belang — stimmt nicht auf die Gattungsdiagnose.

In einigen 20, leider meist verbleichten oder unausgebildeten Stücken aus Se-cu-san durch P. Lorenz zugesandt erhalten.

7. **Stenogyra** (Opeas) **nutans** Gredl. var. **macra**, n.

Testa distincte angustior, sutura magis obliqua, quare paulo major. — Alt. $19^1/_2$ mm.

Die letzte Sendung aus Hupé (Se-cu-san) brachte auch eine kleinere Anzahl einer Stenogyra, die ich von St. nutans aus Hunan nicht wohl zu trennen und nur durch schlankere Gestalt (Breite 4 : 5 mm), schieferen Ablauf der Naht und merklich bedeutendere Höhe von dieser zu unterscheiden vermag.

8. **Clausilia Oscariana** Gredl. n. sp.

Testa parva, gracilis, turrita, tenuis, pellucida, nitida, regulariter densissime striatula, fusca; anfractus 10—11, convexi, sensim accre-

scentes, sutura impressa, obliqua jejuncti; apertura parvula, rotundato-pyriformis, lamella parietalis marginalis, antice sat valida, brevis, a spirali sejuncta, infera a margine remota, intus bipartita, fuscescens, subcolumellaris et plica principalis nulla, plicae palatales 6, in forma longae lunellae arcuatae dispositae, tenues, utrimque acuminatae et parallelae; peristoma continuum et solutum, superne late sinuatum, tenue, reflexiusculum; sinulus brevis, ampliatus.

Long. 12, lat. $2^1/_4$ mm.

Klein und schlank gebaut, habituell — um an Bekanntes anzulehnen — unserer europäischen Cl. plicatula var. superflua, sowie in der dichten, feinen, nadelrissigen Streifung einer Cl. rablensis Gall. vergleichbar; durch den Mangel einer Principalfalte vor allem gekennzeichnet. Die sehr regelmäßige Zunahme der Umgänge an Höhe und Breite gibt dem Gehäuse eine zierliche, gestreckt thurmförmige Gestalt. Die Gaumenfältchen gedrungen, fast knotenartig, mit spitzem Auslauf an beiden Enden.

Aus West-Hupé in spärlichen Exemplaren von P. L. Fuchs mitgetheilt und meinem Freunde, dem um die Conchylien-Fauna von China hochverdienten Herrn Consul Oscar von Möllendorff zubenannt.

9. **Clausilia Hupeana** Gredl. n. sp.

Testa parvula, fusiformis, gracilis, excepta cervice mediocriter striata, quasi laevis, nitida, purpurea; anfractus $10^1/_2$, convexi, sutura profunda sejuncti, mox latitudine accrescentes, ultimus versus basin valde angustatus et ad rimam umbilicarem coarctatus, supra plicam principalem candicans; apertura parva, ovata, lamellae fortes, gibboso-elevatae, inferior immersa, supera brevis, spirali conjuncta, marginalis, lunellae loco fictivae testa albida, translucida, 7 plicis minutis ornata, plica 2. ceteris plus duplo longior, principalis antice evanida, longa, paulo distans a margine. Peristoma prominulum et solutum, sensim expansum, reflexiusculum, labiatum, album.

Long. 14; lat. 3 mm.

Wohl erscheint Cl. Hupeana dem Verfasser selbst seiner Cl. hupecola bedenklich nahe; jedoch besitzt diese letztere eine stärkere Streifung und matteren Glanz, eine plumpere Gestalt und häufig, zumal wenn deren var. coelicola m. (man vgl. XV. Stück, Nachrichtsbl. 1890, S. 40) der Art in der That einzuver-

leiben ist, welche aber eine völlig andere Spindellamelle hat, eine förmliche Mondfalte, und entbehrt des lichteren Bandstreifens längs der Naht des letzten Umganges. Durch letzteren Umstand tritt Cl. Hupeana auch an die viel größere und in der Oberlamelle völlig verschiedene pallidocincta Mlldff., an parietaria und strictilabris Schm. und Böttg. u. a. heran. Cl. rustica Hde. scheint zugleich geringere Länge- und Breite-Dimensionen zu haben; ist mir in natura nicht bekannt. Immerhin aber bilden Cl. Hupeana, Hupecola und rustica eine nahe verwandte Trias.

Aus Se-cu-san in großer Anzahl (P. Lor. Fuchs).

10. **Clausilia bulimina** Gredl. n. sp.

Testa parva, ventroso-fusiformis, apice obtuso, minutissime ac densissime striatula, lucidissima, flavida; anfractus $9^1/_2$, celeriter crescentes, superiores maxime convexi, medii convexiusculi, latissimi, ultimus versus basim valde attenuatus; apertura parvula, elongato-pyriformis, lamella inferiore exserta, parum obliqua; lamella supera marginalis arcuata, infera profunde immersa, bipartita, ramus superior humilis, lamellam superam pene attingens, ramus inferior fortissimus, subcolumellaris inconspicua, plicis lunellaribus associata, principalis mediocris, longe ante marginem evanida, plicae lunellares cum secundaria paulo majore 6, filiformes, testa in hac parte et cervice aliquantulum tumida albida; peristoma parum expansum, vix incrassatum nec tamen acutum, subsolutum, lacteum.

Long. $11^1/_2$; lat. $3^1/_4$ mm.

Diese durch ihre bauchige Gestalt, ihre Durchsichtigkeit, so dass die Spindelsäule deutlich verfolgt werden kann, durch ihre lichte strohgelbe Farbe, den lebhaften Glanz und die feine Strichelung ausgezeichnete Novität liegt mir leider nur in Einem, aber sehr frischem Exemplare vor. Von den neun Umgängen sind die beiden obersten aufgeblasen, höher und breiter als die nächstfolgenden*), ebenfalls sehr convexen, die mittleren nehmen fast plötzlich an Höhe und Breite zu, so dass das Gehäuse in der Mitte die größte Breite erreicht, indes der letzte Umgang gegen die Basis sich sehr verengt, kaum auch markierte Streifung zeigt. Auffallend ist die kräftige Unterlamelle gegen die nur durchscheinende, durch die Mündung nicht sichtbare, kurze

*) Eine bei chinesischen Clausilien nicht seltene Erscheinung, namentlich aber bei Cl. paradoxa m.

Subcolumellare. Die Gegend der Mondfalte, welche durch feine Fältchen vertreten ist, sowie des Nackens und des Peristoms milchweiß. Der Rand des letzteren stumpflich, innen jedoch nicht verdickt, oben schwach gebuchtet.

Aus Se-cu-san (P. L. Fuchs).

11. **Clausilia presbyteralis** Gredl. n. sp.

Testa parva, gracilis, turrito-acicularis, dense fortiterque striata, ultimo anfractu laxius costulato, cornea; anfractus 11, convexi, regulariter crescentes, sutura impressa juncti, apice obtusiusculo; apertura ovalis, sinulo [illegible], lamella supera fortis, marginalis, spirali conjuncta, infera [illegible], [illegible], subcolumellaris immersa, plica principalis ad peristoma in formam dentem lamellae superae approximatum protracta, secundaria brevis, lunella brevis, transversa, foris haud translucida; peristoma solutum, reflexum, parum dilatatum et labiatum.

Long. 13—14½; lat. 2 mm.

Der Cl. diaconalis Hde. wohl zunächststehend; allein indes diese der Autor unter anderem charakterisiert „spira brevi fusiformi, epidermide vinaceo, obsolete striata", ist bei unserer Art das gerade Gegentheil der Fall: eine rein gethürmte (nicht spindelige), fast nadelförmig ausgezogene, schlanke Gestalt, horngelbe Färbung, kräftige Rippenstreifung; und nur die am Mundsaume [illegible] endende Principalfalte stimmt. Beschreibung wie die nicht sehr instructiven Abbildungen lassen bei Heude [illegible] Zweifel*). Es ist demnach doch kaum zu fürchten, dass — nachdem schon P. Heude dieser Art ursprünglich zwei Namen [illegible], hier zu dem Überflusse eine Drittgeburt [illegible].

Bisher erst in [illegible] Stücken aus Se-cu-san erhalten (P. Lorenz).

12. **Clausilia** Phaedusa **lea** Gredl. n. sp.

[illegible] trato. laevi, [illegible] sericina; [illegible] 11 [illegible], sutura impressa.

---

*) [illegible] eingehalten wird [illegible] man vgl. beispielsweise [illegible] und viele unserer [illegible] schwer mit einem Autor [illegible]

costulis basim versus sensim fortioribus; ultimus infra valde attenuatus; apertura obliqua, anguste pyriformis, sinulus elongatus; lamellae inter se approximatae, supera marginalis, in spiralem deducta, infera immersa, gratiose arcuata, subcolumellaris inconspicua, plica principalis longa, ante marginem sensim evanida, secundaria brevis. illae approximata, parallela, palatales aliae nullae; peristoma sat expansum, reflexum labiatumque, continuum ac solutum, supra vix sinuatum.

Long. 14—15; lat. $2^1/_2$ *mm.*

Eine wenig gekennzeichnete, aber zierliche, schlanke Art, die, soweit kleinere, rippenstreifige Arten aus China bisher bekannt gegeben sind, zunächst an Cl. pagnucciana Hde. (S. 159, Taf. XXXV, Fig. 7) aus Schensi heranzutreten scheint. Sie ist von dieser hauptsächlich auch nur durch den Mangel der Lunarfältchen, durch lichtere (fahle) Färbung und gewöhnlich auch schiefere Mundstellung verschieden. Ein Vergleich mit Typen, die mir fehlen, möchte auch wohl mehrere Unterschiede ergeben, als die Heude'sche Diagnose entnehmen lässt. Von der ebenfalls verwandten Cl. Loczyi Böttg. (man vgl. Hilber, Landschnecken v. China, II., pag. 25, Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. 1883) trennt sie sich durch bedeutendere Größe, mehr Umgänge und schlankeren Bau. Endlich die ebenfalls in der Nähe stehende Cl. Anceyi Böttg. (Nachr-Bl. d. deutsch. mal. Ges. 1882, S. 68) aus Inkiapo stimmt weder in Färbung noch Streifung oder Beschaffenheit des Peristoms auf unsere Art. — Das sehr gefällig gebaute fahlgelbe Gehäuse besitzt eine dichte, gleichmäßige Rippenstreifung, welche erst auf dem letzten Umgange weitere Zwischenräume lässt, 11—12 Windungen, die sehr allmählich an Höhe und Breite nach oben und unten abnehmen, die letzte erscheint auch bei dieser wie bei vielen anderen chinesischen Arten über der Principalfalte merklich heller gefärbt, die Naht tief eingezogen, beinahe gestuft, der rundlich ausgelegte und zurückgeschlagene Mundsaum, wie die Lamellen im Innern erinnern an jene von Cl. aculus, doch ist die Mündung viel enger, gestreckt birnförmig. Die Principalfalte beschreibt nahezu einen Kreis und verliert sich mählich gegen den Mundsaum, indes das Secundärfältchen kurz, zuweilen sehr kurz und der ersteren nahe an- und parallel liegt. Von Lunellarfältchen keine Spur.

Nach 36 constanten Exemplaren aus Se-cu-san (comm. P. L. Fuchs) beschrieben.

13. Clausilia Filippina Heude var. **socia** Gredl. n.

Testa multo minor (20 pro 27 mm), densius costulata; anfractus 11 (pro 13), magis convexi; apertura parvula; plica subcolumellaris immersa, spiralis invalida.

Gleich der typischen Art von Pa-tong stammend und von dieser vielleicht specifisch abzutrennen.

Es ist eine eigenthümliche Erscheinung chinesischer Landconchylien, dass jede auffallendere Form von einem ganzen Trabantenkreise umgeben, oder deutlicher gesprochen, dass dieselbe — soweit ihre Ausbreitung — in allen Größen wiederkehrt oder, sofern doch bei aller Verwandtschaft gute Arten unterschieden werden müssen, dieselben von kleineren oder größeren Nebenformen, je nachdem die eine oder andere als Typus zuerst aufgestellt worden, begleitet ist, und hierin liegt die Schwierigkeit der Artenbegrenzung. So stellte als Repräsentanten einer zierlich schlanken hellfarbigen Clausiliengruppe P. Heude eine Claus. Filippina von Pa-tong auf. Sie hat zur Nebenform die in Rede stehende kleinere var. socia; das andere Extrem dieser Gruppe ist Cl. praecelsa Gredl. mit ihrer var. minor (s. XIII. Stück. Jahrb. 1887. S. 357); inzwischen steht Cl. adaucta Gredl. — sämmtlich drei gute Arten, die gleichwohl wie durch Descendenz auseinander hervorgegangen erscheinen. — Es mag auch hier am Platze sein zu bemerken, dass mir von allen diesen Arten und Varietäten ein reiches Material zugebote gestanden.

14. Clausilia celsa Gredl. n. sp.

Testa clavato-fusiformis, spira longissime attenuata, dense subtiliterque — cervice mediisque anfractibus fortius — striata, lucida, castanea; anfractus 18, sutura partim cinerea juncti, planiusculi, apicalibus dilatatis, ultimo angustato; apertura parva, rotundato-pyriformis, valde obliqua, lamellis debilibus, supera brevis, infera ac subcolumellaris immersa, modo gibboso-bipartita, plica palatalis unica (principalis) brevis, lunaris recta, fortis, albido transparens; peristoma solutum, prominulum, parum incrassatum reflexumque.

Long. 23—25; *lat.* $4^{1}/_{2}$ *mm.*

Habituell — aber auch nur habituell — nämlich durch das sehr lang ausgezogene, vielwindige Gehäuse an die ungleich größere Cl. praecelsa m. und Seguiniana Hde. erinnernd, ist

diese interessante Art auch an den erweiterten obersten Umgängen (ähnlich, doch nicht so sehr wie paradoxa m.), sowie an der keulenförmigen Gestalt der letzteren Umgänge ebenso auffallend als leicht kenntlich; selbst die gerade, I-förmige, breite, weiße Mondfalte und die kaum auf ein Drittel des letzten Umganges sich erstreckende kurze Principalfalte erscheint bei chinesischen Clausilien nicht so häufig. Endlich fällt die kleine, schiefgestellte Mündung auf. Das Gehäuse ist links gewunden, dunkel kastanienbraun, mit etwas violettem Schimmer, lebhaft glänzend, wenngleich die Epidermis corrodiert, dicht, unregelmäßig, auf den mittleren Windungen regelmäßiger und kräftiger, sonst fein gestreift, nur am Nacken nahe dem Mundsaume zeigen sich die Streifen spärlicher, fast rippenartig. Die zahlreichen Umgänge wenig convex, mit Ausnahme der drei letzten äußerst niedrig, die Wirbelumgänge etwas höher und breiter. Die Naht stellenweise aschgrau; der Mundsaum innen und außen weiß, wenig ausgebreitet und wenig zurückgebogen.

Scheint selten zu sein und wurden mir in zwei Sendungen erst 6 völlig übereinstimmende Exemplare mitgetheilt, die P. Lor. Fuchs wahrscheinlich nördlich von I-tschang oder bei Se-cu-san in West-Hupé sammelte.

15. **Clausilia** (Hemiphaedusa) **frater minor** Gredl. n. sp.*).

Clausiliae Franciscanae Mlldff. affinis, sed minor. Testa ventresulo-fusiformis, densissime et distincte striatula, sericina, virescenti-hyalina, apice interdum rubido, nunquam decollata; anfractus 10, convexi, sutura impressa sejuncti, ultimus costato-striatus, cervice undulato - et ruguloso - plicato, cristato; apertura tetragono - rotundata, ad basim indistincte angulata, obliqua, lamellis omnibus marginalibus, lamella supera antrorsum arcuato-elevata, intus cum spirali continua, infera torta, ab illa remota, intus approximata et bipartita, interlamellare, uti margo externus, plus minusve tuberculatum, subcolumellaris rarius marginem haud attingens, plica principalis in peristomatis margine in dentem elevata, palatalis nulla, lunella valida, obliqua,

*) Der demüthige hl. Franciscus wollte seine Ordensbrüder „Fratres minores“ genannt wissen. Nachdem nun von Möllendorff die nächstverwandte (von P. Lorenz entdeckte) Art Claus. franciscana benannte, führt diese kleinere Schwester obigen Namen.

prolongata, principali approximata; peristoma acutum, sublabiatum, continuum, solutum, anguste expansum reflexiusculum.

Long. 23—24; diam. 6 mm.

Eine hyalin aussehende Art aus dem Formenkreise der franciscana, Fargesiana, decurtata, Laurentiana etc.

Zunächst verwandt mit franciscana Mldff., aber unmöglich mit dieser zu verwechseln. Denn obgleich Cl. franciscana in ihren Größenverhältnissen bedeutende Unterschiede aufweist, so reichen doch ihre kleinsten Formen nie zu den geringeren Dimensionen (und wie mir Hunderte von Exemplaren bestätigen) der sehr constanten Cl. frater minor herab. Weitere Unterschiede bieten die vortretende Principal- und Subcolumellarfalte, das mehr oder weniger gefältelte, schmal ausgebreitete Peristom, die etwas weniger bauchige und doch gedrungene Gestalt, markiertere Streifung, aber schwächere Rippen über dem Nackenkamm.

Das Gehäuse ist nicht weißlich, sondern grünlich-hyalin, weniger fest- als dünnschalig zu bezeichnen, durchsichtiger als Cl. franciscana. Das Thier scheint isabell bräunlich durch. Die obersten Umgänge breit, der Wirbel beinahe versenkt, was dem Gehäuse ein etwas plumpes Aussehen ertheilt, der letzte Umgang hoch. Die zahnartige Erhöhung der Principalfalte auf dem Mundsaume tritt nahe an die bogig geschwungene, nach innen schneidige Oberlamelle heran und schließt einen fast rhombischen Sinulus ein. Die Tuberkeln des Peristoms, ähnlich den vortretenden Lamellen, erreichen jedoch nicht deren Höhe, sind stumpf, kerbenartig und fehlen zuweilen ganz. Die untere Lamelle verläuft geschlängelt, in der Mitte sattelartig eingetieft. Der Mundsaum scharf, schmal ausgelegt, schwach gelippt.

Aus Se-cu-san zum erstenmal, aber in großer Anzahl mitgetheilt von P. L. Fuchs. Ältere Individuen, von Conferven überzogen, deuten auf einen Aufenthalt an nassen Felsen hin.

16. **Clausilia** (Formosana) **Kiangshiensis** Gredl.

(Causilia Semprinii var. minor. m. ol. in sched.)

Clausiliae Semprinii m. proxima, testa dextrorsa, vix rimata, turrito-fusiformis, solidula, striata, asphaltina, nitidula; anfractus 12—13, parum convexi, sutura plus minusve glaucina juncti, regulariter sensimque accrescentes, ultimus prolongatus, basin versus angustatus, apertura ampla, tetragono-rotundata, fusca, lamella supera marginalis,

recta, spirali adnata, infera recedens, humilis, torta et aliquantulum nodosa, subcolumellaris infirma, ad marginem peristomatis interiorem protracta, plica principalis uti 5 aut 6 plicae lunares inferiores longae, suprema et infima longiores; peristoma luteo-album, continuum, solutum, rarius adpressum, expansum, haud reflexum.

Alt. 24—28; lat. 5 mm.

Einer Clausilia Semprinii m. aus Hunan (vgl. VI. Stück, Archiv f. Naturg., 50. Jahrg., S. 273) so nahestehend, dass ich sie vielfach an Collegen als „Cl. Semprinii var. minor" mittheilte. Eine genauere Untersuchung lässt mich dermal über ihre Artgiltigkeit keineswegs mehr im Zweifel. Sie ist nicht bloß bedeutend kleiner, zumal schlanker, und, da ihre oberen Umgänge weniger ausgezogen, regelmäßiger gethürmt, besitzt der Umgänge 2—3 weniger, die flacher gewölbt, regelmäßiger und markierter gestreift sind, ist dunkler — asphaltbraun — gefärbt. Die Mündung von anderer Gestalt: größer, gerundet-viereckig (nicht birnförmig), der Saum ausgebreiteter, aber weniger zurückgeschlagen, zumal der Columellarrand nicht so schief zum Sinulus verlaufend wie bei Semprinii; die Lamellen im Innern weniger kräftig und die Subcolumelle tiefer versenkt, schwächlich; die Oberlamelle nicht geschwungen. Übergänge sind mir nicht bekannt*).

Aus den westlichen Grenzgebirgen von Kiang-shi in großer Anzahl bezogen von P. Kaspar Fuchs.

17. **Tricula Utaiensis** Gredl. n. sp.

Testa imperforata, fusiformi-conica, apice obtuso, laeviuscula, pellucida, nitidula, virescenti-albida, rarius cornea; anfractus 5, vix convexi, lente crescentes, sutura vix impressa juncti, ultimus ampliatus, mediam fere altitudinis partem adaequans; apertura oblique-ovata, supra acute angulata; peristoma indistincte expansiusculum, intus

*) Clausilia antilopina Hde. und moschina Gdlr. bilden im westlichen Gebiete des mittleren China genau die Pendants der im Osten (Hunan, Kiang-shi) auftretenden ungleich größeren, aber sämmtlich rechtsgewundenen schlanken Arten Semprinii und Kiangshiensis, und mit ein paar Heude'schen Arten eine natürliche Gruppe, in welcher, wie bei so vielen anderen Binnenmollusken dieses Landes, beinahe nur die außerordentlich weit auseinander gehenden Dimensionsverhältnisse unterscheiden und trennen. (Vgl. Clausilia Filippina Hde. var. socia).

labiatum, margo externus haud prominulus, marginibus callo parietali crassiusculo junctis.

Operculum concavum, fuscum.

Alt. $2^1/_4 - 2^1/_2$; *diam. 1 mm.*

Um eine Vorstellung des niedlichen Thierchens und der ziemlich unbekannten Gattung zu haben, erinnere man sich unserer Hydrobia- und Bythinella-Arten, wovon sich die chinesischen Tricula habituell durch conischere Gestalt und flachere Umgänge unterscheiden.

Von Tr. minutoides m. hauptsächlich durch auffallend geringere Größe und gedrungenere Gestalt, nicht geschnäbelten letzten Umgang und die weniger excentrisch gestellte, oben in spitzerem Winkel geschlossene Mündung unterschieden. — Die Naht, im allgemeinen sehr fein und wenig eingezogen, auf dem letzten Umgang zuweilen doppelt. Der kurze Columellarrand schnell und unmittelbar in den Verbindungswulst der Mündungswand übergehend, wodurch die vertical aufgesetzte Mündung schief-eiförmig erscheint. Je nach Alter und Ausbildung ist der Mundsaum mehr oder weniger gelippt und sein Rand stumpfer oder schärfer.

Neben den vom Verfasser aufgestellten Arten dieser Gattung: Hydrobia*) minutoides mit der bedeutend größeren, stets truncierten als bloße „Varietät“ noch fraglichen Fuchsi, sowie neben cristella aus Kiang-shi, die 3., bezw. 4. Species, die aus China bisher bekannt und sämmtlich von P. Kasp. Fuchs entdeckt worden.

Aus zweien Quellen an Algen („nicht aber im laufenden Wasser“) bei U-tái, der Provinz Ost-Hupé, nördlich von Hankow, in mehr als tausend Exemplaren gesammelt und mitgetheilt von P. K. Fuchs.

---

*) Hr. von Möllendorff hat sich überzeugt (man vgl. Nachr.-Blatt d. d. mal. Ges. 1892, S. 22), dass Hypsobia humida Hde. (= Hydrobia minutoides Gredl.) zur indischen Gattung Tricula Bens. gehöre, der meines Wissens erst zwei oder drei Arten zugetheilt waren. Somit fällt die Heude'sche Gattung Hypsobia wie die Art humida aus Gründen der Priorität.

II.

Kritische Bemerkungen und Berichtigungen.

Helix binodata Mlldff. Da auch mir erst die letzte Sendung ein paar völlig frische Stücke brachte, wie sie dem Autor (Jahrb. XIII. 1886, S. 191, Taf. VI, Fig. 4) nicht vorgelegen zu sein scheinen, bin ich in der Lage, dessen Diagnose zu ergänzen, nämlich durch den Zusatz: cuticula cooperta, quae in anfractu ultimo ad angulum periphericum in lacinias elongata. Auf diese Weise erinnern frische Exemplare (von oben) sehr an unsere südeuropäische Fruticicola ciliata Stud.; dürfte auch füglicher dieser Abtheilung als jener von Gonostoma zugetheilt werden, was noch mehr von ihrem einzigen Schwesterchen, das allein ihr zur Seite steht, von der bedeutend kleineren H. uninodata Gredl. gilt. Beide scheinen selten zu sein und ist binodata auch ohne Behaarung an den beiden Knötchen in der Mitte des oberen und unteren Mundsaumes ebenso leicht zu erkennen als schwer zu verwechseln.

Helix Hupensis Gredl. wechselt im Durchmesser von 15 bis 22 *mm*; findet sich nicht selten auch albin.

Helix molina Hde. Von jungen Individuen der H. Franciscanorum Gredl., wofür man sie halten möchte, nicht bloß durch den eingesenkten Wirbel, sondern auch durch viel dichtere und feinere Körnelung unterschieden. Desgleichen findet sich H. molina wie H. Franciscanorum dunkel hornfarben bis purpurn.

Buliminus. Aus der Gegend von Se-cu-san lassen sich die kleineren Arten kaum mehr specifisch sortieren: Übergänge jeder Art heben fast jede Art auf, zumal deren gar viele aufgestellt worden. Im allgemeinen lassen sich zwei Hauptgruppen unterscheiden: Gedrungenere Formen mit breiter Basis, mehr conischem als spindelförmigem oder gethürmtem Gewinde, weiterer Mündung mit flach ausgelegtem, beinahe gleich hoch auslaufendem rechten und linken Mundsaume (Insertion), in der Regel auch mit einem Callus-Knötchen an der äußeren Insertion — vom Typus des B. Hunancola m., welcher dahier merklich kleiner und glänzender, von sattbrauner Grundfarbe mit lebhafteren weißen Striemen als in Hunan, — indes die narbige, größere Form von Hunan (B. Fuchsianus Hde.) hier gänzlich fehlt. Ferner Formen, die an „sp. innominata“ Hilber

und mupingensis Desh. erinnern. Die andere Gruppe umfasst Formen von mehr oder weniger spindelförmiger bis hochgethürmter Gestalt, enger Mündung und schmälerem, hoch hinaufgezogenem äußeren Mundsaume, ohne Callus - Knötchen (B. subminutus Hde., postumus Gredl. u. ä.), je größer desto lebhafter weißstriemig. Als vorherrschende Art tritt, wie es scheint (ich erhielt mehrere hundert Stücke), eine Form auf, die ungeachtet der etwas bedeutenderen Dimensionen und bei ihrer Veränderlichkeit von B. Baudoni Desh. nicht zu trennen sein dürfte*), wenn selbe auch fast zu B. Batangensis Hilb. herantretende Größen erreicht. So vielgestaltig und kritisch dürfte sich die Gattung Buliminus wohl in keinem Lande der Erde entwickeln wie in China, zumal in den nördlicheren Gebieten (Kansu) — der Heimat von Clausilia und Buliminus.

Elma mitis Hde. (S. 152, Taf. XXXVI, Fig. 16), die ich mittlerweile durch P. Lorenz aus Patong in natura bezog und in den „Kritischen Fragmenten" XIII. (Nachr.-Bl. 1891, S. 78, all. 3) „der Elma pachygyra m. bedenklich nahe" fand, kann wegen der bereits daselbst auf Grund der Heude'schen Abbildung angeführten Unterschiede in der Form der Mündung immerhin als gute Art genommen werden, da der letzte Umgang bei E. pachygyra bedeutend höher und die Mündungswand viel abschüssiger ist, wodurch die Mündung und der Sinulus länger und enger erscheint als bei E. mitis. Bemerke dies zugleich, da ich auch nur den Schein einer böswilligen Verdächtigung meines Rivalen so wenig auf mir als auf ihm beruhen lassen will. — Dagegen muss auffallen, dass beinahe alle Arten, welche Heude aus Tschen-keou in Sy-tshuan — ohne Gewährsmann — aufführt, mir auch von meinem Mitbruder P. Lorenz aus dem benachbarten Pa-tong in West-Hupé übersendet wurden; so unter anderen in der vorletzten Sendung besagte Elma, Helix ternaria u. s. w.

Cyclotus fossor Hde., S. 127, Taf. XXXVI, Fig. 7, 7 a, höchst wahrscheinlich auch der unmerklich kleinere *C. fodiens* Hde., S. 5, Taf. XII, Fig. 9, sind unbedeutende, kümmerlichere Nebenformen meines C. Hunanus, da es nicht an Übergängen fehlt; und namentlich ersterer völlig identisch mit C. Hunanus

*) Dass auf der Tafel die Namen der drei Arten aus Sy-tshuan verwechselt sind, wie ein Vergleich mit ihren Diagnosen darthut, darauf hat bereits Hr. von Möllendorff hingewiesen.

var. conoidea Mlldff., den ich gleichfalls von mehreren distanten Fundorten besitze.

Alycaeus (*Dioryx*) *monadicus* Hde. P. Heude beschrieb in seinem Werke S. 130, Taf. XXXVI, Fig. 14, diesen Zwerg in einer Weise, dass die Diagnose — die Größe abgerechnet — ebenso auch auf seinen Setchuanensis (globulus Mlldff.?) stimmt. Die Diagnose konnte aber auch anders nicht abgefasst werden; und was die Größe betrifft, so liegen uns noch kleinere Exemplare aus dem Nachbargebiet von Se-cu-san (Heude sagt: „Habitat in montosis Tschen-keou“) vor, die kaum über 4 *mm* Durchmesser besitzen. Die Art ist demnach auch unschwer zu unterscheiden und, solange nicht Zwischendimensionen nachgewiesen werden, zu acceptieren. Allein China ist das Land der Zwerge und Riesen, enthält nicht bloß die kleinsten und riesigsten Arten von Clausilien etc. der Erde, sondern manche Arten anderer Gattungen, die sich nach Größen-Maßen kaum charakterisieren lassen*).

Mit ihr zusammen erhielt ich auch mehrere Dutzend Exemplare von Dioryx globulus Mlldff., welche der Autor nur in Einem Stücke aus Patong kannte**). Er bezeichnet die Farbe „rufescenti-cornea“. Der größte Theil meiner Stücke (aus Se-cu-san wie aus Pa-tong) ist weißlich-hyalin, einige blass wachsgelb, isabell bis lebhaft morgenroth, der Apex gleichfärbig oder geröthet. Das Thier scheint bräunlich durch; darauf wird auch der sonderbare Passus bei Möllendorff (Nachtr. zu den Pneumonopomen, S. 282, wo er D. pilula Gould bespricht) zu deuten

*) Wie sehr — wohl um das Doppelte und selbst das Dreifache — der Formencyclus mancher chinesischen Helix nach Dimensionen variiert, so dass schließlich nur dieser enormen Größenunterschiede wegen Arten und Varietäten aufgestellt werden mussten, obgleich von einem Extrem zum anderen alle Zwischenstufen sich finden und keine Begrenzung zu markieren ist — mögen einzelne Beispiele nachstehend darthun:

1. Helix Kiangsinensis Mart. von 23—40 *mm* (var. major m.) Durchmesser und 19—36 *mm* Höhe.

2. Helix similaris Fér. von 11—24 *mm* (straminea Hde. und assimilaris m.) Durchmesser und 8—15 *mm* Höhe.

3. Helix Franciscanorum Gredl. von 20—33 *mm* Durchmesser und 10—20 *mm* Höhe.

4. Helix chinensis Phil. von 9 (initialis Hde.) bis 32 *mm* (vermes Hde.) Durchmesser und 6—15 *mm* Höhe.

**) Im allgemeinen gelten die Dioryx als selten und sind richtiger — habituell schon — von Alycaeus generisch zu trennen.

…öthlich ist die Schale erst nach dem Tode, frische …ich hornbraun".

… Gegend von Se-cu-san birgt auch andere Alycaeus-Species, namentlich cristatus und anthostoma Mlldff. Wenn Möllendorff von der „Gleichstellung der letzteren Art mit der gleichzeitig publicierten pentagonus Hde. nicht ganz überzeugt ist" (Nachr.-Bl. d. deutsch. mal. Ges. 1892, S. 18), wie ich (l. c. 1891, S. 79) die Ansicht ausgesprochen, so erwidere ich darauf, dass auch ich durch die angeführten Unterschiede zu seinem Zweifel bekehrt bin, jedoch erst, wenn der circumperistomale Nackenkamm des Al. pentagonalis so wenig vom eigentlichen (inneren) Mundsaume entfernt steht, dass richtiger von einem „peristomate duplici" (Hde.) gesprochen werden kann, was aber die **Abbildung** Heudes nicht bestätigt. Mir liegen nämlich längst aus Pa-tung wie nun von Se-cu-san auch solche Stücke vor, die ich zugleich mit anthostoma bezog, aber getrennt von letzteren in der Sammlung hielt.

Georissa sulcata Mlldff. erreicht wohl auch bedeutendere Dimensionen als diese vom Autor angegeben werden und ist auch weiter nordwärts in der Provinz Hunan verbreitet.

In den „Bemerkungen zu P. Heudes Notes sur les mollusques terrestres de la vallée du Fleuve Bleu" (Nachr.-Bl. d. deutsch. mal. Ges. 1892, S. 15) ergeht sich Herr von Möllendorff bei Besprechung des neuen genus Rivularia Heude auf S. 22 in Erörterungen, welche sonst meinen Principien völlig entsprechen, wie ich sie gerade den Süßwasser-Schnecken Chinas abgelauscht und z. B. in meinem „X. Stück" (Malacozool. Bl. 1886, S. 160, Fußnote zu Mecongia auriculata) und „XII. Stück" (Nachr. Bl. 1887, S. 174) zu weitgehender Beherzigung ausgesprochen. Bei dieser Gelegenheit nun reibt sich der Herr Consul sowohl an meiner rauhen Kutte wie — zu feinerer Politur — am chinesischen Seidentalar des Jesuiten. Ich lasse Herrn von Möllendorff das Bedenken, ob „Paludina (Melantho) auriculata Mart." wirklich bei Mecongia einzuverleiben ist (?) unbestritten*); diese proteische Species will eben nirgends hineinpassen. Weiß ich doch heute nimmer, welche Gründe mich damals bewogen, sie unter Mecongia zu stellen. Wenn ich nun aber in den oben

*) Der Paetel'sche Katalog gilt nicht als maßgebend, am wenigsten von dieser Art, welche er zweimal: bei Melantho und bei Paludina (ob … 2. Section — letztere als Mecongia — ist nicht näher angegeb…

angedeuteten Principien, welche sich gleichwohl nur auf die gegenseitigen Beziehungen von Wölbung und Spiralrippen der Umgänge beschränken, die Parole zu den kühnsten Bocksprüngen, zu einem wahren Hokuspokus darwinistischer Phantasie gegeben hätte, so dass selbst „Mecongia“ auriculata Mart. (d. i. die dreimal irrig benannte „Rivularia auricularis Dohrn“ bei Heude) durch das Bindeglied Riv. ovum Hde. generisch (oder gar auch specifisch?) bis zu Paludomus rusiostoma m. („Rivularia globosa Hde.“) — einem wahren testaceologischen Typus von Paludomus — hinausläuft; so frägt man sich füglich, wo endlich die Grenzen für Gattungen und Arten beginnen und aufhören? — Es ist bekannt, dass Herrn von Möllendorff der Deckel aller Deckelschnecken als das Alpha und Omega aller generischen Eintheilung gilt. Angenommen nun, woran ich kaum zweifle, dass der Deckel von Paludomus rusiostoma dem der Paludinen gleich, so gebe ich zu bedenken, dass der Monograph Dr. Brot alle indischen Paludomus des Deckels wegen anfänglich zu den Paludiniden gestellt hat. — Cyclotus authopoma Mlldff. von Montalban (Philippinen), aus der Hand des Autors, besitzt große Ähnlichkeit — die bedeutendere Größe abgerechnet — mit C. Hunanus, allein einen Deckel, worauf ein völliges Wespennest aufgebaut ist. Soll er ob dieses Artcharakters einem anderen, weiß der Himmel welchem genus einverleibt werden? Gewiss nicht, und Möllendorff beließ ihn auch bei Cyclotus: der Gesammthabitus soll nicht einer einzelnen Eigenschaft geopfert werden. Kurz, ich vermag ohne Überwindung Rivularia elongata, subelliptica und ovum Hde. seiner „auricularis Dohrn“ (Paludina auriculata Mart.) zu aggruppieren, wie ich auch solche Formen bereits als Pehoana m. oder als „Varietäten“ (l. c.) kurzweg beschrieben — aber seine R. globosa, d. i. meinen Paludomus rusiostoma, oder die anderen Paludomus aus China, die ich aufstellte, in Rivularia umzutaufen, vermag ich zur Stunde und solange ein genus Paludomus besteht, so wenig als Maus zu Fledermaus, Kröte zu Schildkröte, oder einen Käfer zu den Crustaceen zu stellen.

Endlich charakterisiert P. Heude das genus Rivularia echt französisch mit drei Merkmalen, wovon zwei auch der Gattung Paludomus eigen (die Dickschaligkeit und der übermäßig große letzte Umgang) und das dritte Merkmal: „peristomatis margine columellari plicis confertis multiplicato“ bei unserer Art keines-

wegs zutrifft, welche eine schwielige, nichts weniger als abgeflachte Spindel, die Spindel ihrer Gattung weist.

Schließlich sei noch bemerkt, dass Paludomus rusiostoma (aus Kuei-tscheu), und zwar mit noch niedrigerem Gewinde auch aus Hupé mir wiederholt zukam. Es wäre interessant, zu constatieren, ob das angebliche Stammthier (?) Paludina auriculata vom Siang-Flusse in Hunan auch dahier im Westen hause?

III.

Zur geographischen Verbreitung.

Wenngleich dem Berichterstatter die geographische Lage, die landschaftliche Physiognomie, Verticalhöhe, Klima, Flora, die Entfernung vom nachbarlichen, durch die Funde des P. Lorenz gewissermaßen berühmt gewordenen Patong u. ä. von Se-cu-san in West-Hupé nicht näher bekannt ist, aber hoffentlich im nächsten Beitrage mitgetheilt werden kann; so möge gleichwohl jetzt schon verzeichnet stehen, was bisher in zwei Sendungen von dort, außer den bereits sub I und II aufgeführten Arten, einlief.

Trochomorpha (Videna) *borealis* Mlldff. (Nachr.-Bl. d. deutsch. mal. Gesellsch. 1888, S. 39), bisher aus der Provinz Sy-tshuan bekannt. Darauf glaube ich ein Exemplar aus den Gebirgen von West-Hupé, namentlich auf Grund der Doppelstreifung („transverse plicato-striatula, lineis spiralibus minutis, ad peripheriam magis distinctis, subtus evanescentibus decussata") beziehen zu sollen, wenngleich mein Exemplar nicht unbedeutend größer ist (diam. 13, alt. 5 *mm* : 9—11 und $4^1/_2$ *mm*). Möllendorff bemerkt: „Prima generis species ex Sina cognita". Derzeit zählt China: Tr. (?) Shanghaiensis Pfr.*), Tr. samara Hde (aus Talifu), Tr. sapeca Hde. (von Cochinchina), Tr. Haenseli Böttg. et Schm. (von Formosa).

Sitala petasus sinensis Hde.

Nanina Fuchsiana Hde., *flavopurea* Hde.

Patula pallens Gredl.

Plectopylis laminifera Mlldff. Sehr häufig.

Helix binodata Mlldff.

Helix ternaria Hde. Selten.

---

*) Vielleicht richtiger Plectotropis Sh.

Helix (Eulota) *similaris* Fér., die mir in vielen hundert Stücken zukam, bleibt sich um Se-cu-san außerordentlich constant und nimmt hier — die Farbe abgerechnet — beinahe die Tracht einer H. pulveratrix Mart. an.

Helix Vagoina Gredl. mit oben beschriebener Varietät. Kleiner als das Original von Südwest-Hupé.

Helix virilis Gredl. mit der mir (ob bloße Varietät?) noch immer fraglichen subfusca m., welche sich zumal in dieser Gegend von gewissen gleichgroßen Formen der chinensis-Gruppe bloß durch kugligere Gestalt und aufgeblasenere Windungen, engeren Nabel und feineren Mundsaum unterscheidet — Unterschiede, welche sie auch mit der gebänderten virilis theilt und deshalb von mir dieser beigeordnet ward.

Helix subsimilis Desh. mit der unscheinbaren var. Filippina Hde. (subchristinae Anc.) scheint dahier besonders häufig aufzutreten.

Helix chinensis Phil. Im Gegensatze zu den Exemplaren von Hunan lässt sich bei diesen von Se-cu-san bezüglich Färbung nicht so fast von einem peripherischen lichteren Bande, als vielmehr von einer dunkleren (röthlich-bräunlichen) Ober- und hellerer Unterseite des letzten Umganges sprechen. Häufig.

Helix accrescens Hde. Ebenso zahlreich.

Helix Hupeana Gredl. Gleich Hupensis m. in großen Individuen.

Helix Kiangsinensis Mart. übersteigt gleichfalls die Dimensionen des Typus.

Buliminus Cantori Phil. zahlreich und in sehr großen, blassen Exemplaren, seltenemale auch mit weißen Verticalstreifen gleich dem europäischen B. radiatus Brug.*).

Buliminus (Rhachis) *onychinus* Hde. Nicht ganz selten.

Buliminopsis doliolum Gredl. Zuweilen auch albin.

Cionella (Zua) *Davidis* Anc.

Ennea (Microstrophia) *Fuchsi* Gredl. Klein, doch häufig.

Clausilia Franciscana, *gigas* und *purpurascens* (artifina Hde.), *Laurentiana* Mlldff.; *moschina* Gredl. und *antilopina* Hde.

---

*) Um auf das Unwesentliche der Färbung bei dieser Gattung hinzuweisen, sei gelegenheitlich an dieser Stelle erwähnt, dass der meist kreideweiße oder weiß und braun gestreifte B. radiatus (sepium L., detritus Müll.) am Stivo bei Rovereto (Wälschtirol) rein braun gefärbt unter normalen Individuen, also ähnlich einem B. montanus Drap., gefunden wurde.

Clausilia [illegible] Gredl. Die Zahl der [illegible], sowie die [illegible] und [illegible] der [illegible] Streifung [illegible] auch [illegible] mehreren anderen [illegible] [illegible].

[illegible] Gredl. [illegible].

[illegible] Übergang.

[illegible] die [illegible]:

[illegible] Küst. mit nur [illegible] die Formen: [illegible] Küst. mit [illegible]. Die Exem[illegible] der [illegible] Erweiterung.

[illegible]

[illegible] Färbung auch [illegible] — [illegible] den [illegible] und [illegible]

[illegible] Küst.

[illegible] Gredl.

[illegible] Küst. mit [illegible] Höhe.

[illegible] Küst.

[illegible] Küst. [illegible]

[illegible] mit [illegible] bis [illegible] man [illegible] sehen oder ob ihrer [illegible]

Vincenz Gredler.

[illegible]

* [illegible] paar Fälle vor[illegible] lebendig [illegible] Euphaedusa) [illegible] man [illegible] — Von [illegible] mehr als einem halben [illegible] Beobachtung [illegible] paar Tagen [illegible] jedoch, [illegible] und da das [illegible] ich es von [illegible] Junge mit [illegible] — Es [illegible] anzunehmen, dass [illegible] praecelsa Gredl. [illegible]

II.

Der Legföhrenwald.

Von

P. Julius Gremblich,
Professor am k. k. Gymnasium der Franciscaner in Hall.



Sowohl gegen den Nordpol als auch gegen die Gipfel der höheren Gebirge nimmt einerseits die Anzahl der Pflanzenarten ab, andererseits schreiten die Größenverhältnisse der nächstverwandten Arten einzelner Gattungen und Familien, welche ausgedehnte Verbreitungsbezirke einnehmen, allmählich zurück. In südlichen oder gemäßigten Himmelsstrichen, in der Meereshöhe oder Thalsohle erheben sich Arten mancher Gattungen im üppigsten Wachsthume zu ansehnlichen Bäumen — man denke etwa an die weidenartigen Gewächse —, während die im hohen Norden oder auf bedeutenden Höhen der Gebirge heimischen Formen ihre mit nur wenigen Blättchen und blütenarmen Fruchtansätzen geschmückten Stämmchen kaum über den Boden erheben. Ähnlich ergeht es ganzen Pflanzengenossenschaften, welche zu Tausenden himmelhoher Exemplare in günstiger Lage dicht geschlossene, schattige Wälder bilden, während Bestände verwandter Arten in hohen Breiten oder im Gebirge, in beständigen Kampf um die Existenz gegen die ungünstigen Einflüsse der Lage und des Klimas versetzt, in ihren Größenverhältnissen mehr und mehr zurückbleiben, bis sie schließlich das Feld räumen.

Unter den Nadelhölzern bildet besonders in den Alpen die Legföhre (*Pinus montana Dur., Mill.*) niedrige Bestände, welche den Wald aus hochschäftigen Bäumen nach den höheren Regionen hin fortsetzen. Das häufige Vorkommen dieser Pflanze, ihre eigenthümlichen Beziehungen zu den Bodenverhältnissen, ihre Zähigkeit und Abhärtung in den Lebenserscheinungen, ihre charakteristischen Wälder sowie ihre Nutzbarkeit sind auffallend genug, um die Beachtung selbst des Laien auf sich zu lenken. Unter den Bergen der nächsten Umgebung von Hall in Tirol tragen nicht weniger als vier den Namen „Zunder-

kopf", eine Bezeichnung nach dem Localnamen der Legföhre. Die Eigenheiten der Legföhre näher zu kennzeichnen, ihre eigenen Bestände und die Übergänge in andere Pflanzengenossenschaften zu beschreiben, die Erfolge und Nachtheile im Kampf ums Dasein hervorzuheben, ist der Zweck dieser Zeilen. Die reichhaltigen Aufschreibungen, die ich bei den häufigen Ausflügen ins Gebirge an Ort und Stelle vornahm, bilden die Quelle, aus der ich das Material zu den nachfolgenden Betrachtungen schöpfte. Außer den gelegentlich angeführten Citaten wurden ausgiebiger Christs Pflanzenleben der Schweiz, Griesebachs Vegetationsverhältnisse der Erde, Kabschs Pflanzenleben der Erde (herausg. von Berlepsch), Kerners Pflanzenleben und Pflanzen der Donauländer, sowie Sendtners Vegetationsverhältnisse von Südbayern benützt.

Die Legföhre zählt in die Unterfamilie der *Abietineae Rich.* der Nadelhölzer. Stamm und Äste sind grau berindet, die Borke kleinrissig, oft glatt, Holz und Rinde sind sehr harzreich; die jungen Triebe sind mit spinnwebig verwobenen Fransen umkleidet. Die Nadeln sind dunkel grasgrün, stehen zu zweien und sind am Grunde von trockenen Hüllschuppen, wie die Knospen, umgeben; sie besitzen (nach R. v. Wettstein ö. bot. Z. 1889, p. 109) zwei bis sechs, gewöhnlich vier Harzgänge. Die Staubblüten sind in Ähren angeordnet: die Deckblätter derselben halten sich nach dem Verstäuben des Pollens noch lange im vertrockneten Zustande. Der Pollen ist äußerst reichlich vorhanden, sehr groß und hat zwei Ausbuchtungen, welche ihm die Gestalt von Insectenaugen verleihen (Kerner, Pflanzenleben I. B., p. 97 und 142). Diese Ausbuchtungen dienen bei Verschleppung durch den Wind als Luftsäcke. Zur Zeit der Pollenreife (Ende Mai bis Anfang Juli) sammeln sich im Winde förmliche Staubwolken und besäen Wassergräben, Tümpel und Regenlachen mit dem gelblichen Pulver der Pollenkörner, was vom Landvolke häufig als Schwefelregen gedeutet wird. Die kurzgestielten Fruchtzäpfchen bilden sich im Hochsommer und Herbste des Vorjahres, sind rundlich oder länglich; die Schuppen sind holzig und bergen die kleinen, 4—5 *mm* langen Samen, die vom Flügel doppelter Länge überragt werden. Zu Eintritt wärmerer Temperatur öffnen sich die Zäpfchen und streuen ihre Samen aus. Die Schuppen tragen nach außen meist rauten-

förmige Schilder, sind eben oder gewölbt und mit einem punktförmigen Nabel geziert. Die Zapfen stehen in ihrer Fruchtreife wagrecht oder schief ab, sind auch etwas aufgerichtet und meistens zu drei und mehr wirtelförmig an den Zweigen angeordnet.

Die unter dem Sammelnamen *Pinus montana Dur., Mill.* bekannte Legföhre tritt in verschiedenen Formen auf, die sich vorzüglich durch ihren Wuchs und die Form der Fruchtzapfen voneinander unterscheiden. Die ausgesprochenste unter allen ist entschieden *Pinus uncinata Ram.* (als Art); sie besitzt aufrechte oder aus gebogenem Grunde mehr weniger aufsteigende, 8—10, ja 15 *m* hohe Stämme. Die eiförmig-länglichen Zapfen erreichen eine bedeutende Größe (bis 5 und 6 *cm*) und sind unsymmetrisch gebaut; der Stiel ist in der convexen Unterseite excentrisch eingesetzt, die Schilder auf der Lichtseite sind stärker, haken- oder kapuzenförmig zurückgekrümmt, während die der Schattenseite mehr minder flach sind (vgl. Fiek, Fl. v. Schlesien Nr. 1452, Gremli Exc. IV. Aufl., p. 453). Mit dieser Form ist *Pinus obliqua Sauter* identisch (Christ, Pflanzen der Schweiz, p. 235). In der Gegend von Zirl, Telfs, Mittewald und im Außerfern ist die Pflanze unter dem Namen Spirke oder Spirte bekannt.

Eine zweite außerordentlich verbreitete Form ist *Pinus Pumilio Haenke* (als Art). Die Pflanze ist bogenschaftig oder liegend, mit aufstrebenden Gipfelästen, nie aufrecht. Die ungefähr 4 *cm* langen Zapfen sind kugelig-eiförmig, der Stiel in der Mitte der mehr minder ebenen Unterseite symmetrisch eingefügt. Die Schilder der Schuppen sind halbkugelig angeschwollen; an den unteren Schuppen ist der Nabel stark nach innen gerückt, kaum oder nicht mehr sichtbar. Zumeist ist die Symmetrie dadurch ein wenig gestört, dass die Schilder der sonnenseitigen Schuppen just nicht hakenförmig zurückgekrümmt sind, aber doch über alle Bedenken hinaus deutlich größer sind, als die der schattenseitigen. Diese Form liebt Kalkboden; in Nordtirol ist sie unvergleichlich häufiger als die vorausgehende und nachfolgende.

Als dritte Form lässt sich *Pinus Mughus Scop.* unterscheiden. In ihrer äußeren Form, im Wachsthum u. s. w. schließt sie sich enge an *P. Pumilio* an; ihre Zapfen besitzen jedoch eine völlig ebene Unterseite mit flachen Schildern an den

Schuppen, der punktförmige Nabel sitzt im Diagonalschnitt der Rautenschilder und ist an allen Schuppen sichtbar. *P. Mughus* liebt Torfmoore und Kieselgestein; in Südtirol ist sie weiter als in Nordtirol verbreitet.

Die drei angeführten Formen sind der Reihenfolge nach durch Übergänge in allen Stadien der Entwicklung miteinander verbunden.

Die zwei letztgenannten Formen werden im gewöhnlichen Leben ohne Rücksicht auf ihre Unterschiede als Legföhre, Knie- oder Krummholz bezeichnet; im Innthale heißen sie Zunder (in Cant. Tessin nach Christ Zuondra), v. Dalla Torre (Best. d. Alpenpfl.) und Hausmann (Flora v. Tirol, p. 810) schreiben Zunter. In Oberbayern und dem angrenzenden Tirol nennt man sie Latschen (nach Gerstäcker Laatschen), in Südtirol Reisten, der Italiener bezeichnet sie als Mughi oder Mugoni, auf dem Tannberg nennt man sie Arlen (daher vielleicht „Arlberg", nach Bergmann bei Hausmann l. c.).

Im folgenden werde ich die Beobachtungen hervorheben, welche sich auf das Karwendelgebirge beziehen; seine Thäler und Berge waren sehr häufig das Ziel meiner Ausflüge, die Zunder besitzt in diesem Gebiete namhafte Verbreitung, ihre Bestände sind aus mannigfachen Gründen von der Cultur so gut wie unbeleckt, selbst die Spirke hat ihre eigenartigen Vorkommnisse.

Die verhältnismäßig kleinen (etwa 4 *mm* langen) Samen der Zunder, welche vom häutigen Flügel ungefähr um das Doppelte übertroffen werden, entfallen außerordentlich leicht den Zapfen, wenn diese infolge der Wärme eine sparrige Form annehmen. Der Zapfen mit seinen abstehenden Schuppen ähnelt einem Igel mit gesträubten Borsten. Die zwischen den Schuppen befindlichen leichten, wie die Früchte des Ahorns noch mit einem Flügel versehenen Samen werden vom leisesten Winde gehoben und weitergetragen. Gegen die Basis der Zapfen sind die Schuppen etwas kräftiger aneinander gedrückt, die Flügel meist kürzer; die Samen werden weniger leicht den Fruchtblättern entfallen. Fällt aber der ganze Fruchtstand ab und rollt derselbe den Abhang, welchen die Zunder besetzt, hinunter, so bereitet er in halbzersetztem Zustande den keimenden Sämlingen hinreichende Nahrung, um ihnen auf einem auch

weniger günstigen Standorte die Bedingnisse ihres Aufkommens zu sichern. So ist für die Verbreitung der Samen hinlänglich Sorge getragen.

Die keimende Pflanze versucht es allerorts, wo sie sich festsetzen konnte, die Unterlage, ihren sehr bescheidenen Ansprüchen angepasst, auszunützen. Am wenigsten eignen sich für einen Anflug die mit langen Gräsern dicht bewachsenen Abhänge. In dem dichten Gehälme können die Zundersamen nicht hinlänglich Feuchtigkeit zum Keimen finden, oder die Keimlinge können nicht Wurzel schlagen oder ersticken unter der alles bedeckenden Grashülle. Man trifft daher nur einzelne Exemplare der Legföhre in geschlossenen Grasnarben; der Tritt eines Rindes oder Schafes oder eines Stückes Wild, eine kahle Stelle, verursacht durch das Abstürzen eines Steines, bieten den anfliegenden Samen den Boden, um den Keimungsprocess durchzumachen. Ist auch diese Art der Ansiedelung der Zunder von vielen Zufälligkeiten abhängig, so finden wir doch, dass Zunderbestände, welche sich in der Nähe geschlossener Alpenwiesen oder Weiden ausbreiten, allmählich gegen den Grasbestand vorrücken, bis sie unter günstigen Umständen denselben verdrängt und das ganze Gebiet besetzt haben. Weniger günstig für das Keimen der Zundersamen scheinen die im Gebirge in großen Mengen aufgespeicherten Mulm-, Humus- und Torfmassen zu sein, wenn sie keine Vegetationsdecke tragen und so an ihrer Oberfläche hochgradig austrocknen. In ebenen Moorgründen oder sonst irgendwie feucht gehaltenen Torf- und Humusablagerungen kommt die Zunder sehr leicht auf, ja sie bilden Lieblingsplätze, an denen sie niemals fehlt. In den Ritzen und Sprüngen der Kalkgebirge, welche meist mit tiefschwarzer fetter Erde erfüllt sind, in denen überdies die Feuchtigkeit zusammensickert, siedelt sich die Legföhre sehr gerne an, ebenso bieten die an Felsen hinlaufenden, theilweise mit Erde bedeckten Ränder und Absätze mit ihrem spärlichen Pflanzenwuchse günstige Bedingungen für ihr Gedeihen. Auf Halden, den deltaförmigen Geröllkegeln, sowie auf Bergstürzen gibt es besonders dort, wo das Gestein leichter zerbröckelt oder einen feineren, thonhaltigen Detritus bildet, höchst geeignete Plätzchen für Ansiedelungen des Knieholzes; ja selbst im gröberen Gerölle, zwischen Steinblöcken, wo sich nur Spuren von Erde oder Humuskrümchen vorfinden, sind einzelne Exemplare Sieger im Kampfe ums Dasein.

Man darf sich aber die erste Ansiedelung der Zunder durch die Hand der Natur nicht durchgehends leicht oder mühelos vorstellen. Abgesehen von den Einflüssen, welche auf die junge Pflanzung zerstörend einwirken und so einen neuen Anflug nothwendig machen, sind die Bedingungen für das Gelingen eines ersten Anfluges oft so ungünstig, dass derselbe eine lange Reihe von Jahren benöthigt. So sieht man hin und wieder ein einzelnes kräftiges und reichlich Samen tragendes Exemplar ganz isoliert irgendwo stehen, in dessen Umgebung viertelstundenweit jede weitere Zunder fehlt. Noch auffälliger ist dies Verhalten im Schiefergebirge, wo ganz kleine geschlossene Bestände meilenweit von ihren Genossen entfernt sind.

Das Keimen der Zundersamen geht wie bei den anderen Pinusarten vor sich; anfangs tragen die jungen Pflänzchen noch die Samenschale, die bald abgeworfen wird, worauf sie dann die Keimblätter ähnlich wie Arme einer Chara ausbreiten. Solange die Keimblätter noch in der Samenschale zusammengehalten werden, verbreiten sie zerdrückt einen harzigen, außergewöhnlich angenehmen Geruch, welcher den durch den Keimungsprocess chemisch verwandelten Reservestoffen des Samens entquillt, einen Duft, welcher die Concentration des sogenannten Waldgeruches in sich zu schließen scheint.

Die kleinen zierlichen Pflänzchen, die man oft gruppenweise vereinigt findet, treiben im ersten Jahre nur eine kleine Knospe für das folgende. Das Wachsthum in den ersten Jahren geht äußerst langsam vor sich; man sieht zwergige Exemplare, die trotz ihrer drei-, vier- und mehrjährigen Entwicklungsdauer noch völlig unverästelt sind und fast nur vereinzelte Nadeln besitzen, den „Hungertypus" an sich tragen. Unter günstigen Umständen entwickeln üppige Exemplare im dritten oder auch im zweiten Jahre Triebe bis zur Länge von 2 dm. Sobald im kommenden Frühjahre sich der neue Trieb zu verlängern beginnt, entwickeln sich an seiner Basis die ruhenden Augen und bilden einen Kranz kleiner Ästchen, welche Art des Wachsthums auch bei den anderen Coniferen auftritt.

Infolge dieser Art des Wachsthums erklärt sich von selbst die mehr oder weniger kegel- oder spindelförmige Gestalt der Nadelhölzer, die bei freistehenden Bäumen besonders im höheren Gebirge so schön zum Ausdrucke kommt. Wer bewundert nicht in dieser Hinsicht die fast mathematische Form einer unten [illegible]

angelegten und nach oben sich außerordentlich regelmäßig verjüngenden sogenannten Wettertanne? Obwohl die Zundern im allgemeinen den nämlichen Gesetzen der wirtelförmigen Anlage ihrer Äste folgen, wie die stämmigen Nadelhölzer, so ist doch der Gesammteindruck ihres Habitus ein ganz anderer. Ihre eigenthümliche Erscheinungsweise lässt sich hauptsächlich auf den Ausfall eines Hauptstammes und die hiedurch geänderte Form des Geästes als Grundursachen zurückführen.

Bei den hochstämmigen Nadelhölzern eilt die centrale Knospe in Längen- und Dickenwachsthum den übrigen weit voraus, die Seitensprossen bleiben in der Entwicklung zurück; so geht die Hauptrichtung des Wachsthums nach oben. Wenn dann die Astwirtel gegen den Wipfel des Baumes in kräftigster stufenweiser Ausbildung sich befinden, verkommen die der unteren Regionen, vertrocknen und bilden das hygroscopische Reiserwerk, welches den Stamm umgibt. Sobald dasselbe morsch und brüchig geworden oder infolge eines Sturmes geknickt abfällt, ragt die schöne Krone auf mächtigem Stamme frei empor oder sie sucht im Dickicht eines Waldes, gleichsam nach Luft und Licht ringend, ihre Gipfel so weit als möglich in die Höhe zu treiben. Bei der Zunder aber kommt es zur Entwicklung eines eigentlichen Stammes nicht. Die Seitensprossen der ersten Jahrgänge vertreten die Stelle eines mittleren Triebes und wachsen, sobald ihre Ausbildung durch nichts gehindert wird, ziemlich gleichmäßig fort. Mehrere Jahre hindurch eilen die nach außen gerichteten Zweige der Seitensprossen stets den übrigen voran, verlängern sich und werden auf Unkosten derselben stärker. Auf diese Weise entstehen auf freien, ebenen Plätzen unserer Gebirge, auf Steinblöcken und Felsspitzen jene typischen Formen der Zundern, die Kronleuchter, deren regelmäßige Gestalt sich jeder Kunstgärtner als ausgesuchtes Muster für sogenannte Buschbäume wählen könnte.

Die Arme eines solchen Kronleuchters stehen am Grunde aufstrebend ab, krümmen sich dann bogenförmig nach oben, während die Endsprossen vertical stehen. Verlängern sich die äußerst zähen aber weichen Aste, dann werden sie wohl unter dem Drucke der Benadelung, sowie ihres eigenen Gewichtes fast dem Boden anliegen, vom Ausgangspunkte mehr weniger spreizend abstehen; die Aste gleichen ruthenförmigen Verlän-

gerungen, die oft weit herumkriechen und einem ungestörten Zunderbestand ein eigenthümliches Aussehen verleihen.

Steht die Zunder an einem steilen Abhange, an einem Grate oder in einer Felsritze, so kann sie sich natürlich nur nach einer Seite hin ausbreiten; dadurch nimmt sie die Gestalt eines hängenden, an der Spitze aufstrebenden Busches an, wie man sie so oft im Gebirge zu beobachten Gelegenheit hat. Schließen sich viele derartige Exemplare an einem Abhange zu einem Walde, so scheint der ganze Bestand aus aufrechten, biegsamen, dem Spiele des Windes folgenden, jungen Nadelhölzern zu bestehen; in der That ist aber der Wurzelhals weit oberhalb der Richtung der aufstrebenden Stämmchen zu suchen.

Ein eigentlicher aufrechter Stamm, welcher gleichseitig nach allen Richtungen Äste entsendet, gelangt bei der Zunder nicht zur Entwicklung; dafür gedeihen die Seitenäste um so üppiger; die steil aufstrebenden Triebe nehmen mitunter die Form gewaltiger, flatternder Äste an und erreichen Dimensionen, wie sie nur an den mittleren Ästen starker Fichten und Tannen vorkommen. Die weichen, zähen Äste älterer Exemplare greifen 5, 6, ja 8 bis 10 m weit aus und werden vom Winde, dem sie durch ihre buschige Benadelung eine große Angriffsfläche bieten, wie die schwankenden Halme eines Kornfeldes hin und her gepeitscht. An sanfter geneigten Abhängen oder fast ebenen Ausbreitungen, an welche die Cultur die Axt noch nicht angelegt hat, ragen in dichten Beständen einzelne ältere, etwas kräftigere Exemplare so sehr in die Höhe, dass sie ihrem äußeren Aussehen nach unbedingt den Eindruck eines Waldes hervorbringen. In den wildreichen Gegenden des Karwendelgebirges, insbesondere in der Hinter-Riss, bieten sie den Hirschen und Gemsen willkommenen Unterstand.

Die Zunder wächst im allgemeinen sehr langsam. Da sie die obere Holzgrenze bildet, tritt sie in Regionen, in welchen die Größenverhältnisse aller Pflanzen mehr minder zurückbleiben; aber auch an ihrer unteren Verbreitungsgrenze gedeiht sie nur in weniger schönen, ja geradezu kümmerlichen Exemplaren, so dass die eigentlichen Prachtstücke innerhalb beider Grenzen zu suchen sind, und wie uns aus vielen Beobachtungen bedünken will, näher der oberen Grenze. Rasch heranwachsende Stücke treiben wohl 4 *dm* lange Sprossen, bei mittleren erreichen sie

kaum mehr als 2 *dm*, bei mageren sind sie oft kaum halbfingerlang. Wenn die Seitentriebe nicht allzu kurz sind, kann man wegen der regelmäßigen Veranlagung der Aste leicht eine Altersbestimmung vornehmen. Meterlange Triebe mit zehn Astansätzen, d. i. zehnjährigem Bestande, gehören keineswegs zu mageren Exemplaren. Große Äste alter, kräftiger Zundern erreichen an der Basis 8—12 *cm* Durchmesser; am Hirnschnitt des Holzes zählt man 50—60, ja 80—100 Jahresringe!

Das Wurzelvermögen der Zundern ist auffallend stark. Sie bohren sich mit ihren Wurzeln in jede Felsenritze und unterteufen den dichten Rasen, bilden auch dichte Gefilze und Schöpfe in den Torfmooren und besitzen darin eine so bedeutende Festigkeit, dass sie dem wüthendsten Sturme nicht weichen und selbst Lawinen über sich hinweggehen lassen können.

Wie schon früher erwähnt wurde, strecken sich infolge des Gewichtes der saftigen Äste und der dichten Nadelbekleidung die Zundern zu Boden; die Äste und Ausläufer kriechen über den Boden hin, bis sie von Moosen und anderen Gewächsen förmlich überzogen werden und so gleichsam in der weichen Unterlage versinken. Die so eingebetteten Äste nehmen die Gestalt und Function unterirdischer Stämme an, treiben gelegentlich Wurzeln und Schösslinge und kriechen oft 5, 8, ja 10 *m* weit unter dem Boden fort, stets an der Spitze sich erneuernd; der innerste Theil geht nicht selten zugrunde.

Derartig unter der Oberfläche hinkriechende Stämme erreichen die Dicke eines Mannesschenkels und zählen nicht selten 150 — 200 Jahresringe. Solche unterirdische, kräftige Stammgebilde sind unter der Bezeichnung „Seele, Zunderseele“ bekannt; sie liegen zu drei bis vier dicht neben- oder auch übereinander im Humus oder Torfe begraben und helfen als Balken die weiche, rutschende Masse binden und festigen. — Bricht irgendwo auf einem Grate oder an einer Lanne ein Stück Fels ab oder rollt das abbröckelnde Gestein und der weiche Boden in die Tiefe, dann hängen die langen „Seelen“, noch Jahre hindurch an der Spitze fortgrünend, träumerisch über dem schwindelerregenden Abgrund.

Anhänglich verdient ihres eigenartigen Auftretens halber die Spirke eine gesonderte Betrachtung. Schon auf den ersten Anblick unterscheidet sich eine gut ausgebildete Spirke von der

Zunder; der aufrechte Wuchs ist ein so auffallendes Merkmal, dass selbst der gemeine Mann Veranlassung fand, diese Form mit einem eigenen Namen zu belegen. Außer den Eigenthümlichkeiten des Zapfens lässt sich bei der Spirke eine dunklere Färbung der Nadelbüschel anführen. Da die Bildung der letzteren häufig an den Zweigen unterbrochen ist, sehen die Spirken aus wie zerzaust und ruppig, was ihr Aussehen noch trauriger macht. Die Stämme, welche 10, 12, ja 15 m hoch werden und dabei eine Dicke von 2—3 dm erreichen, vermögen nicht den Eindruck einer aussterbenden Vegetationsform zu verscheuchen. Vereinzelt stehende Exemplare entwickeln sich oft so urwüchsig, dass der dichte, gestielte Schopf einem riesigen Aspergill nicht unähnlich sieht.

Nicht überall erhebt sich jedoch die Spirke zur Baumform, sondern kriecht, das Eigenwesen ihrer Schwestern, der Zunder, nicht verleugnend, zuerst über den Boden und erhebt sich dann in raschem Bogen, bis der obere Theil vertical in die Luft ragt. Im Jugendzustande unterscheiden sich aufstrebende Spirken von Zundern wohl gar nicht, besonders da die Hakenbildung an den Apophysen der Zapfenschuppen bei ersteren geringfügiger [illegible] aufstrebenden Zundern hingegen erscheint.

Die Zundern wie Spirken sind niemals Waldbäume [illegible] lässt sich [illegible] wenig sagen. Dass verschiedene Formen mit [illegible] gefunden werden, [illegible]

[illegible]

[illegible]

regelmäßig im Anschlusse an den hochstämmigen Nadelwald noch ein Gürtel niedrigeren Krummholzes, um so gleichsam den Wald in einer den Umständen angepassten Form nach oben vorzuschieben. Freilich wird die Bezeichnung eines Zunderbestandes als Wald weniger gerechtfertigt finden, wer den Begriff dazu sich in einem hochstämmigen Gehölze der Niederungen oder Bergwälder bildete; wenn wir aber den Zunderbestand als die natürliche, nur den Umständen angepasste Fortsetzung eines „eigentlichen Waldes“ betrachten, wenn wir, absehend von den Dimensionen der Individuen, ganz analoge Verhältnisse am Hochstamm- und Zunderbestande beobachten, wenn in immerhin mehrere Meter hohen Exemplaren die enge aneinander stehenden Zundern mit ihren dicht benadelten Ästen so zu einem Dache sich schließen, dass die Sonnenstrahlen nur verstohlen durchblicken können, solche Bestände aber manchem „Wald“ an Ausdehnung nicht nachstehen, dann finden wir die Bezeichnung „Wald“ für eine solche Pflanzengenossenschaft sicherlich nicht ungerechtfertigt. Der einheitlichen Betrachtung halber wenden wir dann diese Bezeichnung auf jeden Zunderbestand an. Der Forstmann sieht den Zunderbestand ebenfalls als „Wald“ an.

Abgesehen von der Form der Bäume, ihrer Gruppierung u. s. w. sind unsere Nadelhölzer in den Farbenabstufungen so mannigfach und auffallend, dass auch ein weniger geübtes Auge schon aus größerer Entfernung die einzelnen Arten zu unterscheiden vermag. Die Lärche mit ihren hellfarbigen, sommergrünen, gegen den Winter fahlgelben Nadeln, hebt sich von jedem andern Nadelholze auf den ersten Blick ab; die Fichte stimmt uns durch ihr dunkles Grün ernsthaft, die Edeltanne ergötzt das Auge durch das Saftige ihrer Färbung und den eigenthümlichen Glanz ihrer Nadeln, die an ihrer Unterseite lichte Streifen tragen; der Zirbelkiefer verleihen die langen, feinen, lauchgrünen Nadelpinsel etwas Weihevolles, welcher Eindruck durch die Form der Bäume und die Abgeschiedenheit auf Bergesrücken oder in dunklen Schluchten und Thälern noch erhöht wird; die steifen, spitzen, in allen Tönen von Meergrün spielenden, chlorophyllarmen Nadeln bekunden die kräftige Insolation, welcher die Föhre an den lichten Abhängen der Niederungen ausgesetzt ist. — Von all diesen Bäumen ist die Zunder durch das dunkle, fast schwarze Grün ihrer Nadeln unterschieden. Die düstere Färbung eines Zunderwaldes wird in ihrer Wirkung noch unter-

stützt durch die Einsamkeit, die tiefen Risse und Schrunden, sowie alle Ecken, Vorsprünge und schwindeligen Schrofen, welche die Zunder trotzig besetzt. Zudem das wird Herumsteigen in den unwegsamen Zunderwäldern außerordentlich erschwert, das Vorwärtskommen im Dickichte beständig gehemmt, wenn es nicht Felsen oder jähe Abstürze förmlich einstellen. So kann es geschehen, dass in Zunderwäldern, welche stundenweit von jedem menschlichen Wesen abseits liegen, die Stimme des Rufenden wie in einem Urwalde ungehört verhallt!

Der Eindruck eines Spirkenwaldes ist womöglich noch düsterer, fast unheimlich. Es sind zwar größere, reine Bestände der hochschäftigen Legföhre, Spirkenwälder, nicht überall zu treffen; wo sich aber solche Wälder typisch entwickeln konnten, wie etwa in den Isarauen zwischen Wallgau und Vorder-Riss, präsentieren sich die schwarzgrünen, rupfigen, ungleich lang gestielten Besen so gespensterhaft, dass sich das Auge unwillkürlich von ihnen abwendet, um sich am freundlichen Grün der Bergmähder zu weiden.

Ungeachtet des Vorausgehenden ist es der Zunder beschieden, uns durch ihr Auftreten zu gefallen; jede kahle Stelle überzieht sie, sie verdeckt den nackten Boden, krönt Steinblöcke und Gipfel mit ihren regelmäßigen Armleuchtern, setzt sich an Felsen fest, hängt phantastisch von Graten und Schneiden, bringt Abwechslung in die Scenerie, ja sie unterbricht die Eintönigkeit der Torfmoore. Sogar die Spirke, allerdings nicht in typischen Hochstämmen," gruppiert sich an Felsen und Vorsprüngen in einer Weise, dass unser Auge gerne daran haftet. An den Stuibenfällen bei Reutte sind es Spirken, welche in Zunderngesellschaft die dunkle, fortwährend im Winde sich wiegende Umsäumung bilden, gegen welche der weiße Schleier der herunterstürzenden Wassermassen wirkungsvoll absticht.

Man darf sich übrigens einen Zundernwald nicht vorstellen, wie einen Waldbestand in der norddeutschen Ebene, der sich meilenweit ohne irgend welche Unterbrechung ausdehnt. Die Gebirgsabhänge sind mannigfaltig durch Risse und Gräben, durch Felswände und steile Vorsprünge, Lawinengänge u. s. f. unterbrochen und bilden selten größere ununterbrochene Flächen. Solche Ausbreitungen, wenn sie nicht allzu steil sind (etwa bis gegen 30°), ferner die großen Delta, welche sich vor dem Eingange in bedeutendere Schluchten kegelförmig aufthürmen,

die mehr ebenen Rücken der Berge innerhalb der Zunderngrenze, die mäßig ansteigenden Gründe der höher gelegenen Thäler sind die Fundorte größerer, ununterbrochener, schöner Zunderwälder. Derartige Musterwälder durchschreitet man am Aufstiege zum Lavatschjoch; nicht minder classische Wälder bedecken den Westabhang des Solstein, den Fuß des hohen und niedern Munde bei Telfs, des Tauern bei Reutte. Prachtvolle Zundernbestände befinden sich in den Hauptthälern des Karwendelgebirges, besonders in der Hinter-Riss, wo wenigstens der Zundernwald noch in seiner ursprünglichen Form, von Menschenhand ungestört, fortwachsen kann.

Auf steileren Böschungen oder höher im Gebirge, sowie am Rande eines größeren Bestandes sind die Zunderwälder nicht mehr völlig geschlossen; man findet entweder bedeutende Lücken oder die Zundern stehen überhaupt nur in zerstreuten Büschen, zwischen denen überall der Grasboden hervorschaut; nach den Verbreitungsgrenzen hin werden die Büsche immer seltener, bis sie zuletzt anderen Pflanzen das Gebiet räumen.

Was die Verbreitung der Legföhre betrifft, theilt Christ in seinem Pflanzenleben der Schweiz (pag. 330 u. f.) Folgendes mit: Die Zunder tritt zuerst in den westlichen Alpen auf und streicht mit zunehmender Ausbreitung durch das ganze Alpengebiet über Croatien und Dalmatien; sie besetzt die Höhen der Karpathen wie die siebenbürgischen Alpen (Fuss, Fl. transsylv., pag. 602). Ihre Nordgrenze findet sie im Riesengebirge und in den Sudeten (Fiek, Fl. v. Schles., pag. 535), ihre Nordostgrenze in Galizien (Knapp, Fl. v. Gal., pag. 82). Die Spirke beginnt weiter im Westen; von den Pyrenäen ausgehend, erreicht und begleitet sie die Zunder, sucht jedoch mehr die Niederungen und Thäler auf und liebt die nördliche Abdachung der Gebirge. Wie Christ bemerkt, fällt das intensive Vorkommen der Baumformen in den äußersten Westen, das der Buschformen nach Osten.

Die Zunder ist in den Alpen das am höchsten ins Gebirge aufsteigende Nadelholz, ja überhaupt das höchstgehende stärkere Holzgewächs, welches Bestände bildet, die nur von den Struppen hochalpiner Weiden, Azaleen und Vaccineen noch überholt werden.

Die Lage eines Gebirges, die Exposition, Unterlage, Windrichtung etc. sind maßgebende Factoren, von deren Zusammen-

wirken das Aufsteigen eines geschlossenen Waldes abhängt. Die obere Grenzlinie des Knieholzes stellt daher in verschiedenen Situationen eine mannigfach gekrümmte Curve dar. Sendtner gibt als Mittel aller oberen Zundergrenzen in Bayern 1978 *m* und als Durchschnitt der Maximalgrenzen 2043 *m* an. Die höchsten Standorte sind auf der Windalm bei Berchtesgaden bei 2150 *m*. In der italienischen Schweiz steigt nach Christ die Legföhre bis 2100 *m* an; im Riesengebirge findet sie sich überall zwischen 1150 und 1400 *m*, aber selten höher (Fiek, pag. 535). Čelakovsky gibt im Prodromus Fl. boh. (pag. 18) für die Sudeten 1458, für das Erzgebirge 1248 *m* als obere Grenze an.

In den nördlichen Kalkalpen, besonders im Karwendelgebirge, steigt die Zunder merklich höher hinauf als in den bayerischen Alpen. In einer Abhandlung von L. Pfaundler, J. v. Trentinaglia und H. Graf Ensenberg (Zeitschrift des Ferdinandeums, Innsbruck, 8. Heft, 1880) sind Verticalprojectionen des Gleirsch- und Hinterauthales gegeben, auf denen die oberen Grenzen der Zunder mit der Pfaundler eigenen Genauigkeit verzeichnet sind. Aus diesen Aufzeichnungen, sowie eigener Beobachtung geht hervor, dass die obere Grenze in günstigen Lagen auf [illegible], in weniger günstigen auf [illegible] *m* anzusetzen ist. [illegible] eine Waldrange [illegible] sich [illegible] höchsten [illegible] Höhengrenzen im [illegible]

[illegible]

die oberen Grenzen aller Pflanzen maßgebend sind. So steigt die Zunder in den Gründen der Thäler weniger weit empor als an den Flanken der Gebirge. Südlichere Breiten wirken entschieden fördernd, ebenso günstige Exposition; in letzterer Hinsicht scheint die südliche und südwestliche bevorzugt, während die nördliche und nordöstliche sich stark im Nachtheile befinden. Von letzterer Thatsache überzeugt man sich am leichtesten an den ausgedehnten Deltabildungen; meist von drei Seiten her frei ausgesetzt, lassen sie die Einwirkung der Exposition unmittelbar erkennen. Die obere Grenzlinie helfen noch herabdrücken die regelmäßig blasenden, Feuchtigkeit entziehenden Winde — man betrachte die dem Scirocco ausgesetzten Gebirgsflanken bei Hall und Innsbruck — und ebenso die tiefen Kare und ausgebreiteten Geröllmassen.

In den böhmischen und mährischen Gebirgen bildet die Pflanze einen verhältnismäßig schmalen, nach oben wie unten ziemlich scharf begrenzten Gürtel. In den Alpen ist die untere Grenze bedeutend veränderlich. In Südtirol geht die Zunder allgemein weniger weit ins Thal herab als in Nordtirol. So trifft man sie auf der Mendel kaum unter 1250 *m*; am Ritten bei Bozen steigt sie nicht unter 1580 *m*, unter Umständen bindet sie sich jedoch an gar keine Regel und steigt fast in die nach Süden geöffneten Thäler. Man denke in dieser Hinsicht an Ampola und die Lorinaschlucht, wo die Zunder so weit herabsteigt, wie an den tiefsten Stellen Nordtirols.

Bis 900 *m* steigt die Zunder allenthalben in Thäler und Gebirgsflanken herab; im mittleren Innthale sieht man sie bis 800 *m* und noch weiter mit dem Schotter der Gebirgsbäche herabsteigen. Bei Kundl und Kufstein erreicht sie sozusagen bei 800 *m* die Thalsohle. Allerdings bildet sie alldort keine geschlossenen Wälder mehr, selbst die vereinzelten Exemplare sind verkümmert und vegetieren nur mehr; das Vordringen einzelner Ausläufer eines Zunderbestandes nach größeren oder geringeren Tiefen verwischt aber die untere Grenze der Verbreitung.

Mit der Verbreitung des Zunderwaldes, der einen guten Theil unserer höheren Gebirge überzieht und in mehr minder geschlossenen Beständen durchs ganze Revier sich ausdehnt, wird ein großer Theil der Bodenoberfläche der unmittelbaren Einwirkung der Sonnenstrahlen entzogen; die lichtfarbigen Kalkfelsen, welche die meisten Licht- und Wärmestrahlen zurück-

werfen, werden durch den Zundernbestand verdeckt; die dunklen Nadeln und das dichte Geäste binden die Wärme und schaffen und vermehren sich so eine Grundbedingung ihrer Existenz. Die Luft, welche sich auf den freien, lichten Höhen meist in leichter Bewegung befindet und durch Entziehung der Feuchtigkeit den Boden seiner Wärme beraubt und dieselbe sammt den aufsteigenden Dünsten fortführt, wird in dem Geäste und dem dichten Nadelwerk wie in den Haaren eines Pelzes zurückgehalten und schützt als schlechter Wärmeleiter vor weitgehender Abkühlung, welche die bewegte Luft verursacht. Ein Ausflug zu den kahlen Wänden der lichten Wettersteinkalke an der oberen Zundergrenze der Bettelwurfspitze belehrt uns gründlich über das Gesagte. Während im Bereiche der Zunder zahlreiche Gewächse ihre blühenden Köpfchen auf niedrigen Stielen erheben, sind kaum 50 oder 60 *m* höher in den nackten Kalksteinen Pflanzen, wie Aurikel, Pedicularis, Gentianen u. s. w., welche sich dort in guter Erde, Felsspalten und Ritzen ganz passende Standorte gewählt hatten, in ihrer Entwicklung so weit zurück, als wäre für sie noch kein Frühling angebrochen. Mitte und Ende August trifft man knapp oberhalb der Zundergrenze die Mehrzahl der Exemplare noch nicht in Blüte. Die lichten, fast weißen, von Vegetation unbedekten Felsen strahlen fast alle Wärme zurück.

Ein dichter Bestand hält auch die Feuchtigkeit zurück. Nicht nur das dicht benadelte Astwerk, sondern in noch viel höherem Maßstabe der weiche, humusreiche, torfartige Boden bannt die atmosphärischen Niederschläge; ja nicht wenige Gewächse, welche im Grunde eines Zunderwaldes ein zusagendes Plätzchen gefunden, entreißen vermöge ihrer Hygroskopicität der Luft ihren Feuchtigkeitsgehalt. In dieser Hinsicht wirkt ein [illegible] Zunderwald mit torfigem Boden als Wasserbehälter. Manche Quelle, die kaum 15 *m* unter einem frei aufragenden [illegible] würde versiegen, zerstörte man den darüber liegenden Zunderbestand.

[illegible] Humus- und Torfmassen [illegible] Zunderwaldes sind nicht das Product des [illegible] mehr andere Pflanzen [illegible] an manchen Standorten völlig [illegible] oder suchen ein [illegible] Zunderpolstern selbst — ein [illegible] des Bodens. Die Pflanzenarten,

welche in und mit dem Zunderwalde vorkommen, sind nach der Meereshöhe, der Lage u. s. f. wohl theilweise verschieden, im allgemeinen aber stellt jeder einzelne Zunderbestand sammt den ihn begleitenden Pflanzen einen bestimmten, herausgehobenen Punkt der in ihren Grundzügen mehr minder gleichbleibenden Entwicklungsgeschichte des Zunderwaldes vor. Glücklich gewählte Bestände können als Repräsentanten der genau aufeinander folgenden Stadien in der Ausbildung der Zundergenossenschaft betrachtet werden; diese Auswahl ist gar leicht zu treffen, da auf verhältnismäßig kleinem Gebiete vom jungen Anfluge bis zur Neubesetzung alle Zwischenstufen, durch fast unbemerkbare Übergänge miteinander verbunden, vertreten sind.

Die erste Ansiedlung der Zundern beobachtet man dort, wo der Grund „verritzt" ist, auf brachem Boden, Abrutschungen, auf Schutt und Geröll, welches Regengüsse und Lawinen herabförderten, an Brandstellen u. s. w. Die Gerölle im Kalk- und Dolomitgebirge zerbröckeln viel leichter, als dass sie durch Verwitterung eigentlichen thonhältigen Detritus geben. Ist dies der Fall, oder bleibt nach Wegräumung der gröberen Stücke das feinere Material zurück, so keimen die durch den Wind aufgewehten Sämlinge allsogleich, und da sie in der thonigen Unterlage ausreichende Feuchtigkeit finden, entwickeln sie sich überraschend schnell; die Wurzeln sind, dem Boden angepasst, dünn, schopfig; sie dehnen sich jedoch und verästeln sich weniger, wenn die Unterlage etwas gröber oder fast schotterartig wird. Im eigentlichen scharfen Geröll, auf das nicht durch Lawinengänge etc. erdige Bestandtheile gestreut wurden, muss der Boden für die Zunder erst hergerichtet werden. Kalkfreundliche Flechten helfen das harte Gestein an der Oberfläche zersetzen und bilden im Absterben eine spärliche Humuskrume, welche manchen äußerst genügsamen Pflanzen hinreichend Boden und Nahrung gewährt. Verschiedene Seggen (besonders *Carex sempervirens* und *firma*), die blaue Sesleria, die Silberwurz, der schildblätterige Ampfer, das Alpengänsekraut, in höheren Lagen auch Steinbrecharten und Moose finden sich ein, helfen den spärlichen Untergrund durch ihre Wurzeln festigen und tragen zur Vermehrung desselben nicht unwesentlich bei. Dann setzen sich allmählich kleine strauchige Weiden u. s. w. fest, in deren Gesellschaft die Zunder sich gerne einfindet. Am

schönsten treffen wir diese Verhältnisse überall dort, wo hin und wieder Lawinengänge oder von Hochgewittern geschwellte Gebirgsbäche von den Höhen oder aus den Karen große Schottermassen mitbringen oder auch Entblößungen von der Vegetationsdecke bewirken oder tiefe Rünste und Gräben in alte Gerölle oder Deltabildungen einreißen. Im unermüdlichen Kampfe ums Dasein geht fortwährend von den angrenzenden Zunderbeständen aus die Bestockung des frisch aufgewühlten Bodens vor sich, bis ein frischer Anflug Fuß gefasst, mit dem aber gelegentlich ein erneuter starker Lawinengang wieder aufräumt und so einen neuen Versuch zur Bewaldung veranlasst. In ganz analoger Weise, wie die Zunder die Besetzung einer Reiße in Anspruch nimmt, klettert sie auch allmählich auf Geröllhalden empor, welche durch das Abbruchmaterial darüber liegender Felspartien gebildet werden; freilich sind die Umstände dem Emporsteigen weniger günstig als der Ausbreitung nach unten oder nach den Seiten hin. An der sogenannten Weißreiß oberhalb Absam, einer ausgedehnten Halde mit unterschiedlichem, theilweise sehr grobem Geröll, das etwa bis zu 900 *m* sich ins Thal vorschiebt, lassen sich alle vorhin erwähnten Erscheinungen bestens beobachten. Bei der verhältnismäßig tiefen Lage betheiligen sich an der Festigung des Untergrundes außer den früher angeführten Pflanzen leimkrautartige Gewächse, Rohrgräser und besonders die Grauweide, untergeordnet auch die Purpurweide, — ein Fingerzeig der Natur, wie man Geröllen und Schutthalden zuleibe rücken könnte, um sie zu befestigen. Starke Gussregen schneiden tiefe Schründe in die Reiße und ändern zeitweilig ihre Form. Da diese Veränderungen jahrelang erkenntlich bleiben, bis die Verwitterung des Materials dieselben verwischt, lässt sich die Ausbreitung der Zunder nach allen Richtungen hin mit Angabe relativer Altersstufen verfolgen. — In ähnlicher Weise wie Gerölle bestocken sich Partien, an welchen die Rasenflächen oder ein Stück Wald abrutschte; nur bedarf der Untergrund nicht erst der Vorbereitung für einen neuen Anflug durch humusbildende Pflanzen.

Der Ansiedlung eines Zunderwaldes recht ungünstig sind die **Brandplätze**. Der meist nackte, nur in den Vertiefungen und Rissen mit Steinchen oder Humus erfüllte Kalkboden muss sich erst mit einer Vegetationsdecke überziehen, was bei der schweren Verwitterung einer ungegliederten Oberfläche, die meist bedeu-

tende Ausdehnung besitzt, recht langsam vor sich geht. Auch stößt die Verbreitung der Samen durch den Wind auf nicht unbedeutende Schwierigkeiten. So bildet sich eher ein Rasenanflug, bevor sich der Zundernwald zu erneuern vermag. An Stelle sehr ausgedehnter Zunderbrände nördlich von Hall, in den Jahren 1865 und 1866, sieht man zur Zeit in einer Höhe von mehr als 1500 *m* nur einen sehr schwachen Anflug grasartiger und krautiger Gewächse, welche einer geschlossenen Rasenbildung vorangehen; junge Zunderbüsche sind fast so selten wie weiße Raben. Von größerer Entfernung sehen beide Brandstellen zur Stunde noch kahl aus. Die Berglehnen oberhalb der Thaureralpe (von 1700 *m* an) schmücken sich erst jetzt ganz allmählich mit einem Zunderanfluge, obwohl der frühere Bestand schon zur Mitte des vorigen Jahrhunderts durch Brand zugrunde gieng.

Nicht viel günstiger für das Aufkommen eines Zunderwaldes sind die Umstände in geringerer verticaler Erhebung, besonders wenn der Untergrund aus guter Erde u. s. w. zusammengesetzt ist. Lange bevor sich das Knieholz entwickeln kann, wuchern von allen Seiten her die grasartigen Gewächse und bilden eine geschlossene Narbe. Die dichten, aus sauren Rietgräsern gebildeten, üppig wallenden Rasen lassen kein Samenkorn einer Zunder auf den keimtreibenden Boden gelangen.

Auf geschlossenem Rasen ermöglicht eine nur ganz zufällige Ursache das Aufkommen der Zunder; das Abfallen eines Steines, der an mehreren Stellen den Rasen schürft, das Abfahren eines größeren oder geringeren Theiles der Rasendecke infolge anhaltend feuchter Witterung oder allzu steiler Böschung bereiten Plätzchen, an denen Zundern eher emporkommen, als die Gräser sie zu überdecken vermögen. An Abhängen und steilen Lannen bringt der Tritt des Rothwildes oder des weidenden Alpenviehes Vertiefungen hervor, die dem Aufkommen der Zunder günstig sind. Die Zunder rückt allmählich gegen jede Wiese vor, wenn selbe von der Sense des Heuers verschont bleibt; von allen Seiten her dringt sie in dieselbe, wenn auch langsam, ein.

Mit der Zunder stellen sich fast allerorts Pflanzen ein, welche sie theilweise vertreten oder mit ihr Bestände bilden. Ausschließliche Zunderbestände, die gar keine andere Pflanze

aufkommen lassen, sind fast nirgends zu beobachten. In jüngeren Beständen sieht man besonders die rauhhaarige Alpenrose zwischen den Zundern die Lücken ausfüllen; der Wachholder, alpine Rosenformen, der Vogelbeerbaum, die Mehlbeere, Zwergmispel, die Kesselbeere, verschiedene strauchartige Weiden, der Seidelbast, mehrere Arten der Heckenkirsche, wie noch manche andere Strauchgewächse finden sich bald seltener, bald häufiger in den Zundern, füllen die zwischen ihnen freien Plätze aus oder vertreten theilweise die Zunder und bilden mit ihr einen geschlossenen Bestand, in dem bald die eine, bald die andere Art vorwaltet. Der Zunderwald vermengt sich so mit einem Gestrüppe vorbenannter Strauchgewächse.

Zwischen die strauchförmigen Laubgewächse und die Zunder drängt sich auch noch ein Bestand niedriger Halbsträucher als letzte Form von Holzgewächsen: das Heide- und Besenkraut, die Heidel-, Rausch- und Preisselbeere, die Alpen- und gemeine Bärentraube, der gestreifte Kellerhals, das buchsblätterige Kreuzkraut, Hauhechel u. s. w. gedeihen üppig als Unterholz des Zunderwaldes.

Als dritten Bestand bemerkt man Prunellen, die Silberwurz, Berggamander, Quendel, Fingerkraut, Hornklee, Augentrost, Gräser und Halbgräser, allerhand [illegible], Kopfblüthler, [illegible] u. s. w.; als niedrigste Stufe trifft man Moose und Flechten.

Alle diese Pflanzen liefern durch ihre Nadeln, abfallenden Blätter und die Gräser durch ihre dichten Wurzeln, Blätter und deren Scheiden eine [illegible] Menge organischer Substanz, die sich auf dem Boden ablagert. Auf diese Weise werden [illegible] Bestände [illegible] verdrängt und bilden sich nur noch die Halbsträucher und die niederen Holzgewächse [illegible] die Zunder in [illegible] Exemplaren die [illegible] des Terrains, [illegible] von der rauhhaarigen oder [illegible] Alpenrose, [illegible] mit ihren [illegible] Blüten auf dem [illegible] [illegible] Zwergwachholder. [illegible] [illegible] u. s. w. [illegible] [illegible] [illegible] Windbruch, dann [illegible] [illegible]

liche Torfbildung ein, welche die untersten Theile der Zundern mit bedeutenden organischen Massen umgibt; die langen, fortkriechenden Äste sind dann im Torfe oder Humus förmlich versunken. Die Torf- und Humusmassen entwickeln sich, wie es den Anschein hat, in üppigen Beständen sehr rasch; mehrere Fuß tiefe Lagen sind allerorts zu treffen; nach der Qualität steht dieser Torf dem in Hochmooren gewonnenen mitunter nicht nach; ausgebeutet wird er, unseres Wissens, nirgends.

Die Ansammlung organischer Massen, die sozusagen kalkfrei sind, liefert einen Untergrund, der selbst kalkfeindlichen Pflanzen ein gastliches Plätzchen bietet. Auf Humus und Torf findet sich allenthalben im Kalkgebirge die rostblätterige Alpenrose in kräftiger Entwicklung, ja sie bildet mit der rauhhaarigen Kreuzungen in allen goneoklinischen Formen; ferner die Rauschbeere, ja selbst die strammsten Kalkfeinde, eigentliche Torfmoose (*Sphagnum cymbifolium*, *rigidum* u. s. w.). Die Zunder gedeiht im selbstgeschaffenen, kalkfreien Boden nicht weniger üppig als auf Kalkunterlage. Das hängt wohl mit der Erscheinung zusammen, dass die Aschenbestandtheile der Zunder selbst dann auffallend gering sind, wenn sie sich im Kalkgerölle entwickelte. Man darf kühn behaupten, dass der größte Theil der Zundern unserer Kalkgebirge in Torf oder Humus steckt, wodurch das Eindringen der Wurzeln in den Kalkboden gehindert wird. Es kann nach diesen Beobachtungen auch nicht wundernehmen, wenn die Zunder geradezu in den kalklosen Hochmooren sich an der Torfbildung betheiligt oder auf Schiefergebirgen und eruptiven Silikatgesteinen sich einfindet.

Ganz analoge Verhältnisse wie die kriechende Zunder weist auch die hochschäftige Spirke auf. Im Jugendzustande überhaupt fast nicht von ersterer verschieden, breitet sie sich über Abhänge und Thalniederungen aus und wird nahezu von denselben Pflanzen begleitet wie jene. Ohne die Thalform der Zunder zu sein — sie kommt mit ihr gemengt vor —, zeigt sie doch eine besondere Vorliebe für die ebenen, weiteren Bette der Abflüsse aus den nördlichen Kalkalpen. Eine Moorvegetation im Grunde des Spirkenwaldes wird sehr häufig durch hygroskopische Moose, besonders Sphagneen, eingeleitet; in den öfters erwähnten Beständen im Isarthale zwischen Wallgau und Vorder-Riss stellt sich auch häufig der wohlriechende Zeiland (*Daphne Cneorum*)

ein. Da Spirkenbestände zeitweilig abgeholzt werden, wodurch die Moorbildung stets wieder unterbrochen wird, sich aber mit dem jungen Spirkenanflug erneuert, gewinnt man einen Maßstab für Altersbestimmungen der Moorvegetation.

Mit der Ansammlung der Torfmassen ist die Entwicklung des Zunderwaldes eigentlich abgeschlossen. Man sieht im Hochgebirge oberhalb der Zundergrenze häufig Torf oder Humus abgelagert, ja metertief den Boden überziehen der aus Azaleen, Moosen u. s. w. hervorgegangen ist, der sich, nicht mehr oder nur sehr spärlich mit Pflanzenwuchs überzieht; die aufgespeicherten organischen Reste scheinen einem neuen Anflug nicht den geeigneten Boden zu bieten. Innerhalb der Zunderbestände trifft man auch hie und da die braune Unterlage von jeder Vegetation entblößt, diese Fälle sind jedoch so untergeordneter Natur, dass sie nicht in die Wagschale fallen. Die Zunder besetzt vielmehr die freien Stellen in den Überresten, welche ein früherer Bestand schuf; ihre Genügsamkeit an unorganischen Stoffen scheint davon die Ursache zu sein.

So erneuert sich der Zunderwald beständig und auf den Trümmerhaufen des untergegangenen Lebens wuchert in urkräftigen Formen neues empor. Wenn die Cultur nicht eingreift, die Natur sich selbst überlassen bleibt, so kann, freilich in langer Zeit, ein zweiter, dritter, vierter Bestand wörtlich über dem ersten sich erheben. Jeder Bestand liefert Anhäufungen von Torf und Mulm, in denen sich die Wurzeln vertiefen und die kriechenden Äste sich einbetten und so die weiche Masse gleichsam mit Balken durchqueren und festhalten. Das Holz der Stämme fault eigentlich nicht oder löst sich in seine Bestandtheile auf, sondern wird vielmehr in den braunen organischen Überresten conserviert.

Die Ablagerungen können sehr bedeutende Dimensionen annehmen; metertiefe Lagen sind häufig; an besonders günstigen Stellen bedecken sie den Boden wohl bis zur Tiefe von 2, ja 3 *m*. Da dieselben sich ähnlich wie der Torf bilden, ja theilweise das Product derselben Gewächse sind, welchen man in Mooren begegnet, kann man mit Recht den vom Zunderbestand erzeugten Untergrund den Torfbildungen beizählen; nur lagern sich auch die Nadeln der Zundern und die Blätter der Halbsträucher ab und werden, theilweise zersetzt, aufbewahrt.

Die fäulniswidrigen organischen Säuren, welche bei der Torfbildung die völlige Zersetzung der Pflanzenreste verhindern, fehlen auch nicht im Zundertorf; sie legen ihr Wirken trotz ihrer hohen Wässerungsgrade dadurch an den Tag, dass sie gar häufig das liegende Kalkgestein angreifen und auflösen, so dass nur noch die allenfalls enthaltenen Hornsteinpartien als rauhe Vorsprünge übrigbleiben. Bedeutende Aufspeicherungen des Torfes findet man um den Achensee, im Riss-, Gleirsch- und Hinterauthale, wo stellenweise die Zunderbestände noch ungestört fortwachsen. Den störenden Einfluss des Abholzens auf die Torfbildung zeigen uns die abgetriebenen Stellen am Zunderkopf (bei Absam) und am sogenannten Thurnschlag.

Wie früher bemerkt wurde, drängen sich in den Zunderbestand fast regelmäßig andere Gewächse, welche entweder mit der Zunder die gemeinschaftlichen Existenzbedingungen theilen oder die Zunder sogar vertreten. Die Bestände verschiedener Gewächse gehen ineinander über und durchsetzen sich gegenseitig. Die Abwechslung und Mannigfaltigkeit in den Übergängen ist so reichlich, dass es leichter fällt, sie an Ort und Stelle zu bewundern, als sie in erschöpfender Weise naturgetreu zu beschreiben. Hier folgt der Versuch, einige Hauptformen hervorzuheben.

Wenn der Zunderwald an der oberen Grenze seiner Verbreitung oder nach den Richtungen, in welchen er vordringt, oder infolge allzu steiler Böschung sich lichtet, erscheinen zwischen weiter abstehenden Büschen offene, dürftig beraste Stellen, oder es erscheint, wie es meistens im höheren Gebirge der Fall ist, das nackte Geröll. Solche freie Stellen sind es nun, welche im prächtigsten Schmucke buntfarbiger Blüten prangen. Verschiedene Arten von Korb- und Kreuzblütlern, Enziane, Steinbrech, Baldrian, Labkräuter, Hahnenfußgewächse u. s. w. stehen oft im buntesten Durcheinander und erfreuen unser Auge nicht weniger durch die saftigen Farben ihrer auffallend großen Blüten, als unseren Geruchsinn durch ihren herrlichen Duft. Überschreitet man die obere Zundergrenze, so tritt man alsbald abwechselnd in Bestände niederer Gräser und Halbgräser, niedriger alpiner Weiden, der Azaleen und in die tundraähnlichen Bestände aus Moosen und Flechten mit ihrem hochalpinen Pflanzenschmucke.

Weniger Abwechslung bietet der Übergang des Zunderwaldes in die Wiese oder Matte. Zwischen den ersten gegen den Grasbestand abgeschickten Vorposten und dem geschlossenen Zunderwald finden sich nicht wenige schönfarbige Blüten ein; duftende Stendeln, hohe Hahnenfußgewächse, Korbblütler, große farbenprächtige Enziane und manche andere bezeichnen den Übergang. In der Wiese selbst walten Gräser, Halbgräser und Simsen vor, denen gegenüber die schönblütigen, laubtragenden Pflanzen eine untergeordnete Rolle spielen. Steile Böschungen sind meist von der immergrünen oder rostbraunen und steifblätterigen Segge, von der Rasenschmiele, der blauen Sesleria u. s. w. besetzt, welche deckenförmig über den Abhang herunterhängen. Steinige Partien sind mit Aurikeln, Baldrian, Kreuzblütlern, Zwergwegdorn, Kugelblumen, Maskenblütlern, kleinen Gräsern und Halbgräsern besetzt und fallen durch Mannigfaltigkeit ihrer Formen auf. Die Zundern werden an solchen Abhängen durch Alpenrosen (*Rh. hirsutum*) oder Weidengebüsche (*S. glabra, hastata, aurita, arbuscula*) vertreten; es mischen sich in den Bestand Ebereschen, Heckenkirschen, die Sahl- und großblätterige Weide; im Mergelgrunde sieht man selbst die Buche in krummholzförmigen Exemplaren oder auch als anständigen Baum sich zur Legföhre gesellen; hie und da überragt auch eine Fichte oder Tanne den Zunderbestand. So eintönig ein vorhin beschriebener Abhang von größerer Entfernung aussieht, so abwechslungsvoll und interessant, ja selbst für das Auge eines Laien reizend, ist derselbe in der Nähe, infolge der wunderbaren Gruppierung der Büsche, der Vertheilung zwischen Terrain und Gewächs u. s. w. In unseren Gegenden trifft man sie überall, weil der magere Bestand der Abhänge selten abgetrieben wird.

Ein höchst eigenthümliches Bild gewährt der Übergang des Zunderwaldes in den Hochwald. Nach Sendtner (Vegetationsverhältnisse, p. 564) ist der Hochwald gemäß forstmännischen Begriffen „ein aus Samen hervorgegangener Holzbestand von hoher Umtriebszeit“. Es können daher Nadel- wie Laubhölzer einen Hochwald bilden. Da der Zunderwald nur sehr langsam wächst und sich wenig über den Boden erhebt, können sich einzelne Fichten, Weißtannen, Lärchen, Eiben, Bergahorne, Buchen, Birken u. s. w. in demselben ansiedeln und wegen ihres rascheren Wachsthums ihn bald überragen. So trifft man innerhalb des Verbreitungsbezirkes genannter Baumarten allent-

halben Zunderbestände, welche das Unterholz eines Hochwaldes bilden, der jedoch so locker ist, dass die Sonnenstrahlen in ihrer Wirkung nur wenig gehindert werden. Wird der Hochwald dichter, so geht wohl mancher Zunderbusch langsam ein; andere treiben verlängerte, dünnere Äste, welche spärlicher mit Nadeln besetzt sind und weniger zahlreiche Blüten und Früchte tragen. In die Verquickung des Zunder- und Hochwaldes mengen sich noch schattenliebende, niedrige Laubhölzer, höhere Krautgewächse und Farne. Die schon öfters erwähnten Heckenkirschen und niedrigen Weiden, die Alpenjohannisbeere, die alpine Rose, der Hasen- und Milchlattich, die Goldruthe, Eisenhutarten, der Gaisbart, verschiedene Doldengewächse (*Thommasinia verticillaris, Pleurospermum austriacum, Laserpitium latifolium, Imperatoria Ostruthium, Choerophyllum hirsutum* u. s. w.), die agleiblätterige Wiesenraute, Storchschnabelarten, Bingelkraut, Waldscabiose und verschiedene andere, sowie eine Menge Farrenkräuter treten bald einzeln, bald in Gruppen auf und bringen noch mehr Abwechslung in das ohnehin schon reich gegliederte Bild. Durch das ganze Karwendelgebiet, wo kleine Bestände aus langschäftigem Nadelholz oder aus Buche und Ahorn mit der Zunder wechseln, kann man das gegenseitige Ineinandergreifen in allen Stufen der Entwicklung beobachten. Die kühnste Phantasie ist kaum imstande, Combinationen zu entdecken, denen nicht der eine oder andere Punkt entspräche. Verschiedene Korbblütler, besonders Habichtskräuter, wolfsmilchartige Gewächse, Siegelwurz, Schattenblümchen, Maiglöckchen, Knotenfuß, Goldapfel, mehrere Stendelarten u. v. a. ziehen auch den Nichtfachmann an und erwerben unbedingt sein Wohlgefallen.

Besonders erwähnenswert scheint das gleichzeitige Vorkommen der Zunder mit Zirbelkiefer (Zirmbaum). Christ schreibt in seinem Pflanzenleben der Schweiz (p. 231), dass die Zirbelkiefer in Ostsibirien und Kamtschatka vorwiegend als Krummholz (Kedrownik) auftritt, mit kleinen Zapfen dicht besetzt ist und wachholderartig am Boden hinkriecht, also in ihrem äußeren Auftreten der Zunder ähnlich ist. In unseren Gegenden lässt sich eine solche Art des Wachsthums nirgends beobachten; ihre Bäume haben vielmehr stattliche Formen. Und wenn auch manchmal ein Ast auf Kosten der anderen sich vergrößert und stärker wird, was besonders an verletzten oder geknickten Exemplaren vorkommt, die sich durch Seitenäste

regenerieren, wenn auch diese herabhängen und wieder bogenförmig emporstreben, so ist doch der buschförmige Wuchs und die kriechende Wachsthumsrichtung völlig ausgeschlossen. In gedrungenen Baumformen überragt die Zirbelkiefer mit ihren dünnen, weichen, pinselförmigen, blaubereiften Nadeln stark die herumkriechenden, dunklen, struppigen Zundern; letztere spielen unter den Zirmen ungefähr dieselbe Rolle wie unter Fichten oder Tannen. Am Sonnenwendjoch (bei Münster), auf der Baralpe am Karwendel und besonders schön am Überschall (Isarursprung) lässt sich das Übergreifen des Knieholzes und Zirmbestandes beobachten. Besonders der letzte Standort ist wegen seiner bizarren Felsformen, dem wirren Durcheinander abgestürzter Blöcke und aufgeschütteter Halden, die in reizendsten Combinationen mit Alpenpflanzen bewachsen sind, und wegen der schaurig-großartigen Umgebung ein Punkt, der nicht bloß Maler von Beruf, sondern auch sinnige Naturfreunde anlockt und fesselt. Nicht weniger schöne Bestände finden wir in Südtirol, so z. B. an der Valparola am Übergang von San Cassian nach Ampezzo.

Gegen die untere Grenze der Verbreitung reicht die Zunder häufig als Unterholz in einen lockeren Föhrenbestand; an der oberen Grenzlinie der Föhre wiegen sich wahre Prachtexemplare unter den starken Fittichen einzelner alter Föhren. Nimmt aber letztere in tieferen Regionen, die mehr in ebene Gebiete herabsteigen, an Individuen zu, dann verkümmert die Zunder zusehends, wird dünnastig, die Nadeln stehen zerstreut und unterbrochen und deuten auf das nahe Ende eines solchen Busches hin. Am magersten ist sowohl Zunder wie Föhre auf den Deltabildungen am Fuße der Kalkberge; es bleibt unentschieden, ob die Zunder oder Föhre in armseligeren Exemplaren zu existieren vermag. In solche „Hungerbestände" mengen sich noch struppige Wachholdersträuche, zerknitterte Hartriegel, knorrige Exemplare des Schlingbaumes oder Steindorns, eine dornige Berberitze oder ein stechender Rosenstrauch, um das charakteristische Bild zu vollenden! Den Untergrund bildet ein niedriges Gestrüpp aus Heidekraut, Knäuelblumen, der buchsblätterigen Kreuzblume, durchwachsen von der Sesleria, der weißen, frühblühenden oder Heide-Segge; Rennthierflechten helfen mit zur Herstellung einer starren Bodenbedeckung.

Eigentliche „Niederwälder" im Sinne des Forstmannes, das heisst „durch Stockausschlag verjüngte Wälder mit geringer Um-

triebszeit“ (Sendtner, p. 564), kommen im Bereiche unserer Zunderwälder wohl nicht leicht vor, da sie in unseren Gegenden zumeist von der Weiß- oder Schwarzerle gebildet werden. Dafür trifft man auf unseren Höhen die Grünerle (*Alnus viridis*), Lutherstaude genannt, welche den Niederwald ersetzt und, wie es scheint, unter dem Laubholze den Zunderhabitus annimmt. Sie liebt in erster Linie thonigen Boden, ist der Feuchtigkeit hold und bildet mit Moosen und niedrigen humuserzeugenden Pflanzen einen an organischen Bestandtheilen überreichen Boden (Erlenbruch). In ihre weniger geschlossenen Bestände drängt sich manchmal die Zunder, mit oder ohne Gesellschaft einzelner hochstämmiger Nadelhölzer. Wenn in älteren Beständen dieses Gemisches der Boden reichlich mit organischen Massen bedeckt ist, schmiegen sich in die weichen Pölster aus Dicranum, Barbula, Bartramia, Sphagnum, Bärlappen u. s. w. eine Reihe von Pflanzen, die theils durch ihre grundständigen Blätter die Moospolster verdichten, wie manche Steinbrecharten, theils als Liebhaber von Schatten und Feuchtigkeit im Interesse ihrer Existenz dieselben als Standorte erküren, wie alpine Ehrenpreisarten, Mieren, leimkrautartige Gewächse, dünnblätterige Steinbrecharten, der Berg- und Alpenblasenfarn u. v. a.; inzwischen leuchten die rothen Blüten der rostfarbigen Alpenrose und deren Bastarde mit der rauhhaarigen hervor. Eine eigentlich classische Stelle für die vorausgehende Betrachtung findet sich hinter dem Übergange über das Issjöchl am Haller Salzberge; die Strecke vom genannten Übergange bis zur Stempelhalde eignet sich übrigens für Specialstudien aller alpiner Pflanzenformen.

In allen Lagen sind jene Zunderbestände recht interessant, welche ihre Vorposten gegen ein Gerölle aussenden, das sich gegen das Gebirge anlehnt und von einer lockeren Pflanzendecke überzogen ist. Der Pflanzenwuchs bildet auf Geröllen nie geschlossene Bestände, am wenigsten in höheren Lagen, wenn nicht hinlänglich organische Ablagerungen erzeugt werden. Man sieht wohl die Gerölle mit Pflanzen besetzt, aber diese vermögen der Halde für größere Entfernung nicht einen grünen Anstrich zu verleihen, obwohl in der Nähe, je nach der Meereshöhe, die verschiedenartigsten Gruppierungen zu verzeichnen sind. So trifft man fast allerorts das Alpenleinkraut, Felsen- und Steinkresse, das rundblätterige Taschelkraut, das Brillenschöttchen, Moehringien, Hornkräuter, alpine Mieren und Labkräuter, grün-

blütige Steinbrecharten, den weißen Alpenmohn, verschiedene Habichtskräuter, das gamswurzartige Kreuzkraut, das breitblätterige Schwindelkraut, sowie andere Blattpflanzen und alpine Gräser, welche sich im Gerölle auszubreiten und zu vermehren suchen und die neuen Anschotterungen unermüdet besetzen. Mitten in einem solchen alpinen Blumengarten sehen wir dann eine oder die andere Zunder auftauchen, in deren Gesellschaft sich bald Alpenrosen einfinden. Anfänglich finden die umstehenden Blumen Schutz neben und unter den Zundern, werden aber nach und nach zum Rückzuge gedrängt und müssen schließlich das Terrain dem Nadelholze räumen. Bezaubernd schöne Anlagen der vorhin beschriebenen Übergänge findet man am Abstiege vom Lavatschjoch nach dem gleichnamigen Thal, am Fuße und den Rändern der großen Geröllhalden am Stempeljoch, sowie auf den Alpen Lätiz und Laliders im Rissgebiete.

Wie schon öfters berührt wurde, erzeugt der Zunderwald nicht unbedeutende Aufspeicherungen von Torf; es kann daher nicht wundernehmen, wenn sich die Zunder als torfbildende Pflanze in den Mooren einfindet. Die eigentlichen Hochmoore, welche ihre Bezeichnung der uhrglasähnlichen Erhöhung über den Boden verdanken, die aus den Überresten kalkfeindlicher Moose, aus heidelbeerartigen und ähnlichen Gewächsen hervorgehen, sind fast durchgehends mit Zunderbüschen besetzt. Zumeist trifft man die Form *Mughus*, jedoch findet man auch *P. Pumilio* in einzelnen Exemplaren, sowie auch erstere außerhalb des Moores den Kalkboden bewohnt. Die starken Wurzeln durchsetzen auch hier den Torfboden, just wie auf den Gebirgen, sind aber bei der Gewinnung des Torfes nicht sonderlich beliebt. Bei Seefeld, Heiterwang, Pinswang, auf dem Angerberge und in nächster Nähe unserer Wohnung, auf der Walderalpe, finden sich Hochmoore mit Zunderbüschen.

Wie schon aus dem Vorausgehenden ersichtlich ist, gedeiht die Zunder auf trockenen Abhängen wie in den nassen Moospolstern der Hochmoore, an der steilen Böschung wie im ebenen Grunde. Nicht weniger gleichgiltig ist sie hinsichtlich der geologischen Unterlage. Es gibt keine Gesteinsart mit etwas namhafter Verbreitung, die der Zunder nicht geeigneten Standort und Existenzbedingung bietet. Auf Porphyr gedeiht sie ebensogut wie auf granitischen Gesteinen oder auf

Syenit und Augitporphyr. In den verschiedenen Schiefergesteinen der Centralalpen fehlt sie nicht, wenn auch die Bestände derselben denen der Kalkalpen an Ausdehnung unvergleichlich nachstehen. Auf Sandstein (Werfner und Grödner Sandstein) kommt sie in Nord- und Südtirol vor. Ihre größte Entwicklung erreicht sie jedoch im Kalk und Dolomit. Der Wettersteinkalk mit seinen steilen Abhängen und schroffen Wänden ist einer ihrer Lieblingsplätze, trotz seines Widerstandes gegen die Einflüsse der Atmosphärilien. Überblickt man von einem günstigen Punkte, etwa der Reitherspitze, das wüste, weit ausgedehnte Karwendelgebirge mit seinen hellfarbigen, Licht und Wärme zurückstrahlenden Felsen, so sieht man nirgends Holzpflanzen soweit in geschlossenen Reihen nach oben vordringen als die Legföhre; während hochstämmige Nadel- und Laubhölzer weit unter der normalen, anderwärts üblichen Grenze zurückbleiben, breitet sich die Zunder umsomehr aus und besetzt in den oberen Regionen ausschließlich das Gebiet, jedes Plätzchen, wenn anders möglich, ausnützend. Die ausgedehntesten, dichtesten und üppigsten Bestände kennzeichnen den Wettersteinkalk. In diese Eigenschaft theilen sich auch die harten Schichten des alpinen Muschelkalkes.

Der Hauptdolomit, anderwärts auch der Dachsteinkalk, ist größtentheils mit Zundern bewachsen, wenn Lage u. s. w. es gestatten. Der magere Boden ist der Entwicklung eines schönen hochstämmigen Waldes weniger günstig, nur die Zunder findet ihre äußerst bescheidenen Ansprüche befriedigt. Ein unzertrennlicher Begleiter der Zunder auf Dolomit, von Vorarlberg bis zum Kaisergebirge und darüber hinaus ist das schöne, sehr zeitlich blühende *Rhododendron chamaecistus*. Die Gesteinsgrenze wird nicht selten durch die Zunderlinie bezeichnet.

Die weichen, lettigen Partien des alpinen Muschel-(Virgloria-) Kalkes, die thonigen Kössener Schichten, der Lias, Jura, sowie Neokom und noch jüngere Schichten sind weniger von der Zunder überzogen. Der Grund davon liegt wohl nicht in der Abneigung derselben gegen die mergelige Unterlage — manche Stellen weisen Prachtexemplare auf —, sondern die weiche, thonige Unterlage, welche aus einem leichter verwitterbaren Gestein hervorgeht, ist für die Entwicklung der Wiesen und hochstämmigen Wälder entschieden vortheilhafter. Der langsam wachsende Zunderwald vermag nicht aufzukommen, da er von

Wiese oder Hochstammwald überholt wird. So ist die Vorderseite des aus Juraschichten aufgebauten Schönalpenkopfes (Hinter-Riss) und seines westlichen Ausläufers mit Ausnahme weniger Stellen „am Altkoth" nur Wiese oder Fichten- und Tannenwald; die Nord- und Nordwestseite sind mit Zundern bewachsen, welche langsam gegen die Wiese vorrücken, seit der Alpenbetrieb aus Jagdrücksichten eingestellt ist. Gegen die dolomitische „Fleischbank" und den aus gleichem Gestein zusammengesetzten „Rosskopf" bildet die Zunder die Markierung der Gesteinsgrenze. Ähnliche Verhältnisse beobachtet man im Ausfern und Lechthale. Die herrlichen Alpenwiesen liegen auf leichter zersetzbaren, thonigen Schichten; die Wiese bildet stets eine dichte, geschlossene Narbe, bevor sich die Zunder entfalten kann.

Die Geschiebe der Gletscher, die Auskehrmassen der Kare, die Ablagerungen der Flüsse u. s. w. bieten der Zunder geeignete Unterlage; auf Kalktuff, Conglomerat, selbst auf Gips (Salzthon) trifft man sie; auch lässt sie sich im Garten leicht fortbringen und wirkt besonders decorativ in Alpenanlagen.

Bei der großen verticalen Verbreitung muss die Zunder die Fähigkeit besitzen, all die ungünstigen Einflüsse der klimatischen und anderweitigen Verhältnisse zu überwinden. Es wurde bereits früher auf ihr Vermögen, Wärme und Feuchtigkeit festzuhalten, hingewiesen. Die kräftige Insolation, sowie die schneidigen Winde in höheren Lagen suchen der Zunder wie allen Gewächsen die Feuchtigkeit zu entziehen. Viele Pflanzen schützen sich gegen die Entziehung der Feuchtigkeit durch dichten Filzüberzug; die Zunder besitzt ein solches Schutzmittel in der derben Consistenz ihrer Nadeln, sowie in der stark entwickelten Epidermis derselben. Selbst während der größten, mehrwöchentlichen Trockenheit vermag man kaum eine andere Veränderung zu bemerken als das Zusammenneigen der Nadeln an den Endknospen, wodurch gleichsam die der Verdunstung ausgesetzte Oberfläche verkleinert wird. Die paarigen Nadeln werden am Grunde von stark entwickelten Hüllschuppen umgeben und die dünneren Äste sind in ein förmliches Gewirre restlicher Schuppen gewickelt.

Mit derselben Widerstandskraft verträgt die Zunder einen prasselnden Regen oder Hagelschlag, wie sie sich im

Gebirge häufig genug ereignen. Während nach einem starken Hagel Fichten oder Tannen ihres grünen Nadelschmuckes fast beraubt, die Äste nach der Richtung des Gewitters geschunden sind, wodurch die Entwicklung für Jahre hinaus oder vollständig gehemmt wird, nehmen die Zundern kaum nennenswerten Schaden.

Der Winter bedeckt in höheren Lagen mitunter recht frühzeitig die Zunder mit tiefem Schnee und hüllt sie dadurch in einen schlechten Wärmeleiter. Besonders in der letzteren Hälfte des Winters, wenn erfahrungsgemäß die Kälte im Gebirge sich mehr geltend macht, übt die Schneedecke ihre schützende Function aus. 1—3 *m* hoch liegt sie über dem ganzen Bestande und drückt die ausgebreiteten Äste flach auf den Boden. Sobald im Frühjahre oder Vorsommer dieselben von der Schneelast befreit werden, schnellen sie wie Uhrfedern empor und nehmen wohl auch anklebende Erde und Steinchen mit sich, die den Sommer über hängen bleiben. Wenn an etwas steilen Abhängen die Zundern sich unter der Last des Schnees niederlegen und die Abhänge wie eine ununterbrochene weiße Ebene aussehen, erblickt der Einwohner die größte Gefahr eines Lawinenganges.

Die Lawine (Lahne), welche im Winter abgeht, wird hier Windlawine genannt. Eine kleine abfallende Schneemasse, der Tritt einer Gemse sind oft die geringfügige Ursache mit schrecklich verheerendem Erfolge. Der feine staubartige Schnee schießt ab und versetzt die ungeheuren im Hochgebirge liegenden Anhäufungen in Bewegung, die nahezu die Geschwindigkeit des freien Falles erreicht; es entsteht dabei ein furchtbarer Wind; alles, was in den Weg kommt, wird geknickt oder ausgerissen; die stärksten Bäume fliegen wie Spreu in der Luft herum; in engen Thälern steigt noch auf der Gegenseite die Lawine den Abhang hoch hinan. Eine solche Windlawine übertrug im Winter 1889 im Haller Salzberge einen Lärchenstamm von seinem Standorte weg in den Lüften gegen das etwa 150 *m* entfernte „Herrenhaus“ und rannte ein Stück desselben mit solcher Gewalt gegen die Ecke, dass es sich im Gemäuer festkeilte. S. Magdalena im Hallthale wurde durch eine von der gegenüberliegenden Thalseite abstürzende Lawine zerstört. Solche Lawinen mit periodischem Niedergange, die von den Einheimischen meist mit besonderen Namen belegt werden, graben sich

oft ihr Bett in den Boden, nehmen aber auch häufig ihren Weg über die Zundern und sind im Sommer durch die abgekehrte Richtung der Bäume, an den Rändern oder der Unterseite und den oft bis in den Herbst liegenden Schneemassen und Baumstrünken erkenntlich. Von Zundern befördern sie kaum etwas anderes zur Tiefe als eine Masse Gipfel, die doch wegen ihrer Zähigkeit sprichwörtlich sind. Tiefere Schründe reißen die im Frühjahre abgehenden Grundlawinen in den Boden. Sie verdanken ihre Entstehung dem vom Schmelzwasser durchsickerten Schnee. Sie reißen hin und wieder einen Busch mit in die Tiefe, schaden aber wegen ihres normalen Ganges weniger.

An schneidigen Kanten fegt der Wind die Schneedecke manchmal weg und setzt so die Legföhre den größten Kältegraden aus; nicht selten findet man an diesen Stellen dürre Exemplare, die eben die Einwirkung der Kälte nicht ertragen konnten.

Nicht sanfter als die Lawinen geht mit den Zundern der Wind um. Mit furchtbarer Gewalt braust der Sturmwind von den Bergeshöhen und schlägt unbarmherzig mit den weichen Ästen herum; der stärkste Mann kann sich nur mit Mühe festhalten; Steine, die durch Wurzeln oder Gestäude festgehalten wurden, rollen, durch das beständige Rütteln gelockert, der Thalsole zu; bedeutende Flächen hochstämmigen Waldes fallen gleichzeitig nieder (Hinter-Riss, October 1887) — die Zunder biegt sich, dem Peitschen des Sturmes nachgebend, wohin es demselben gefällt; die Bewegungen eines starken Zunderwaldes während eines alpinen Sturmes gleichen sehr den schäumenden Wogen eines aufgeregten Sees.

Keine Jahreszeit, selbst nicht der Hochsommer, ist im Gebirge von Reif und Frost oder Schneefällen verschont. Kaum irgend eine Pflanze verträgt den Reif leichter als die Zunder — nur nicht zur Blütezeit. Der Schnee schadet noch weniger, weil er vor größerer Kälte schützt. Blümlein, die unter den Ästen der Zunder Unterstand fanden, überdauern vorübergehende Schneefälle im Hochsommer. Fast alljährlich ereignen sich im Juli oder August Schneefälle im höheren Gebirge, die an der oberen Zundergrenze häufig genug metertief ausfallen. Krautartige Gewächse werden wohl etwas geknickt und im Entwicklungsprocesse etwas aufgehalten, aber keineswegs getödtet; den geringsten Schaden nimmt die Zunder.

Nicht verträgt die Zunder im Winter oder einem Theil der kalten Jahreszeit das Anstauen des aus den Rinnsalen getretenen Wassers, wodurch ganze Bestände gleichsam in Gletscher verwandelt werden. Auf diese Weise giengen sämmtliche Zundern an der Mündung des Johannisthalbaches in den Rissbach bis aufs letzte Exemplar zugrunde.

Nach den verschiedenen Betrachtungen über die Zunder ist es sicherlich noch am Platze, in engem Rahmen die Bedeutung derselben im Haushalte der Natur zu betonen.

Es wurde mehrmals darauf hingewiesen, wie die Zunder ganz besonders Wärme und Feuchtigkeit bindet. Wenn man bedenkt, dass ungeheuere Flächen lichtfarbiger Gesteine, besonders in Kalk- und Dolomitgebirgen, mit der dunklen, zur Absorption der Wärme in erhöhtem Maßstabe geeigneten Zunder besetzt sind, diese aber Humus und Torf erzeugt, welche die Feuchtigkeit zurückhalten —, so wird man in der Zunder selbst das beste Mittel erblicken, welches die Hauptfactoren zur Milderung der klimatischen Verhältnisse in sich birgt. Zudem wird besonders in hohen Lagen der Boden gefestigt und mit einer Vegetationsdecke überzogen. Es gibt keine Pflanze, welche so zähe und ausdauernd den Kampf ums Dasein mit den zerstörenden Einflüssen der höheren Lage mit größerem Erfolge aufnimmt als die Zunder; jeden Schaden des Individuums sowie des Bestandes sucht sie auszubessern. Durch ihre Widerstandsfähigkeit, mit welcher sie alle Unbilden ungünstiger Einflüsse, ohne Schaden zu nehmen, erträgt, eignet sie sich besonders zu einer Gebirgspflanze, als welche sie auch thatsächlich einen namhaften Höhengürtel in Beschlag nimmt und so die Vegetation alldort präsentiert. Sie speichert riesige Quantitäten humoser Substanzen auf, die enorme Vorräthe im Naturhaushalte bilden, wenn sie zur Zeit auch keine Verwendung finden. Durch den Zunderbestand wird das Gedeihen einer Reihe anderer Pflanzen befördert, ja geradezu bedingt.

Es ist ein großer Vortheil für den Bestand der Zunderwälder, dass der Mensch verhältnismäßig wenig dieselben ausnützt. Wo jedoch die Brennmaterialien theuer sind, das Holz gute Verwertung findet, wird von der bäuerlichen Bevölkerung auch die Zunder als Brennholz verwendet. Die starken, dicken Äste werden ausgehauen, über Felsen und steile Abhänge ins

Thal geworfen oder gewälzt und zur Winterszeit in die Ortschaften geliefert; die dickeren Prügel dienen als Herd- oder Ofenholz, die dünneren wandern insgesammt als „Stutzen“ in den Ofen; die dünnsten Äste sammt ihrem Nadelwerk werden als Streu für das Vieh benützt. Dem Holze wird große Hitzkraft nachgerühmt, was wohl dem bedeutenden Harzgehalte zuzuschreiben ist. In den Ortschaften Absam, Thaur, Seefeld, Scharnitz, Telfs, dann im Ausfern u. s. w. wird die Zunder in großen Massen von der bäuerlichen Bevölkerung als Brennholz verwendet. Auch das k. k. Ärar ließ in den Vierziger- und Fünfziger-Jahren auf dem Absamer Zunderkopf, sowie am Thurnschlag für die Bedürfnisse des Salzberges Zundern schlagen. Bis vor wenigen Jahren wurden die Kohlen für die Schmiede am Salzberge aus Zundern gewonnen, welche im Lavatschthale geschlagen und gemeilert wurden. Die Kohle ist von ausgezeichneter Qualität, hart, schwer, glänzend, stark hitzend, fast ohne Aschenbestandtheile. Bei der Abforstung der Zunder bleibt nur zu bedauern, dass für Nachwuchs durch Verritzen des Bodens u. s. w. so gut wie nichts geschieht, dass daher die Zunder den Kampf ums Dasein eigentlich von neuem beginnen muss; nur einzelne in Reihen stehende Büsche wurden zur Samenlieferung belassen. Die schlimmen Folgen der Abholzung der Zunderwälder würden sich erst recht geltend machen, wenn die Ausnützung in größerem Maßstabe zunähme.

Der Nutzen, welchen die Zunder im Torfmoore stiftet, besteht wohl hauptsächlich in der Beschattung der übrigen Pflanzen in dem undurchdringlichen Dickicht, wodurch dem Vieh der Eintritt mehr minder verwehrt wird. Die Beiträge der Zunder zur Anhäufung der Torfmassen sind zwar nicht zu unterschätzen, man legt aber denen anderer Pflanzen einen höheren Wert bei. Das Hauptverdienst der Zunder im Moore ist die Begünstigung des Wachsthums der übrigen torferzeugenden Gewächse.

Ein grimmiger und sehr gefährlicher Feind eines Zunderwaldes ist das Feuer, welches oft in ausgedehnten Bränden ungeheuere Verwüstungen anrichtete. Zunderbrände verbreiten sich mit unglaublicher Geschwindigkeit. Besonders im Herbste, wenn das lange Gras zwischen den Büschen (hier „Falsch“ genannt) völlig ausgetrocknet ist, ereignen sich wegen der Holzarbeiten in Zundern am leichtesten Brände, welche sehr namhafte

Ausdehnung gewinnen können. In den Jahren 1865 und 1866, jedesmal im October, wütheten im Gebiete der Gemeinde Absam Brände, welche über drei Wochen anhielten, und es bedurfte der Aufbietung aller Kräfte, um ihrer Herr zu werden. Die buschigen Nadeln und harzreichen Äste verbrennen vollständig; die aufflackernden Feuergarben gewähren zur Nachtzeit einen großartigen, aber schauerlichen Anblick. Die dicken Hauptäste, die sogenannten Seelen, verkohlen nur an der Außenseite; sie liegen an vorbemerkten Stellen jetzt, nach mehr als 25 Jahren, noch auf dem Brandplatze und werden von einer nahegelegenen Alpe als Brennholz verwendet. Der im Herbste ausgetrocknete Untergrund, welcher eigentlich nur aus organischen Stoffen gebildet wird, verbrennt zum größten Theile und wird als Asche vom nächsten Regengusse fortgeschwemmt; ebenso rollen die kleineren und größeren Steine ab, welche weit in die unteren Regionen reichende Muhrgänge verursachen; schließlich steht am Brandplatze überall das nackte Gestein an. An beiden vorhin angeführten Stellen blieben nur sehr wenige Büsche vom Feuer verschont und die Zunder muss die Besetzung des Bodens mit einem neuen Anfluge in den Uranfängen beginnen. Die Ausdehnung der genannten Brände in der Gemeinde Absam wird auf 250 *ha* angegeben.

Für den Wildstand ist die Zunder von großem Vortheil; besonders die Gemsen halten sich gerne in denselben auf, suchen sich Verstecke und äsen auf den freien Plätzen zwischen den einzelnen Büschen; die geringste Bewegung einer Zunder verräth ihnen den Feind und veranlasst sie zur schleunigen Flucht. Für den Menschen ist das Fortkommen in den Zundern mit den größten Schwierigkeiten verbunden; nur abwärts und an steilen Ecken werden sie wegen ihrer Zähigkeit oft unabweisbares Rettungsmittel. Höchst fesselnd sind die Jagd- und Wildererabenteuer aus dem Karwendelgebiete, welche Gerstäcker und Pfretzschner in den lebendigsten Farben schildern.

III.

Der „Stock im Eisen" der Stadt Wien.

Von

Dr. Alfred Burgerstein,
Professor am Communal-Real- und Obergymnasium im II. Bezirke in Wien.

Mit einer Tafel.



Der Stock im Eisen.

Autotypische Reproduction nach einer Photographie aus dem Atelier Wimmer in Wien, IX., Alserstrasse.



Als man in unserer schönen Kaiserstadt im Frühjahre 1891 darangieng, den letzten Rest jener Gruppe alter Häuser[1]) zu entfernen, an deren Stelle der Prachtbau der „Equitable“[2]) entstand, musste auch der jedem Wiener bekannte „Stock im Eisen“ seinen Standplatz verlassen; er wurde nach Wegnahme des eisernen Halbringes und des „höllischen Schlosses“ sorgfältig entfernt und bis zu seiner am 15. Juli des genannten Jahres erfolgten Neuaufstellung in der Baukanzlei des Equitable-Hauses aufbewahrt. Durch diesen letzten Umstand war aber die ebenso bequeme als seltene Gelegenheit geboten, jenem merkwürdigen Wahrzeichen Wiens näherzutreten und es etwas besser kennen zu lernen, als dies bisher der Fall war.

So findet man in der Literatur keine präcisen Angaben über seine Größenverhältnisse und das äußere Aussehen; beispielsweise wusste man nicht einmal, ob dieser „ungehobelte Klotz“ auch an seiner Rückseite benagelt sei, da letztere infolge der Art der früheren Aufstellung weder dem Gesichts- noch dem Tastsinn zugänglich war.

In botanischer Hinsicht war eine genaue anatomische Untersuchung des Holzes sehr wünschenswert. Allerdings kam

---

[1]) Es waren dies die Häuser: Kärntnerstraße Nr. 6; das Baron Schloissnig'sche Haus Kärntnerstraße Nr. 8 (identisch mit Seilergasse Nr. 5); das F. Epstein'sche Haus, Stock im Eisenplatz Nr. 3 (der Standort des Wahrzeichens); das Fr. Mayer'sche Haus Seilergasse Nr. 3 (identisch mit Stock im Eisenplatz Nr. 4) und das Haus Seilergasse Nr. 1 (dessen letzter Rest die „Springer-Ruine“ bildete). Somit Kärntnerstraße 6, 8, Stock im Eisenplatz 3, 4, 5, Seilergasse 1, 3, 5.

[2]) Lebensversicherungs-Gesellschaft der Vereinigten Staaten Amerikas.

Prof. Unger im Jahre 1856 in die Lage, ein ganz kleines, mühsam erbeutetes Splitterchen mikroskopisch zu prüfen. Er gelangte hiebei zu dem Resultate, dass der „Stock im Eisen" „wenngleich mit einigem Zweifel, jedoch immerhin mit großer Wahrscheinlichkeit als der Wurzelrest einer Lärche anzusehen sei". Wenn man bedenkt, dass die Pflanzenanatomie überhaupt, die Histologie des Holzes insbesondere, zu jener Zeit ein noch wenig bekanntes Gebiet der wissenschaftlichen Botanik war, wenn ich ferner bemerke, dass auch gegenwärtig die sichere Diagnose einer Holzart lediglich auf Grund der mikroskopischen Untersuchung in einzelnen Fällen schwierig ist, und dass Unger nur ein winziges Fragment zur Verfügung hatte, so wird man es begreiflich finden, dass es diesem ausgezeichneten Forscher nicht möglich war, zu einem zweifellosen Ergebnis bezüglich der Holzart zu gelangen. — Was endlich die Geschichte des Denkmales betrifft, so finden sich in älteren Büchern allerdings einzelne positive Angaben; über seine eigentliche culturhistorische Bedeutung, den ursprünglichen Standort des Baumes, die Art und Weise der Entstehung des „Stockes", die Zeit seiner Benagelung etc. sind — abgesehen von Märchen — bisher nur Hypothesen aufgestellt worden.

Durch die freundliche Erlaubnis des Erbauers des Equitable-Palastes, des Herrn Architekten und k. k. Baurathes A. Streit, wurde mir die Möglichkeit geboten, in der damaligen Baukanzlei des genannten Hauses Messungen am „Stock im Eisen" vorzunehmen. Zu meiner nicht geringen Freude erhielt ich später auch ein Stückchen Holz behufs mikroskopischer Prüfung, wofür ich dem Herrn Baurath Streit auch hier den verbindlichsten Dank ausspreche.

Der erste Theil der vorliegenden Schrift enthält die Ergebnisse meiner makro- und mikroskopischen Beobachtungen des Stockes. Im zweiten Theile habe ich die in der Literatur zerstreuten historischen und mythischen Daten, soweit mir dies möglich war, zusammengestellt. Da es an einer solchen umfangreichen und übersichtlichen Darstellung bisher fehlte, so dürften die von mir gesammelten Notizen dem Alterthumsforscher nicht unwillkommen sein. Auch sonst wird vielleicht manches ein allgemeineres Interesse haben.

I. Morphologisches.

a) Die äußere Gestalt des Stockes.

Die älteste Beschreibung des „Stock im Eisen“ findet sich, wie ich glaube, bei Jacob Sturm.[1]) Derselbe sagt in seinem 1659 erschienenen „Österreichischen Ehrenkranz“ S. 56: „Der Stokk im Eisen, welcher ein zweiästiger Stamm von einem alten, festen Baum, dass vor Alters lauter Wildnüs der Stadt Wien gewesen, dahin auf einen Stein gesetzt, zu sehen ist und mit einem fast Spannen breitem und zwei Finger dikken Hals-Bande oder Eisen umfasset, daran ein besonder künstlich Schloss hängt, welches kein Mensch auf zu schlüssen vermag...“ Der Standplatz wird „gar nahe bei St. Stephans Freit-Hof, wo man zur Linken nach dem Kärner Tohr[2]) zu gehen wil“ angegeben.

Pezzl[3]) gibt in seiner „Skizze von Wien“ 1789 folgende Beschreibung: „Es ist ein ungefähr 7 Fuss[4]) hoher Baumstamm von mittelmäßiger Dicke, der von oben bis unten so ganz mit eisernen Nägeln überschlagen ist, dass man von dem Holz gar nichts mehr sieht. Ein eisernes Band befestigt ihn an ein Haus auf dem nach ihm genannten Stock im Eisenplatz. An dem Band hängt ein großes Schloss.“

Ausführlichere Mittheilungen über die gestaltlichen Ver-

[1]) Jakob Sturm. Unverwelklicher Oester-Reichischer Ehren-Kranz, gewunden der Röm. Kais. auch zu Hungarn und Böhmen Königl. Majt. Haupt- u. Residentz-Stadt Wien etc. 1659. (Ein Wiederabdruck des sehr seltenen Originals wurde von Dr. Th. von Karajan 1866 veranstaltet.)

[2]) Die Bezeichnungen Kärntnerstraße (und Kärntnerthor) werden gewöhnlich daher abgeleitet, dass diese Straße nach Kärnten führte. Eine andere Erklärung gibt Fischer (Brevis notitia urbis veteris Vindobonae 1764): „Porta haec carinthiaca, rectius granaria vel frumentaria dicitur a frumentis, quae prope eandem et in vice ejusdem nominis, cum olim, tum anno adhuc 1550 vendebantur. Mercatus hic nunc extra eandem portam eo loco, quem vulgo inde Traidmarkt vocant celebratur.“ Von den alten Topographen Wiens schreiben: Hirschvogel (1547) Khernerstr., Wolmuet (1554) Khärnerstr., Suttinger (1684) Kärtnerstr., Aberman (1692) Kärnerstr., Fuhrmann (1765) Cärnerstr. In den von den kaiserlichen Hofquartiermeistern verfassten Straßen u. Häuserconscribierungen von 1563—87 findet man Cärner-, Kärner- und Khärnerstraß· Beheim schreibt in seinem „Buch von den Wienern“ (1462—65) „Kerner tor“

[3]) Pezzl, Skizze von Wien 1789. IV. Aufl. 1803 p. 207.

[4]) 7 Wiener Fuß = 221 *cm*. Pezzl hat das richtige Maß getroffen.

hältnisse des „Stock im Eisen“ hat Prof. **Unger** in zwei Abhandlungen [1]) veröffentlicht. Er gibt an, dass die Höhe des Stockes „mehr als Klafterlänge“ beträgt, dass die Oberfläche mit vielen knorrigen Protuberanzen bedeckt ist, die offenbar Reste von Seitenzweigen sind, ferner dass der Wuchs sehr auffällig und nicht übereinstimmend mit der Tracht einer Lärche ist. Bekanntlich besitzt der Stock in der Mitte eine sehr verdünnte Stelle, so dass er sich augenfällig in einen oberen und unteren Theil gliedert. **Unger** meint, dass hier einst ein Bruch erfolgt sein müsse, und dass es für die Erhaltung des Baumrestes nothwendig war, die beiden Theile künstlich zu verbinden. Thatsächlich sind fünf Eisenschienen vorhanden, die gleich einer Brücke über die stark eingeengte Partie hinübersetzen. „Über die Beschaffenheit des Holzkörpers selbst,“ meint **Unger**, „lässt sich umsoweniger etwas wahrnehmen, als derselbe von allen Seiten dicht mit Nägeln beschlagen ist, die es nicht einmal erlauben, zu erkennen, ob und von welcher Beschaffenheit die Rinde ist, welche den Holzklotz bedeckt. Wenn man auch an dem obersten, linksseitigen Hauptaste deutliche Spuren einer durch Fäulnis herbeigeführten Zerstörung wahrnimmt, so ist es immerhin die Frage, ob dieselbe auch die übrigen Theile des Strunkes ergriffen hat, wogegen sowohl die Festigkeit als der ungetrennte Zusammenhalt der einzelnen Theile zu sprechen scheint“. Über das Aussehen der Rückseite theilt **Unger** nichts mit; diese war eben damals überhaupt nicht sichtbar.

Wie schon erwähnt, gibt **Pezzl** [2]) an, dass im „Stock im Eisen“ so viele Nägel eingeschlagen sind, „dass man von dem Holze gar nichts mehr sieht“. Auch **Ziska** [3]) sagt in seinen Volksmärchen (1822), „dass an dem ganzen Baumstrunke nicht die mindeste Spur von Holz mehr zu entdecken ist“, und **Schimmer** [4]) bemerkt in seiner Häuser-Chronik (1849), dass

---

[1]) a) **Unger**, Der Stock im Eisen der Stadt Wien. Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien. Phil.-hist. Cl. XXIII. Bd. Jahrg. 1857, p. 218. b) **Unger**, Der Stock im Eisen der Stadt Wien und seine Bedeutung. Mitth. d. k. k. Centr.-Commiss. z. Erforschung u. Erhaltung der Baudenkmale. IV. Bd. 1859 p. 190 (abgedruckt auch in der Wiener Zeitung 1859 Nr. 158).

[2]) Siehe oben S. 69 Anmerkung 5.

[3]) **Ziska** Fr., Österreichische Volksmärchen. Wien 1822.

[4]) **Schimmer** K. A., Ausführliche Häuserchronik der inneren Stadt Wien etc. Wien 1849.

der Baumstamm „vollauf bis zum letzten zugänglichen Fleckchen benagelt ist". Im VIII. Bande des Wiener Alterthumvereines hat Camesina[1]) eine Beschreibung des „Stock im Eisen" gegeben. Er stützt sich hiebei auf die (meist unrichtigen) Angaben Ungers und fügt bei, dass die Nägel so dicht aneinandergereiht sind, „dass es unmöglich sei, auch nur auf einem Fleckchen auf das Holz selbst zu sehen und auf diese Weise dessen Beschaffenheit zu erkennen". Auch Bermann[2]) sowie Holczabek und Winter[3]) theilen (1886) ihren Lesern mit, dass man an dem Baumstamm nichts mehr vom Holze sehen kann, und dasselbe sagt Jul. Leisching[4]) noch im Jahre 1892! Es ist merkwürdig, dass keiner der genannten Autoren sich entschlossen hat, den Baumstamm nur einmal genauer anzusehen. Jedermann kann sich leicht davon überzeugen, dass an der Basis (bis etwa zur Höhe der Epheusprosse) noch genug sichtbares nagelfreies Holz ist.

Ich führe nun die eigenen Beobachtungen an. Der „Stock im Eisen" hat im unteren Theile eine nahezu cylindrische Form; der Umfang an der Basis beträgt 86 *cm*. In einer Höhe von etwa einem halben Meter verjüngt er sich kegelförmig und erreicht in einer Höhe von 110 *cm* nur mehr einen Umfang von 27 *cm*. Von dieser engsten Stelle wächst nach oben der Durchmesser rasch und ziemlich gleichförmig und in einem Abstande von 172 *cm* von der Basis erreicht die Peripherie das Maximum von 92 *cm*. Nun tritt eine Bifurcation ein; der (vom Beschauer gesehen) rechte Ast besitzt eine Länge von 47 *cm*; sein Umfang ist unten 50 *cm*, oben 40 *cm*. Die Länge des linken Astes beträgt 48 *cm*, der Umfang 50—52 *cm*. Die Gesammthöhe des Baumrestes beträgt 220 *cm*. Sowohl am eigentlichen Stock wie an den beiden Ästen (Wurzeln) sieht man beulenartige Protuberanzen, ferner Reste von abgebrochenen und von abgesägten Zweigen. An der Rückseite zählte ich 7—8 solcher knorriger Beulen, 6 Stummel von abgebrochenen und 7 Stummel von ab-

---

[1]) Camesina Alb., Wiens Bedrängnis im Jahre 1683. Ber. u. Mitth. des Alterthumvereines Wien. VIII. Bd. 1865 p. LXII.

[2]) Bermann M., Alt- und Neu-Wien. 1880 p. 804.

[3]) Holczabek J. W. und Winter A., Sagen und Geschichten der Stadt Wien. 1. Bändchen, 2. Aufl. Wien 1886.

[4]) Leisching Jul. in Monatsblätter des Wissensch. Club in Wien. XIII. Jahrg. 1892 Nr. 10.

gesägten Ästen. Bei einem der letzteren waren die centralen Jahresringe deutlich erkennbar, die peripheren jedoch durch eine schwarze Schmutzschicht verdeckt. Hie und da bemerkte ich im Holze kleine „Wurmstiche“ und am linken Ast (sonst nirgends) mosaikartige Fragmente der Rinde. Damit ist die Frage Ungers, ob sich am „Stock im Eisen“ noch irgendwie Spuren einer Rindenbekleidung auffinden lassen, beantwortet. Ich möchte hier noch beifügen, dass die Meinung Ungers, dass an der verdünnten Stelle des Stockes einst ein Querbruch erfolgt sein muss, nicht richtig ist. Ich habe bei sehr sorgfältiger Untersuchung keine Spur eines solchen Bruches bemerkt.

Nur die vordere Seite ist benagelt. Die Rückseite hat eine zumeist glatte Oberfläche und an vielen Stellen ein glänzend schwarzes Aussehen, welches von einer aus Staub und Schmutz gebildeten Incrustation herrührt. Das Holz ist, wie ich mich überzeugte, noch recht fest und zeigt im allgemeinen einen guten Erhaltungszustand. Nur an der Basis bis zu einer Höhe von etwa einem Decimeter fand ich, dass die peripheren Holzschichten theilweise schon morsch geworden sind, was bei der früheren ungünstigen Aufstellung des Denkmales begreiflich ist. Ich kann mich deshalb auch der Ansicht von Zappert,[1]) dass man die eiserne Rüstung, die den „Stock im Eisen“ deckt, allmählich durch fortgesetztes Einschlagen von Nägeln verstärkte, um seinen morschen Leib vor gänzlichem Verfall zu schützen, nicht anschließen. Die Nägel, deren Zahl einige Tausend beträgt, sind dicht nebeneinander eingeschlagen mit Ausnahme des basalen Theiles. Von der Standfläche aufwärts bis etwa zur Höhe der jetzigen Epheuguirlanden ist die Benagelung spärlich, so zwar, dass man da genug vom Holze sieht und noch viele Nägel einschlagen könnte.[2]) Betrachtet man die Nagelbekleidung etwas näher, so findet man, dass mit Ausnahme von *a*) etwa 30 Nägeln mit auffallend großen Köpfen und *b*) einer Anzahl schlecht eingeschlagener (verbogener) Exemplare mit kleinen Köpfen die weitaus überwiegende Zahl eine große Uniformität zeigt.

---

[1]) Siehe unten S. 89 Anmerkung 3.

[2]) In neuester Zeit wurde ein rechteckiges, ca. 13 cm^2 großes Messingplättchen eingeschlagen, welches folgende Inschrift hat: J. R. L. | Z. F. 1892. H. B. | SLOS. WIEN. | S. V. | ZUM. ANDENKEN. 15./2. | .

Die oberen und unteren Theile des Baumrestes sind mittelst fünf Eisenbänder überbrückt. Die Maße derselben sind — der Länge nach geordnet —: 29, 30, 33, 45, 47 *cm*. In die obere Schnittfläche des rechten Gabelastes ist eine eiserne Klammer eingeschlagen. Unterhalb der Bänder ist der Stock von einer halbkreisförmig gebogenen eisernen Spange umgeben, die beiderseits in der Wand der aus Granit hergestellten Nische befestigt ist. Im unteren linken Theile dieser Eisenspange ist zwischen den Zahlen 15—75 ein Monogramm: H. B. graviert; auf dem Querstriche des Buchstabens H steht ein Kreuz.

Was das unaufschließbare Schloss betrifft, das im Sagenkreise des „Stock im Eisen" eine so wichtige Rolle spielt, so ergab sich, als dasselbe gelegentlich der Versetzung des Denkmales untersucht wurde, die interessante Thatsache, dass dieses „Schloss" kein Schloss ist, sondern eine (viereckige) eiserne hohle Kapsel ohne eine Feder oder sonst einen verstellbaren Mechanismus.[1]) Dadurch erklärt sich aber sofort der Zauber, nämlich die Unmöglichkeit, dieses „Schloss" mittelst eines Schlüssels zu öffnen.

Das Wahrzeichen ist auf einem anderthalb Meter hohen Granitsockel[2]) in einer gleichfalls aus Granit stilvoll ausgeführten Nische an der Ecke des Equitable-Hauses aufgestellt. Seine jetzige Position ist eine viel günstigere als die frühere. Während es nämlich seinerzeit beinahe auf dem Straßenpflaster stand und in die enge Wandnische des alten Epstein'schen Hauses förmlich eingezwängt war, steht es jetzt viel höher, isolierter, freier. Dadurch sind zwei Vortheile erreicht: erstens ist der Stock von allen Seiten sichtbar und zweitens können die auffallenden Niederschläge infolge der leichteren Luftcirculation besser und rascher verdunsten, was für seinen

---

[1]) Gelegentlich der Neuaufstellung des Wahrzeichens wurde das Innere des „Vorhängeschlosses" mittelst einer Sonde untersucht und hiebei konnten durch das Schlüsselloch allerlei kleine Objecte herausgezogen werden. Unter denselben sah ich: Stücke von Zeitungen (darunter einen Rest von einem „Tagblatt"); ein Fragment eines aus Ungarn stammenden Briefes vom J. 1866; zahlreiche theils angebrannte, theils noch ungebrauchte Zündhölzchen; einen Kreuzer ö. W.; zwei eiserne Schrauben; Stückchen von Leder und Blei, ein kleines Bernstein-Mundstück von einem Cigarrenspitz etc.

[2]) Derselbe wurde auf der dieser Schrift beigegebenen Abbildung wegen Raummangels weggelassen.

weiteren Erhaltungszustand wichtig ist. Um die Basis wurde eine Imitation eines Graswuchses angebracht, aus welchem sich Epheusprosse emporranken, die mit dem Stocke durch eigenartige Nägel verbunden sind. Anderseits steht wieder die aus Schmiedeeisen hergestellte Einfassung mit dem Sockel in fester Verbindung, wodurch die Standfähigkeit des Stockes gesichert ist. Gleichzeitig erinnert jene eiserne Beigabe an den ursprünglichen natürlichen Standort des Baumes[1]) und bildet nebenbei eine Zierde dieses zwar ehrwürdigen, aber keineswegs gerade schönen Denkmales.[2])

b) Untersuchung des Holzes.

Ich habe schon eingangs angeführt, dass Professor Unger in der Lage war, „ein ganz winziges Splitterchen" mikroskopisch zu analysieren. Die Acquisition dieses Fragmentes, welche durch Freundeshand geschah, war einigermaßen schwierig. „Es war in der frühesten Morgenstunde eines nebeligen Decembertages, ungeachtet der vieläugigen Wachsamkeit, die wie ein Cerberus dieses Denkmal in conspectu populi beschützt, nach mehrmaligen, vergeblichen Attentaten gelungen, mittelst eines Messers dasselbe zu erobern." Diesem Berichte fügt Unger bei, dass der Splitter nach der Angabe des Erbeuters von der Spitze des oberen linken Astes stammte. Das Holz war fest, von dunkler Farbe und mit Staub und Schmutz ganz imprägniert. Auf Grund der mikroskopischen Untersuchung stellte sich heraus, dass der Stock keineswegs der Rest einer „alten Wiener Eiche" sei, wofür er der Sage nach gehalten wurde, sondern einem Nadelbaume angehöre. „Mit größter Sicherheit ließ sich erkennen" — sagt Unger in seiner Akademieabhandlung[3]) — „dass der berühmte Holzrest von einem Nadelholze abstamme, welches der Gattung

---

[1]) Diese Einfassung wurde in der Eisenconstructions-Werkstätte von Ludw. Wilhelm in Wien ausgeführt.

[2]) Ich kann daher der Ansicht des anonymen Recensenten im XVII. Jahrg. d. Mittheil. der k. k. Centr.-Com. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und hist. Denkm. Wien 1891 p. 177, dass der metallene Epheu ganz unnöthig, überflüssig und störend ist, nicht beipflichten. Auch die dortige Mittheilung dass an dem Eisenringe keine Veränderung vorgenommen wurde, ist zu modificieren, da infolge des größeren Durchmessers der jetzigen Nische ein ca. 30 *cm* langes Stück Schmiedeeisen eingeschweißt wurde.

[3]) Siehe oben S. 70 Anmerkung 1 *a*).

Pinus im Sinne Linnés angehört. Wenngleich mit einigem Zweifel, jedoch immerhin mit großer Wahrscheinlichkeit dürfte aber die Lärchtanne[1]) (Pinus Larix Lin.) für die Stammart zu erklären sein." Leider hat Unger diese Ansicht in keiner Weise wissenschaftlich begründet.

Obgleich sich der genannte Botaniker sowohl an dieser Stelle als auch in seiner zweiten Abhandlung[2]) über die Holznatur des „Stock im Eisen" mit einiger Reserve ausgesprochen hat, haben spätere Schriftsteller unter Berufung auf den genannten Autor den Baumrest ohneweiters als Lärchtanne, i. e. Lärche declariert.[3])

Die mir zur Verfügung stehende Lamelle hatte eine Fläche von circa 40 cm^2 und eine mittlere Dicke von circa 8 *mm*. Das Holz ist (offenbar infolge Bildung von Huminsubstanzen) von brauner Farbe, fest, gut schneidbar, im Bruche glänzend; eine Differenzierung in Kern und Splint ist nicht vorhanden. Eine fast kreisrund begrenzte Partie von etwa 4 cm^2 zeigte eine vorgeschrittene Vermoderung. Die untere Seite der Lamelle, welche mit dem Steinsockel in Berührung stand, ist stellenweise cavernös und zeigt einen weißlichen Anflug, der aus kohlensauren, zum Theil vielleicht auch harnsauren Salzen besteht.

Nach Glättung der oberen Schnittfläche mittelst eines Scalpelles waren die Grenzen der Jahresringe zwar nicht scharf, aber — wenigstens unter der Lupe — ziemlich gut unterscheidbar. Auf einem Radius von 58 *mm* zählte ich 18 Jahresringe, so dass die Ringbreite durchschnittlich 3·2 *mm* beträgt. Da der Stock an der Basis 860 *mm* Umfang hat, dem ein Halbmesser von 137 *mm* entspricht, so würde sich die Zahl der Jahresringe bei Zugrundelegung des Mittelwertes von 3·2 *mm* auf 43 berechnen. Da nach meiner später zu begründenden Annahme die beiden oberen Gabeläste des „Stock im Eisen"

---

[1]) Der von Unger gebrauchte Name „Lärchtanne" ist nicht zweckmäßig, da ein Nichtbotaniker leicht in Zweifel sein könnte, ob damit eine Lärche oder eine Tanne gemeint sei. Lärchtanne syn. mit Lerchentanne, Lärchenbaum, Leerbaum, Lärche (Pinus Larix L. = Abies Larix Lam. = Larix europaea D. C.).

[2]) Siehe oben S. 70 Anmerkung 1 *b*).

[3]) So Camesina (l. c. pag. 71), K. Weiss unten S. 90, Anm. 1 *b*), Leisching (l. c. pag. 71), Bermann (l. c. pag. 71). Wenedikt (unten S. 92, Anm. 1) gibt an, Unger hätte gefunden, dass der Stock im Eisen aus Fichtenholz besteht.

dem oberen Wurzeltheile, die untere Partie, von der Bifurcation abwärts, aber, wie ich bald zeigen werde, dem unteren Stammtheile angehört, somit die untere, auf dem Sockel stehende Schnittfläche des Baumrestes einer Höhe von circa 1 *m* oberhalb der Stammbasis entspricht, so kann man schließen, dass der „Stock im Eisen" einem etwa fünfzig Jahre alten Baume entspricht.

Die erwähnten 18 Jahresringe hatten in der Reihenfolge vom ältesten zum jüngsten, also in centrifugaler Richtung gemessen, folgende Breiten in Millimeter: I. 4·5, 4, 2, 3, 3, 2·5, 2·5, 4, 2·5, 5, 3·5, 3, 3, 3, 3, 3, 3·5, 3. XVIII. Unter der, wie ich glaube, berechtigten Annahme, dass der „Stock im Eisen" nicht von einem ausländischen, sondern von einem einheimischen, in Wien oder wenigstens in der nächsten Nähe der Stadt gestandenen Baum herrührt, erkannte ich schon bei der ersten mikroskopischen Probe, dass das Holz entweder einer Fichte oder Lärche angehört. Das ist eben leicht zu sagen. Nicht so leicht aber ist es in gewissen Fällen, wenn z. B. das Holzstück nur junge, ich meine früh gebildete Jahresringe enthält, zweifellos festzustellen, welcher von beiden Baumarten es angehört. Man findet in der Literatur allerdings diagnostische Merkmale des Holzes dieser beiden Coniferen angegeben. Allein die bisher veröffentlichten mikroskopischen, beziehungsweise mikrometrischen Bestimmungen beziehen sich zumeist nur auf eine geringe Zahl von Beobachtungen. Mehrere Autoren haben bloß wenige Mittelzahlen veröffentlicht ohne Anführung der gefundenen Grenzwerte und ohne nähere Angabe des untersuchten Materials. Da aber ungleiches Material auch ungleiche Resultate gibt, so erklärt es sich, dass die gefundenen Zahlen mitunter nicht unbedeutend differieren. Manche von den bisher publicierten histologischen Unterschieden sind nicht verlässlich oder falsch oder, wenn richtig, so nicht immer verwendbar, wie z. B. bei solchen archäologischen oder paläontologischen Untersuchungen, bei denen nur spärliches Material zur Disposition steht und die Qualität desselben, ob Wurzel-, Stamm- oder Astholz, ob jüngeren oder älteren Jahresringen angehörend, nicht bekannt ist. Ich habe mich deshalb, um eine sichere Aussage über das Holz des „Stock im Eisen" machen zu können, entschlossen, eingehende vergleichend anatomische Untersuchungen des Fichten- und Lärchenholzes auszuführen. Dieselben sind nahezu abgeschlossen und werden demnächst veröffentlicht werden.

Ich führe zunächst die Ergebnisse der mikroskopischen Messungen und Zählungen an, die ich an der in meinem Besitze befindlichen Lamelle des „Stock im Eisen" vorgenommen habe. Die Bestimmungen wurden am (relativ) V., X. und XV. Jahrring gemacht. Die in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellten Zahlen bedeuten: *a*: Lumen der Frühtracheiden[1]) (Frühlingsholzzellen) am Radialschnitt [Mittel aus je 200 Messungen]; *b*: beobachteter Maximalwert des Lumens; *c*: radiale Breite (Lumen und Wand) der Spättracheiden (Herbstholzzellen) [Mittel aus je 200 Messungen]; *d*: Querdurchmesser des äußeren Tüpfelhofes der an der Radialwand der Frühlingsholzzellen ausgebildeten Hoftüpfel [Mittel aus je 100 Bestimmungen]; *e*: Höhe der inneren (leitenden) Markstrahlzellen [Mittel aus je 400 Messungen]; *f*: Zahl der Markstrahlzellen pro Quadratmillimeter der Tangentialfläche [berechnet aus je 50 Gesichtsfeldern des Mikroskopes]; *g*: mittlere Höhe (Zellenzahl) eines Markstrahles [berechnet auf Grund directer Zählung von je 200 Markstrahlen].

Die sub *a*—*e* angeführten Zahlen bedeuten Mikromillimeter (1 Mikrom. = μ = 0·001 *mm*).

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
V.	31·5	44	18·6	18·6	18·6	295	8·3
X.	31·0	42	18·3	18·9	19·2	340	9·4
XV.	32·1	49	20·1	20·2	19·4	310	10·1
Mittel	31·5	45	19·0	19·2	19·1	315	9·3

Da nach Mittheilung des Herrn Baurathes Streit die mir zur Untersuchung überlassene Lamelle weder der centralen noch der peripheren, sondern der mittleren Partie, der (zum Theil morschen) Basis des Denkmales entnommen wurde und der betreffende ganze Querschnitt circa 43 Jahresringe umfasst, so dürften die auf der Lamelle sichtbaren Zuwachszonen etwa dem factischen 10. bis 30. Jahresring des Baumes entsprechen. Ich habe deshalb aus meinen vergleichenden Untersuchungen des Fichten- und Lärchenholzes jene Zahlenreihen excerpiert und zum Vergleiche herangezogen, die sich auf den 10.—30. Jahresring des Stammholzes beziehen. In der folgenden Tabelle

---

[1]) Für die bisher gebräuchlichen Bezeichnungen: Frühlingsholz und Herbstholz schlage ich die Ausdrücke Frühholz und Spätholz vor und werde diese Nomenclatur in meiner oben erwähnten phytotomischen Arbeit begründen.

stelle ich die Grenzwerte zusammen, innerhalb welcher sich die aus dem 10. + 20. + 30. Jahresring berechneten Mittel bewegten. Zum Vergleiche reproduciere ich die Maße der Holzelemente des „Stock im Eisen".

	Fichte	St. im E.	Lärche
Lum. der Frühlingsholzzellen ..	21·6—37·5	31·5	39·8—51·2
Maximum	33-58	45	55—68
Breite der Herbstholzzellen	16·7—22·7	19·0	22·1—27·0
Durchmesser des Tüpfelhofes...	17·1—22·0	19·2	23·1—25·1
Höhe der Markstrahlzellen	17·8—20·2	19·1	20·8—22·1
Markstrahlzellen pro Quadratmillimeter	240—312	315	248—318
Mittlere Markstrahlhöhe	6·0—10·7	9·3	11·0—12·3

Vergleicht man die hier zusammengestellten Zahlen, so wird man die fragliche Lamelle des „Stock im Eisen" ohneweiters als Fichtenholz erklären.

Ich will die Zahlen der Tabelle noch ein wenig analysieren. Ad *a*. Das radiale Lumen der Frühlingsholzzellen (oder Frühtracheiden, wie ich diese Zellen nenne) innerhalb des 10.—30. Jahresringes schwankt nach meinen Beobachtungen bei der Fichte zwischen 21·6 und 37·5 μ, bei der Lärche von 39·8—51·2 μ. Die Lamelle des „Stock im Eisen" besitzt relativ englumige Tracheiden: sie schwanken zwischen 31—32 μ. Mohl[1]) fand auf Grund weniger Beobachtungen, die er an je einer Fichte und Lärche machte, den mittleren radialen Durchmesser (Lumen + Wand) der Frühlingsholzzellen des Stammes bei der Fichte gleich 40·7 μ, das mittlere radiale Lumen bei der Lärche gleich 53 μ. Für das Zellenlumen des Fichtenholzes würde sich ein Wert von 34—35 μ berechnen. Wiesner[2]) gibt (ohne nähere Mittheilung über das Untersuchungsmaterial) die „mittlere Breite der weitesten Holzzellen" bei der Fichte mit 0·036 *mm*, bei der europäischen Lärche mit 0·056 *mm* an. Endlich berechnete Kraus[3]) die mittlere Breite der Frühtracheiden im 50. Jahresring eines Lärchenstammholzes 0·047 *mm*. Diese Zahlen stimmen,

---

[1]) Mohl H. v., Einige anatomische Bemerkungen über das Holz der Baumwurzeln. Bot. Zeitung, 20. Jahrg. 1862.

[2]) Wiesner J., Untersuchungen einiger Treibhölzer aus dem nördlichen Eismeer. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien. 65. Bd. 1872.

[3]) Kraus G., Beiträge z. Kenntnis fossiler Hölzer. Abh. Naturf. Gesellsch. zu Halle. 16. Bd. 1886.

soweit dies bei der Verschiedenheit des Untersuchungsmaterials möglich ist, sowohl untereinander wie auch mit den von mir gefundenen überein. — Die Größe des tangentialen Durchmessers der Frühlingsholzzellen gibt H. v. Mohl[1]) bei der Fichte mit 25·8 μ, bei der Lärche mit 37·2 μ an. Ich selbst habe in dieser Richtung keine vergleichenden Beobachtungen gemacht; bei der Lamelle des „Stock im Eisen" fand ich den Wert von 24·5 μ. — Ad *b*. Die von mir constatierten Maxima des radialen Lumens waren: Fichte: 33—58 μ, „Stock im Eisen": 42—49 μ, Lärche: 55—68 μ. — Ad *c*. Die radiale Breite der Herbstholzzellen (Spättracheiden) schwankt nach meinen Messungen bei der Fichte zwischen 16·7—22·7 μ, bei der Lärche zwischen 22·1—27·0 μ, beim „Stock im Eisen" zwischen 18·3—21·1 μ (Mittelwerte aus dem 10., 20. und 30. Ring). Mohl fand den radialen Durchmesser dieser Zellen im Stammholz einer Fichte 14 μ, im Stammholz einer Lärche 21 μ, Kraus[2]) im 50. Ring einer Lärche 35 μ. Nach den Beobachtungen von Schulze[3]) betrug die mittlere Breite der Spättracheiden im 10.—30. Ring einer Lärche an der Stammbasis 28 μ; in verschiedenen Höhen des Stammes schwankte der Wert zwischen 30—32 μ. Die Verschiedenheit der von den einzelnen Beobachtern erhaltenen Zahlen erklärt sich theils aus der qualitativen und quantitativen Verschiedenheit des untersuchten Materials, theils daraus, dass die Holzzellen mit dem Vorrücken der Vegetationsperiode immer englumiger und dickwandiger werden und die Grenze zwischen den Früh- und Spättracheiden meist nicht angegeben werden kann. Misst man nun bloß die letztgebildeten Holzzellen der einzelnen Jahresringe, so wird man kleinere Zahlen erhalten, als wenn man eine längere Reihe von Herbstholzzellen in Betracht zieht und dadurch schon zum Theil in die breiteren Sommerholzzellen kommt. — Ad *d*. Der Querdurchmesser des äußeren Tüpfelhofes an der Radialwand der Frühlingsholzzellen variierte nach zahlreichen von mir gemachten Bestimmungen bei der Fichte von 17·1 bis 22·0 μ, bei der Lärche von 23·1—25·1 μ. Der „Stock im Eisen" zeigte im Mittel 19·2 μ, welche Zahl innerhalb der Grenzen der

[1]) Siehe oben S. 78 Anmerkung 1.

[2]) Siehe oben S. 78 Anmerkung 3.

[3]) Schulze E., Über die Größenverhältnisse der Holzzellen bei Laub- und Nadelhölzern. Inaug.-Diss. Halle a. d. S. 1882.

Fichte liegt. Ein wichtiges diagnostisches Merkmal, welches schon Mohl[1]) und Wiesner[2]) hervorgehoben, von den späteren Autoren aber zu wenig berücksichtigt wurde, ist das Vorkommen von doppelreihigen Tüpfeln (Zwillingstüpfeln) an den radialen Wänden der Frühtracheiden im Stammholz der Lärche. Allerdings kommen nach meinen Beobachtungen diese Zwillingstüpfel in den ersten Jahresringen des Lärchenstammes gar nicht oder sehr selten vor. Aber schon im 15.—20. Jahresring findet man sie stets und in älteren Ringen sind sie sehr häufig, ja massenhaft. Im Stammholz der Fichte kommen Doppeltüpfel in der Regel entweder gar nicht oder nur sporadisch vor; ausnahmsweise erscheinen sie in den peripheren Jahresringen älterer Fichtenstämme häufiger, niemals aber in solchen geschlossenen (8—10) Reihen, wie in den mittleren und äußeren Jahresringen älterer Lärchenstämme. Unter den von mir untersuchten 36 Hölzern wurden bei 10 Fichten- und 8 Lärchenstammhölzern die histologischen Verhältnisse im 10., 20. und 30. Ring berücksichtigt.

Von den zehn Fichten zeigte im 10. Jahresring keine einzige Doppeltüpfel; im 20. und 30. Ring sah ich nur bei drei Fichten Zwillingstüpfel; diese traten jedoch ganz vereinzelt, niemals mehrfach übereinander liegend auf. Ganz anders war der Befund bei den acht Lärchenstämmen. Hier traten Zwillingstüpfel auf: Im 10. Ring bei einem Exemplar nicht, bei zweien selten, bei fünf Stämmen ziemlich häufig; im 20. Ring bei einem Exemplar selten, bei vier ziemlich häufig, bei dreien häufig (bis zu sechs Reihen übereinander). Im 30. Ring waren Zwillingstüpfel stets häufig zu finden, bei fünf von den darauf untersuchten Lärchen waren sie geradezu typisch. Was nun die Lamelle des „Stock im Eisen“ betrifft, so habe ich an den Tausenden von Holzzellen, die ich aus verschiedenen Partien des Holzes zu sehen Gelegenheit hatte, nur ein einzigesmal — einem weißen Raben vergleichbar — einen Doppeltüpfel gefunden. Es zeigt somit die Lamelle auch bezüglich der Tüpfelbildung den Charakter des Stammholzes der Fichte.

Ad *e*. Die Markstrahlen der Lärche und Fichte bestehen (zum Unterschiede der im anatomischen Bau des Holzes ähn-

[1]) Siehe oben S. 78 Anmerkung 1.
[2]) Siehe oben S. 78 Anmerkung 2.

lichen Tanne) aus zweierlei Elementen: aus 1—4 Reihen „äußerer" Markstrahlzellen (Quertracheiden) und aus 1 bis ca. 40 Reihen innerer (leitender) Markstrahlzellen. Was die „Höhe" der letzteren betrifft, so schwanken die Mittel aus dem 10., 20., 30. Jahresring bei der Fichte zwischen 17·8 und 20·2 μ, bei der Lärche von 20·8—22·1 μ, beim Holz vom „Stock im Eisen" betrug die Höhe der leitenden Markstrahlzellen 18·6—19·4 μ, im Mittel 19·1 μ. Es zeigt sich somit der Charakter der Fichte. — Ad *f*. Als ein — nach meinen Erfahrungen jedoch nicht besonders gutes — diagnostisches Merkmal wird auch die Zahl der Markstrahlzellen auf einer bestimmten Fläche des tangentialen Längsschnittes betrachtet.

Ich fand auf einer Fläche von 1 mm^2 Markstrahlzellen

	Fichte	Lärche
überhaupt	200—345	220—350
10.—30. Ring	240—310	250—320

Die mittlere Zellenzahl der Lamelle des „Stock im Eisen" beträgt 315. Diese Zahl fällt bezüglich des 10.—30. Jahresringes allerdings innerhalb der Grenzen der Lärche, allein bezüglich der Zellenzahl überhaupt auch innerhalb der Grenzen der Fichte. Ich führe noch die Beobachtungen von Essner[1]) an. Derselbe berechnete:

	Fichte	Lärche
Zellenzahl überhaupt	290—325	250—380
Mittel aus dem 1.—50. Ring	310	350
„ „ „ 10. u. 20. Ring	318	375

Wie man sieht, stimmt die von Essner für den 10. und 20. Jahresring der Fichte gefundene Zahl (318) mit der an der Holzprobe des „Stock im Eisen" von mir ermittelten Zahl (315) gut überein.

Ad *g*. Endlich habe ich noch die „mittlere Markstrahlhöhe" berechnet. Es wurde die Zellenzahl von je 60—70 Markstrahlen (im Tangentialschnitt) bestimmt und hierauf durch Division der Summe aller Zellen durch die Summe der in Zählung genommenen Markstrahlen die mittlere Markstrahlhöhe berechnet. Die Mittelwerte für die den 10.—30. Jahresring umfassenden Holzschichten schwankten bei der Fichte zwischen 6—10·7 Zellen,

---

[1]) Essner B., Über den diagnostischen Wert der Anzahl und Höhe der Markstrahlen bei den Coniferen. Abh. naturf. Gesellsch. Halle. 16. Bd. 1886.

bei der Lärche zwischen 11—12·3 Zellen. Für den „Stock im Eisen“ ergab sich als Mittel 9·3 und als Maximum 10·1.[1])

Ich habe indes den anatomischen Befund an der Lamelle des „Stock im Eisen“ nicht nur mit dem anatomischen Bau des Stammholzes, sondern auch mit jenem des Wurzelholzes der Fichte und Lärche verglichen. Dabei ergab sich auf das bestimmteste, dass von einem „Wurzelstock einer Lärchtanne“ keine Rede sein kann. Aber auch gegenüber der Fichtenwurzel zeigten sich mehrfache histologische Unterschiede, namentlich in den Markstrahlen. Wer ferner Gelegenheit hatte, eine größere Anzahl von guten Stamm- und Wurzelquerschnitten der beiden genannten Nadelbäume mit freiem Auge oder unter der Lupe zu sehen, der wird bald und leicht erkennen, dass die fragliche Holzprobe keinesfalls einer Wurzel entnommen wurde.

Wenn ich nun alle die mitgetheilten Ergebnisse zu einem Gesammtresultate zusammenfasse, so lautet dieses dahin, dass der „Stock im Eisen“ der Rest eines Fichtenbaumes ist.

Die Gründe, welche Unger bewogen haben mögen, den Stock mit vieler Wahrscheinlichkeit für eine Lärche zu erklären, dürften folgende gewesen sein. Der Splitter, welchen der genannte Forscher untersuchte, stammte vom oberen Ende des linken Astes. Nun sind zweifelsohne die beiden Gabeläste des (auf den Kopf gestellten) Stockes Wurzeln. Im Wurzelholz mancher Fichten kommen aber Zwillingstüpfel an den Radialwänden der Frühlingsholzzellen so häufig vor wie im Wurzel- und Stammholz der Lärche. Nehmen wir nun an, dass diese (meines Wissens zuerst von Mohl 1862 veröffentlichte) Thatsache Unger unbekannt war, und jener Wurzelsplitter thatsächlich zweireihig getüpfelte Holzzellen zeigte, so ist damit eine wenigstens theilweise Erklärung des Unger'schen Gutachtens gegeben. Es wird ferner in der Literatur angegeben,

[1]) Betreffs der Diagnostik des Fichten- und Lärchenholzes vgl. außer den genannten Arbeiten noch: Fischer H., Ein Beitrag zur vergleichenden Anatomie des Markstrahlgewebes etc. bei Pinus Abies L. Flora, N. F. 43. Jahrg. Regensburg 1885; Kleeberg A., Die Markstrahlen der Coniferen. Bot. Zeitung. 43. Jahrg. 1885; Schneider J., Untersuchungen einiger Treibhölzer von der Insel Jan Mayen. Die internationale Polarforschung 1882—83. III. Bd. Wien 1886; Wille, Zur Diagnostik des Coniferenholzes. Sitz. d. Naturforsch. Gesellsch. Halle 1887. (Die Angaben von Schneider sind nicht verlässlich.)

dass im Lärchenholz (in der Tangentialansicht) neben einreihigen Markstrahlen auch zweireihige vorkommen. Allerdings ist es richtig, dass man im Lärchenholz partiell zweireihige Markstrahlen findet, d. h. solche, bei denen zwischen den übereinander liegenden Einzelzellen eine oder mehrere Reihen von Doppelzellen auftreten. Partiell zweireihige Markstrahlen kommen auch im Holze des „Stock im Eisen" vor. Allein man kann sich leicht davon überzeugen, dass derartige Markstrahlen auch im Stamm- und Wurzelholz der Fichte auftreten. Und wenn auch diese Erscheinung bei der Lärche im allgemeinen besser und häufiger entwickelt ist, als bei der Fichte, so gibt es doch wieder nach meinen Beobachtungen Lärchen, bei denen zweireihige Markstrahlen sehr selten sind, seltener als bei manchen Fichten. Ich füge noch die Thatsache bei, dass bei einer der von mir untersuchten Fichtenwurzeln zweireihige (und dreireihige) Markstrahlen in den peripheren Jahresringen in so großer Menge vorkamen, wie ich sie bei keinem Lärchenholz bisher angetroffen habe. Endlich will ich noch darauf aufmerksam machen, dass die (tangentiale) Höhe der Markstrahlzellen im Wurzelholz der Fichte oft größer ist als im Stamme dieser Baumart, und dass, wie früher gezeigt wurde, auch im Stammholz der Lärche die Markstrahlzellhöhe größer ist als im Stammholz der Fichte.

Unger hält den Baumrest für eine Wurzel. Die Gründe, die er anführt, sind folgende: „Sowohl die eigenthümliche Gestalt als die feste Beschaffenheit des räthselhaften Stockes, ferner der Umstand seiner bedeutenden Verschmälerung in der Mitte, die Aufstellung desselben auf einer postamentartigen Unterlage und noch mehrere andere Umstände (welche?) bestärken mich in der Ansicht, im „Stock im Eisen" keineswegs den Stammtheil eines Baumes, sondern die Wurzel desselben, natürlich umgekehrt aufgestellt, zu vermuthen." Es ist nun klar, dass weder die feste Beschaffenheit des Holzes, noch die bedeutende Verschmälerung, noch die Aufstellung auf einem Sockel ein Grund sein können, den Stock für eine Wurzel zu erklären. Wohl aber kann man aus der „eigenthümlichen Gestalt" einen Schluss ziehen, aber nicht den, dass der ganze Stock eine Wurzel ist. Ich mache da erstens auf die Bifurcation und zweitens auf die Verdickung unterhalb derselben aufmerksam. Wenn man eine größere Anzahl verschiedener Nadel-

bäume etwas genauer ansieht, so wird man eine Zweitheilung des Stammes ausnahmsweise bei einer Föhre, niemals aber bei einer Fichte oder Lärche bemerken. Ferner kann man bei Lärchen und besonders bei Fichten wahrnehmen, dass sich der Stamm an der Basis verbreitert (verdickt) und dann in zwei oder — bei älteren Bäumen — in mehrere Hauptwurzeln theilt. Es deutet somit die obere Verdickung mit der sich anschließenden Gabelung des „Stock im Eisen“ auf eine Wurzelpartie. Der unter der Verdickung liegende, fast cylindrische Theil des eisernen Denkmales ist aber keine Wurzel, sondern auf Grund des anatomischen Befundes ein Stammgebilde. Demnach ist die von Unger ausgesprochene Ansicht, dass der „Stock im Eisen“ höchst wahrscheinlich die Wurzel einer Lärche sei, nicht richtig. Ich muss vielmehr Folgendes aussagen: Der „Stock im Eisen“ ist eine Fichte; der gerade aufsteigende Theil ist die untere Partie des Stammes und die Stelle des größten Umfanges entspricht der Stammbasis. Die beiden Äste sind Wurzeln. Die unter der Stammbasis stark verdünnte Stelle mag vielleicht in der Weise zu erklären sein, dass man den bereits abgestorbenen Baum zunächst fällen wollte und zu diesem Zwecke das periphere Holz oberhalb der Stammbasis mit der Axt weghackte. Dann entschloss man sich, den Baum mit den Wurzeln auszugraben. Das geschah. Alle Seitenzweige wurden entfernt (theils abgebrochen, theils abgesägt) und der Stamm und die beiden stärksten Wurzeln soweit zugestutzt, wie wir es heute noch sehen.

Wie steht es endlich mit der geographischen Verbreitung der Lärche und Fichte? Letztere kommt von der Ebene bis ins Hochgebirge vor und ist der hauptsächlichste Baum der niederösterreichischen Coniferen-Flora. Die Lärche findet sich wildwachsend auf den Voralpen und in der Bergregion des Kalk- und Schiefergebirges und ist somit ein Baum der Berge.[1]) Unger stellt nun die Hypothese auf, dass einzelne Lärchenbäume dem Wienflüsschen folgend, bis in die Nähe Wiens gelangten, und dass einer dieser Vorposten auf dem Platze stehen konnte, den jetzt das nagelreiche Wahrzeichen einnimmt.

---

[1]) Aus diesem Grunde ist es naturgemäßer, den Namen „Lerchenfeld“ von den Feldlerchen und nicht von den Lärchenbäumen abzuleiten.

Unger citiert ferner Clusius (Charles de L'écluse), den besten Kenner der Flora Niederösterreichs im 16. Jahrhundert, welcher angibt, dass die in den Weingärten der Umgebung von Wien zur Befestigung der Reben gebräuchlichen Stäbe und Pfähle aus Fichtenholz, jene in der Umgebung von (Wiener-)Neustadt und Baden aus Lärchenholz verfertigt werden.[1]) Dieses Citat spricht jedoch in Betreff des Wahrzeichens offenbar mehr zu Gunsten der Fichte als der Lärche.

II. Historisches.

Über den Ursprung und die culturgeschichtliche Bedeutung sowie über die Zeit und den Zweck der Umfassung, Exhumierung und Benagelung des Stockes ist gegenwärtig nichts Sicheres bekannt. Auch mir ist es, trotz Durchsicht einer ziemlichen Anzahl von Büchern, welche die ältere Geschichte Wiens behandeln, nicht geglückt, eine positive und zugleich urkundlich beglaubigte Angabe über die Genesis dieses sagenreichen Wahrzeichens Vindobonas zu finden.

Die erste bisher bekannte Erwähnung des Baumrestes kommt in der Wiener städtischen Oberkammeramtsrechnung vom Jahre 1533 vor, wo es pag. 85 heißt: „Der Stat Phlasster von Adam Eisners hauss bis zum prun, do der stokh in eisn ligt, zwanzig claffter". Ein zweites Citat aus der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts findet sich bei dem Wiener Arzte und Geschichtsschreiber Wolfgang Lazius.[2]) Derselbe zählt in seinen „Rerum Viennensium commentarii" (1545) eine Reihe von Wiener Häusern auf, die damals eine besondere Bezeichnung führten. Unter diesen wird auch ein Haus angeführt „ubi truncus ferro uisitur conclusus". Dieses Haus bildete zu jener Zeit die

---

[1]) „Vinetorum pedamenta et pali Viennensi agro ex abiete fiunt atque etiam ex Pinastro, circa Neapolim vero et supra Badenses thermas ex larice." (Clusius Rariorum aliquot stirpium per Pannoniam, Austriam et vicinas quasdam provincias observatarum historia etc. Antwerpen 1583) p. 25; ferner in Rariorum plantarum historia 1601 p. 35.

[2]) Vienna austriae. Rerum Viennensium commentarij quatuor libros distincti etc. Wolfgango Lazio, Viennensi medico 1546. Lib. III p. 131. Eine deutsche Übersetzung unter dem Titel: Historische Beschreibung der Weit berümbten Kayserlichen Hauptstatt Wienn verfasste Heinrich Aberman (Rector der Bürgerschule zu St. Stephan) 1619.

Ecke der Kärntnerstraße und des heutigen Stock-im-Eisen-platzes. Letzterer führte damals die Bezeichnung „am alten Rossmarck“.[1])

Merian[2] spricht in seiner „Topographia provinciarum austriae“ 1649, p. 49 von den verschiedenen Plätzen der damaligen Wienerstadt, „zu welchen Plätzen man auch den Ort zum Stock im Eisen zehlet, an welchem Stock ein Schloss ist, von dem man fürgibt, dass es von einem zauberischen Schlosserbuben gemacht worden seye und dass niemands solches aufthun könne“. Weiters erfahren wir aus einer Beschreibung Wiens von Jakob Sturm 1659, dass „der Stokk im Eisen ein zweiästiger Stamm von einem alten festen Baum auf einem Stein gesetzt zu sehen ist“.

Nicht unwichtig ist die Thatsache, dass die älteren Wiener Historiographen, wie Sturm (1659), Bormastino[3] (1715), Küchelbecker[4]) (1730), zwar das eiserne Band und das daran befindliche Schloss angeben, von einer Benagelung aber nichts erwähnen. Auch die Bemerkungen von Laz (1545) „truncus ferro conclusus“ und von J. Reiffenstuel[5]) (1703) „truncus arboreus, ferro circumdatus“ beziehen sich wohl nur auf den den Baumstrunk umschließenden Eisenreifen, und nicht auch auf eine Nägelbekleidung. Erst Pezzl[6]) gibt in seiner Skizze von Wien 1789 an, dass der Stock von oben bis unten ganz mit eisernen Nägeln überschlagen ist. Ich füge noch bei, dass sich im historischen Museum der Stadt Wien

[1]) Der Pferdemarkt befand sich am Anfange des 14. Jahrhunderts bereits vor dem Kärntnerthor und reichte bis etwa zum Lobkowitzplatz, auf dem der Schweinemarkt war. Der heutige Stock im Eisenplatz hieß schon 1327 der alte Rossmarkt. Vgl. z. B. Aberman (l. c. pag. 85): „auff dem Rossmarckt, deren zween seyndt: auff den Alten verkhaufft man die Höltzine Geschier, auff dem anderen hat man die Ross fayl“.

[2]) Merian Matthäus, Topographia provinciarum austriae etc. Frankfurt 1649.

[3]) Bormastino Antonio, Historische Erzehlung von der Kayserlichen Residentz Stadt Wienn und Ihren Vor-Städten. Wien 1715.

[4]) Küchelbecker Joh. Bas., Allerneueste Nachricht vom Römisch-Kayserl. Hofe nebst einer ausführlichen Beschreibung der Stadt Wien. Hannover 1730.

[5]) Reiffenstuel Ignatius, Vienna gloriosa id est peraccurata et ordinata descriptio caesareae nec non archiducalis residentiae Viennae. Viennae Austr. 1703.

[6]) Siehe oben S. 69 Anmerkung 3.

ein Messing-Jeton befindet, auf welchem zwischen den Zahlen 15—49 der Stock im Eisen ausgeprägt ist, auf dem jedoch von einem Schloss oder Nagel keine Spur zu sehen ist.[1])

Im 17. (und 18.) Jahrhundert wird der „Stock im Eisen“ öfters genannt und zwar bei Gelegenheit der Aufstellung von Triumphpforten anlässlich eines Krönungseinzuges oder eines anderen bedeutsamen Ereignisses in der österreichischen Regentenfamilie. Ich will hier einige einschlägige Daten zusammenstellen.

In einer gereimten Beschreibung[2]) des feierlichen Einzuges des Königs Matthias in Wien am 14. Juli 1608 heißt es:

„Als nun höchst gedacht K. W.[3])
Im reiten weiter procediert,
Ein Ehrenporten traff mehr an,
Beim Stock am Eysen mitt am Blan,
Welch künstlich war und schön getziert
Mit viell hüpschen Sachen formiert.“

Am 4. Januar 1637 war in Wien anlässlich der (zu Regensburg) stattgefundenen Krönung Ferdinands III. zum römischen König eine allgemeine Illumination der Stadt. Es wurden „zu nachtszeit am hohen, Neuen vnd Kollmarkht, Herrngassen vnd Wahlstrassen,[4]) sowoll am Graben, beym Stokh im Eisen vnd Lükekh,[5]) weillen in der Stat, an allen Fenstern Freudenfeuer gehalten“.[6]) Auch beim Krönungseinzuge Kaiser Leopold I. von Frankfurt, 1658, wurde eine Ehrenpforte am Stock-im-Eisenplatz errichtet.

---

[1]) Dieser sehr seltene Jeton zeigt zwischen den Zahlen 15—49 einen Baumstrunk, darüber zwei ineinander geschobene V; auf einer rechtsseitigen Impression ist dasselbe Zeichen, auf einer linksseitigen die Zahl 1558. Der Durchmesser der Wurfmünze beträgt 29 *mm*.

[2]) Ber. u. Mittheil. des Altherthumvereines zu Wien. 9. Bd. Jahrg. 1865 p. 123. Das Gedicht wurde verfasst „durch Johannem Holzmüllerum, der freyen Künsten Studiosum vnd Poeten“ anno 1608. Eine andere Schilderung in Prosa entstammt den Aufzeichnungen des Hieronymus Ortelius (Nürnberg 1618). Camesina hat die den Originalquellen entnommenen Texte publiciert (l. c., Wiener Altorth.-Verein, 9. Bd. 1865).

[3]) Königliche Würden.

[4]) Wallnerstraße.

[5]) Lugeck.

[6]) Schlager R., Wiener Skizzen aus dem Mittelalter. N. F. 2. Bd. 1842.

Im Jahre 1689 findet sich in der Wiener Stadtrechnung eine Post: Ehrenporte am Stokh im Eisenplatz .... facit 263 fl. Im folgenden Jahre, 1690, wurde an derselben Stelle eine Ehrenpforte zur Freudenfeier der Erwählung Josef I. zum römischen König errichtet. In der diesbezüglichen Verrechnung der Gemeinde Wien heißt es:[1]) „Einzug des neu gekrönten König Josephi; Ehrenporten am Stokh am Eisen, den Herrn des Inneren Raths, welliche theils mit Tragung des Himmels, thails neben der Senfftn Ihrer Mayestet der Kayserin in gleicher adeliger Kleidung haben auffwarten muessen zur Austaffirung 700 fl.“

Im Jahre 1699 wurde eine Triumphpforte beim Stock im Eisen anlässlich des Einzuges der Prinzessin Wilhelmine von Braunschweig, Braut Josef I., aufgestellt, welche mit Rücksicht auf das bedeutende Gelderfordernis großartig gewesen sein muss. Man findet darüber mehrere Berichte, darunter den folgenden: „Der am 24. Februar beschehene Einzug, welchen Ihro Römische auch zu Hungarn königliche Mayestet Joseph I. mit dero königlichen Gespons Wilhelmina Amalia Herzoglichen Princessin zu Braunschweig Lüneburg, macht wegen der beym Stockh am Eisen aufgerichten Ehrenporten nicht weniger wegen der Weinrinnen vnd desshalben aufgerichteten Berg.. 13982 fl.“

Über die Genesis des „Stock im Eisen“ sind verschiedene Hypothesen aufgestellt worden.

Antonio Bormastino[2]) gibt (1715) an, dass während der Raubzüge der Hunnen, Avaren und Magyaren von der Mitte des sechsten Jahrhunderts bis zur Zeit der ersten Babenberger die Umgebung Wiens zu einem „öden Wald“ wurde, in welchem hie und da eine Jägerhütte stand. Erst unter dem Markgrafen Leopold dem Heiligen begann man diesen Wald auszuroden und Häuser zu bauen. „Diesem Beyspiel folgeten hernacher andere vornehmere Personen. Jedoch liessen sie einen von den grösten Bäumen zu nachkünfftiger Gedächtnuss und einem Warzeichen stehen, welches man annoch an einem gantz verdürreten Stammen, der sambt der Wurtzel stehen blieben, bis dato

---

[1]) Siehe oben S. 87 Anmerkung 6.

[2]) Siehe oben S. 86 Anmerkung 3.

siehet. Er ist mit einem eysenen in die Mauer fest eingeschlagenen Ring umfangen.“[1])

Eine eigenthümliche Erklärung gibt Realis.[2]) Ich muss da Folgendes vorausschicken: Im Jahre 1511 erfolgte die neue Aufbauung des mit der Zeit hart mitgenommenen Rothen Thurmes. Mitten unter dessen Bogen hing eine wirkliche, später eine aus Holz gebildete Speckseite, neben welcher folgende Verse an der Wand geschrieben standen:

„Welcher kommt durch diese Porten,
Dem rath ich mit getreuen Worten,
Dass er halt Fried in dieser Stadt
Oder er macht ihm selbst Unrath:
Dass ihn zween Knechte zum Richter weisen,
Und schlagen ihn in Stock und Eisen.“

Nach der Ansicht von Realis war der „uralte“ Baumstamm der Pfahl, an welchem die Stänker und Störer des Stadtfriedens ausgestellt und nach dem Wortlaute des Strafcodex in Stock und Eisen gelegt wurden. „Diesen Pfahl mögen die zahlreich nach Wien wandernden Schlossergesellen durch die nach und nach aufkeimende Volkssage eines kunstvollen, unter Mitwirkung der höllischen Macht zustande gekommenen Schlosses zum Denkmale ihres Besuches mit Nägeln beschlagen haben.“

Zappert[3]) fand in einem Quart-Sammelbande, gebildet aus vier dem XV. Jahrhundert angehörenden Handschriften, ein zum Vorblatt verwendetes Pergament, auf welchem ein Plan von Wien gezeichnet war, der, wenn er echt ist, als der älteste bekannte Situationsplan unserer City bezeichnet werden muss. Er trägt die Überschrift: „Delineatio brevis hortorum, vinearum domorum ac arearum unde habemus reditus“ und ist nach

---

[1]) Im wesentlichen dasselbe sagt schon einige Jahre früher Reiffenstuel (l. c. pag. 86): „cum successu temporis evelli arbores et similia plura tuguria aedificari coepta donec ex aulae primoribus quidam majores condere domos, et Henricus II. Leopoldi sancti filius decimo quarto regiminis sui anno Viennam incolere et in urbem formari mandaret: restat adhuc hodie ipsa in urbe truncus quidam arboreus ferro circumdatus ad domum quandam, quam vocabulo communi beym Stock in Eysen nominant, qui in memoriam manet relictus.“

[2]) Realis, Curiositäten- und Memorabilien-Lexikon von Wien 1846. 2. Bd.

[3]) Zappert Georg, Wiens ältester Plan. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien. Philos.-hist. Cl. 21. Bd. Jahrg. 1856.

Zappert das Fragment eines Gültenbuches der Passauer Diöcese. Die Bezeichnungen: capela St. Stephani und curia marchionis verrathen, dass die Anfertigung jenes Planes vor der Mitte des XII. Jahrhunderts erfolgt sein musste, denn im Jahre 1147 wurde angeblich die capela Sc. Stephani zur ecclesia geweiht und im Jahre 1156 wurde Heinrich Jasomirgott mit den zum Herzogthum erhobenen Marken ob und unter der Enns belehnt.

Auf dem in Rede stehenden Plane erscheint nun auch in unmittelbarer Nähe von Sct. Stephan eine „strata nemoris paganorum“, i. e. Heidenhainstraße. Nach der Ansicht von Zappert ist es zweifellos, dass sich in dieser Gegend in vorchristlicher Zeit ein Götterhain befand, dessen Andenken sich noch lange in der Erinnerung des Volkes fristete, wie es denn für heidnische Örtlichkeiten ein treues Gedächtnis bewahrte, wofür mehrere Beispiele angeführt werden. „Der Baumcultus war ein bei allen unseren Volksstämmen verbreiteter und lange nach ihrer christlichen Bekehrung noch sporadisch im Gehirn sich forterhaltender heidnischer Aberglaube. Wollen wir jedoch unseren Stock im Eisen nicht als heiligen Baum jenes Haines anerkennen, so dürfen wir ihn umsomehr als Markbaum gelten lassen, als bei allen unseren Völkerschaften Bäume als Grenzzeichen benützt wurden. Zuweilen beschlug man Grenzbäume mit Eisen und eisernen Nägeln.“ Zappert resumiert seine Ausführungen dahin, dass die strata nemoris paganorum auf einen Götterhain aus heidnischer Zeit hinweist; als das Christenthum festen Fuß gefasst hatte, wurden die Bäume gefällt bis auf einen, der vielleicht Grenzbaum war und dessen Rest das noch heute stehende Wahrzeichen bildet.

Es hat jedoch K. Weiß[1]) den von Zappert aufgefundenen Plan einem kritischen Studium unterworfen und auf eine ganze Reihe von wichtigen Thatsachen hingewiesen, welche gegen die Echtheit des Planes sprechen.

Auch Kenner[2]) theilt nicht die Ansicht von Zappert, in der Umgebung der strata nemoris paganorum einen vorrömischen heiligen Hain anzunehmen, den die Axt erst nach

[1]) Weiß K. a) Topographie der Stadt Wien. II. Bd. p. 20 und b) Geschichte der Stadt Wien. 2. Aufl. 1882. I. Bd. p. 568.

[2]) Kenner Friedr., Vindobona. Eine archäologische Untersuchung etc. Ber. u. Mittheil. des Wiener Alterthumvereines. 9. Bd. 1865.

der Befestigung des Christenthums fällte. Denn man müsste dabei voraussetzen, dass dieser Hain schon in der Zeit der römischen Occupation existierte. Es ist aber nicht wahrscheinlich, dass die Römer in der nächsten Umgebung ihres Standlagers einen Waldbestand geduldet hätten, der ihnen die Aussicht in die Umgebung hinderte und dem Feinde eine willkommene Deckung geboten hätte.

Unger hat in seinem den „Stock im Eisen" behandelnden Aufsatze die Sitte des Benagelns von einem allgemeinen Gesichtspunkte aufgefasst. Auf seiner Reise in den Orient fand dieser Forscher bei Girgeh in Oberägypten einen sehr alten Naback-Baum (Ziziphus spina Christi), dessen Stamm von allen Seiten und soweit die aufwärts ausgestreckte Hand eines Menschen reicht, mit zahlreichen Nägeln beschlagen war. Auf der Rhede der Stadt Minich stand eine große, alte Sycomore an der Mauer eines Schechengrabes. Der Stamm war gleichfalls „ringsumher und soweit eines Mannes Arm aufwärts reicht, mit Nägeln beschlagen". In Damaskus war ein alter Olivenbaum gleichfalls der Träger von Hunderten von Nägeln; jeder war mit einem bunten Lappen umwickelt oder durch denselben in die Rinde des Stammes getrieben. Der Dragoman erklärte die Nägel sammt den Lappen für Weihgeschenke, die diesem heiligen Baume von Personen dargebracht seien, die sich vom Schicksal Liebesglück, Gunst, Reichthum oder Gesundheit erbaten oder, bereits im Besitze dieser irdischen Güter, dadurch ihre Dankbarkeit an den Tag legten. Unger weist darauf hin, dass auch den Griechen und Römern die Sitte des Benagelns der Bäume nicht fremd war und dass noch heutigentags in südlichen Ländern Europas frei an Wegen und Fußpfaden stehende hölzerne Kreuze benagelt werden, wobei bisweilen auch Zähne statt der Nägel gebraucht werden. Unger schließt seinen interessanten Aufsatz mit folgenden Worten: „Kehren wir nun wieder zu unserem „Stock im Eisen" zurück, so kann ich nicht umhin, mich dagegen auszusprechen, in demselben ein Kind der Volkslaune oder ein Zeichen einer Innungseigenthümlichkeit sehen zu wollen Viel sicherer scheint sich mir seine religiöse Bedeutung herauszustellen. Wir hätten sodann in diesem kindlichen, schmucklosen Denkmale sittlicher Weihe zugleich die sicherste Bürgschaft seines Ursprunges, der sich in eine sehr ferne geschichtliche Zeit verlieren dürfte."

Wenedikt (Bermann)[1]) weist darauf hin, dass der Stock-im-Eisenplatz früher der „alte Rossmarkt" hieß und dass sich auf demselben mehrere Schmiede- und Wagnerwerkstätten befanden. Durch diesen Umstand findet er folgende „ungezwungene und natürliche" Erklärung: „Der Stock im Eisen war nichts mehr und nichts weniger als ein sogenannter Rädelbaum, ein geschnitzter Baumstamm, wie ihn die Wagner und Schmiede noch heutzutage vor ihren Werkstätten auf dem Lande aufpflanzen, mit eisernen Ringen, bestimmt, daran Pferde zu befestigen. Wann dann die Sitte aufkam, dass abreisende Schmiede- und Schlossergesellen einen Nagel in den Baum schlugen und damit fortfuhren, bis der ganze Baum mit einer eisernen Rinde bedeckt war, das ist nicht auszumachen."

Mir scheint die Annahme Ungers, den Ursprung des „Stock im Eisen" in eine ferne Vergangenheit, etwa in die Zeit der Anfänge des Christenthums zu verlegen, deshalb nicht plausibel zu sein, weil ich nicht glaube, dass dann der Baumrest noch in jenem relativ guten Erhaltungszustande sein würde, in dem er sich heute befindet. Ferner ist es sehr hypothetisch, den Grund der Benagelung in einem religiösen Acte zu suchen, und andererseits gewiss nicht richtig, für die Effectuierung der Benagelung einen langen Zeitraum anzunehmen. Dass ein Baum auch schnell benagelt sein kann, dafür führt Unger selbst ein Beispiel an: Um das Jahr 1830 hatte sich ein Unglücksmensch in der Umgebung der Stadt Steyr an einem am Waldsaum stehenden Baume erhängt. „Nicht lange darnach war der ganze (?) Stamm dieses Baumes mit Nägeln beschlagen."

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass die Wiener Historiographen des 17. und im Anfange des 18. Jahrhunderts zwar über den eisernen Gürtel und das an demselben befindliche Schloss berichten, von einer Benagelung aber nichts erwähnen. Wichtig ist, was Küchelbecker,[2]) welcher die Merkwürdigkeiten Wiens genau beschreibt, 1730 sagt: „Nicht weit vom Stephansplatz steht an einem Hause ein Stock von einem Baume, welcher mit einem starken, eisernen Bande umgeben

[1]) Wenedikt Alb., Geschichte der Wiener Stadt und Vorstädte. Mit Vorrede von M. Bermann.

[2]) Siehe oben S. 86 Anmerkung 4..

und mit einem großen Schloss verwahrt ist, dahero solcher auch insgemein der Stock im Eisen genannt wird."

Die Bezeichnung „Stock im Eisen" ist somit auf das eiserne Band und nicht auf die Nägel zurückzuführen. Dadurch findet auch meine früher ausgesprochene Behauptung, dass sich die Ausdrücke von Laz und Reiffenstuel „truncus ferro conclusus" und „truncus ferro circumdatus" nur auf den eisernen Reif beziehen, eine wesentliche Stütze. Damit will ich nicht behaupten, dass jenes „ferrum" dasselbe ist, welches die Jahreszahl 1575 trägt und noch heute den Stock umgürtet.[1]) Ich füge noch Folgendes bei: In der hiesigen kaiserlichen Hofbibliothek befindet sich ein großer, colorierter, auf schwerem Seidenstoff gedruckter Kupferstich aus dem Jahre 1614. Auf diesem interessanten Bilde ist eine Procession dargestellt,[2]) die sich aus der Stephanskirche gegen den Stock-im-Eisenplatz bewegt. Der Platz ist hier von kleinen Häusern eingesäumt, vor denen sich Verkaufsbuden befinden. Neben einer dieser letzteren steht nun, und zwar auf einem niedrigen Sockel, der „Stock im Eisen". Man sieht sofort den Ring. Seine Lage ist jedoch nicht so tief, wie dies später der Fall war, sondern er umgürtet den Stock gleich unterhalb der Gabelung. Von Eisenspangen und Nägeln ist (selbst unter der Lupe) nichts zu sehen.

Endlich mache ich noch darauf aufmerksam, dass sowohl Sturm wie Bormastino und Küchelbecker zwar die Sage vom „Stock im Eisen" erzählen, dass aber keiner etwas davon erwähnt, dass die nach Wien zugereisten Schlossergehilfen zum Andenken oder zum Seelenheil für ihren Collegen, der mit Satans Hilfe das Schloss anfertigte, Nägel in den Stock eingeschlagen hätten.

Unger gieng von der falschen Prämisse aus, dass man es hier nicht mit einem Stamme, sondern mit einem Wurzelstocke zu thun habe, und dass deshalb die Benagelung nicht als Zeichen einer Innungseigenthümlichkeit betrachtet werden kann, da man wohl einen Stamm, nicht aber eine Wurzel be-

---

[1]) Im Jahre 1571 war Besitzerin des Hauses, an dem der Baumrest stand, Ursula Khern, Witwe nach dem Eisner (Schlosser) Wolfgang Khern; 1578 schenkte sie es ihrem zweiten Manne, dem „Eysencramer" Hans Puettinger.

[2]) Wahrhaftiger unnd aigentlicher abriss der Gottseligen Procession unnd Caeremonien etc. Anno 1614.

nageln kann. Er meint nun, dass der schon in Olims Zeiten mit zahlreichen Nägeln beschenkte Baum bis auf die Wurzel zugrunde gegangen sei, dass man ihn dann mit dem Wurzelstock ausgrub und in eine Schlosserwerkstätte brachte. Hier wurden die Nägel aus dem Stamm ausgezogen, andere fielen infolge der Fäulnis des Holzes heraus. Nun wurden die Nägel sortiert und von kunstgeübter Hand in die Wurzel eingeschlagen. Diese ganze Hypothese fällt aber mit der Thatsache, dass der größte Theil des Stockes, nämlich von der Basis bis zur Bifurcation, ein Stamm und nicht eine Wurzel ist; dazu kommt noch die begründete Annahme, dass die Benagelung erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts begann.

Ich habe mir über die Entwicklungsgeschichte des „Stock im Eisen" folgende Ansicht gebildet: Verlassen wir uns auf die Berichte von Jakob Sturm, Antonio Bormastino und Ignaz Reiffenstuel, so müssen wir die Vegetationsperiode jenes Baumes, welcher zu dem vielbesprochenen Wahrzeichen wurde, in die Zeit der Babenberger Leopold III. und Heinrich II. verlegen. Wir wissen, dass die Stelle, an welcher der Standort des Stockes im 16. Jahrhunderts genannt wird, zur Zeit Herzog Heinrich II. (Jasomirgotts) außerhalb der ältesten Stadtgrenzen lag. Mit dem Beginn und dem Fortschritt der Stadtausdehnung zu Ende des 12. und zu Anfang des 13. Jahrhunderts begann die Baum- und Strauchvegetation allmählich zu verschwinden. Eine Fichte, welche an der Grenze stand, und sich vielleicht durch eine eigenthümliche Tracht bemerkbar machte, ließ man „zu nachkünfftiger Gedächtnuss" stehen; ich möchte hiebei auf den Umstand aufmerksam machen, dass der heutige Stock-im-Eisenplatz an der Grenze *a*) der ursprünglichen Stadtausdehnung, *b*) der ersten und *c*) der zweiten Stadterweiterung liegt. Später wurde der Baum beziehungsweise die Wurzel exhumiert. Möglicherweise wollte man ihn ursprünglich fällen und begann das Holz nahe am Boden wegzuhacken, wodurch sich die sehr verdünnte Stelle oberhalb der Stammbasis erklären würde. Nachdem er ausgegraben war, wurde der Stamm bis zu einer Höhe von etwa [illegible] abgeschnitten, ebenso die beiden Haup[illegible] Seitenzweige am Stamme und den [illegible]brochen, theils abgesägt, und d[illegible] Mauer eines Hauses gestellt. [illegible] wurde er in einer seiner natür-

lichen Richtung umgekehrten Lage aufgestellt und außerdem noch „mit einem dicken, eysernen in die Mauer fest eingeschlagenen Ring umfangen“. So stand der Stock, von einem Reif aus Eisen eingeschlossen (ferro conclusus), vielleicht schon im 13. Jahrhundert. Das „Schloss“ sowie die fünf Eisenspangen sind spätere Beigaben; die Benagelung aber begann erst um die Mitte des 18. Jahrhunderts. Die Veranlassung hiezu ist gegenwärtig unbekannt; so viel dürfte jedoch gewiss sein, dass die Benagelung im wesentlichen in kurzer Zeit vollendet war und dass in unserem Jahrhundert nur wenige Nägel hinzugekommen sind.

Der Baumrest soll ursprünglich bei jenem Hause gewesen sein, welches bei der I. Conscribierung (1771—75) die Nummer 1089, bei der II. Numerierung (1822) die Zahl 1079 erhielt. Es war identisch mit dem Hause Kärntnerstraße 2, welches 1856 von der Commune Wien behufs Demolierung angekauft wurde.[1]) Wann das Wahrzeichen von hier zu dem Nachbarhause I. Nr. 1090 = II. Nr. 1080 = Stock-im-Eisenplatz Nr. 3 übertragen wurde, ist nicht sichergestellt. Camesina gibt an, dass dies im 17. Jahrhundert der Fall war.[2]) Dasselbe sagt K. Weiß;[3]) an einem anderen Orte[4]) hingegen meint er, dass die Dislocierung wahrscheinlich um das Jahr 1575 erfolgte. Ich glaube, dass der Stock spätestens in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts bereits an dem Hause 1090 = 1080 = Stock-im-Eisenplatz 3 stand. Es ergibt sich dies aus den mit großer Genauigkeit geführten Büchern und Protokollen der kaiserlichen Hofquartiermeister.[5]) Dort erscheint bereits in den Jahren 1563—87 „am alten Rossmarckht“ (Rossmargkht) das Haus „beim Stockh in eysen“ (stogkh inn eysen). Vergleicht man die in diesen Hofquartiermeisterbüchern angegebenen Namen der Hausbesitzer mit jenem Namensverzeichnis, welches

---

[1]) K. Weiß gibt drei verschiedene Häuser an. In der Geschichte Wiens: Kärntnerstraße 6 (= Nr. 1077); in der Topographie von Niederösterreich II. Bd.: Nr. 1079 (= Kärntnerstr. 2) und in einem Feuilleton der „Presse“ (1891) das Dusl'sche Haus Nr. 1078 (= Kärntnerstr. 4).

[2]) Camesina l. c. pag. 71 p. CXVI.

[3]) Topographie der Stadt Wien. II. Bd., pag. 20.

[4]) Geschichte der Stadt Wien. 2. Aufl. I. Bd., pag. 568.

[5]) ...irk E., Materialien zur Topographie der Stadt Wien in den Jahren ... Wien 1866.

Camesina[1]) aus dem Grundbuch der Stadt Wien zusammengestellt hat, so kommt man zu dem Hause 1090 resp. 1080. Es muss noch hiebei bemerkt werden, dass die Nummern an den Häusern der inneren Stadt wohl erst seit 1771 angeschrieben wurden, dass aber eine Numerierung überhaupt bereits 1567 eingeführt worden ist. An jenem Hause 1080[1]) war auch, wie Schimmer[2]) und Kisch[3]) angeben, „seit alter Zeit" das Wahrzeichen al fresco abgebildet.

Was den Sagenkreis des „Stock im Eisen" betrifft, so illustriert derselbe so recht das Sprichwort: „fama crescit eundo". Die einfache und kurze Fassung, wie sie bei Jakob Sturm 1659 vorkommt, wurde allmählich durch Beigaben und Ausschmückungen erweitert und verändert, und in den Erzählungen von Bermann erkennt man kaum mehr den Kern der ursprünglichen Darstellung. Ich reproduciere nur die ältesten Formen der Sage.

In der Beschreibung des „Stock im Eisen" bei Sturm[4]) heißt es: „.... daran (an dem Eisenbande) ein besonder künstlich Schloss hängt, welches kein Mensch auf zu schlüssen vermag, und wie die Alten berichten, daher kommt, dass ein Schlosser, vor ein Kunst-Stükk daran gemacht; sein Lehr-Junge aber aus Verdruss und muthwilligen Vorwiz, seinen Meister zu übertreffen, sich vermessen, mit dem leidigen Teuffel einen Bund aufgericht, welcher ihm auch solchen Schlüssel zu verfertigen, rechte Anleitung gegeben hat, aber dabei sich vorbehalten, wenn Er solchen bei dem Aufschlüssen, würde fallen lassen, sollte er stets sein eigen sein: Welches dann also erfolget, dass der Teuffel den Lehr-Jungen hinweg genommen hat...."

Mehrfache Zusätze findet man bereits bei Bormastino[5]) 1715. Dieser erzählt: „Man weiss auss alten Geschichten, dass

---

[1]) Die Besitzer jenes Hauses von 1427—1702 sind aus dem Grundbuche der Stadt Wien durch Camesina [illegible] Wiener Alterthumvereines 1870 p. 274 [illegible] Aufzählung von 1684—1848 findet man [illegible]

[2]) Schimmer [illegible]

[3]) Kisch [illegible] 1883.

[4]) [illegible]

[5]) [illegible]

ein Schlosser Jung, welcher sich dem Teuffel versprochen hatte, habe selbiges Schloss machen lernen, welches kein Meister auflösen können. Er ist unversehens von dem Teuffel ermordet worden, welcher ihm den Halss umbgeträhet, und den Cörper an die Mauer auf gehencket, allwo man das Zeichen noch sehen kan. In einem Keller, wo der arme Mensch trancke: aber es ist zu merken, dass der höllische Feind dem Jungen zu schaden, auss Arglistigkeit angestellt habe, dass er selben Tag kein Mess gehöret. Er hat sich in ein altes Weib verkehret, und begegnete dem Armseeligen auf dem Weg, welcher, nachdem er sich zu lang in dem Keller aufgehalten und zu spatt zu seyn vermeinende, eylends der Kirchen zu gienge, zu welchem der Teuffel sagte, dass es unmöglich wäre, noch eine Mess zu finden. Er gehet widerumb in ebenselben Keller, welcher in einem Hauss ist am St. Peters-Platz, und gleich darauf siehet er ein selbiges alte Weib hinein kommen, welche dieser trauervolle Geschicht vollzogen."

Im wesentlichen dieselbe Darstellung gibt Küchelbecker.[1]) Verhältnismäßig kurz erzählt Pezzl[2]) die „alte Legende" vom „Stock im Eisen", der (wie früher bemerkt) damals schon benagelt war: „Ein Schlosserjunge habe seinem Meister versprochen, ein Schloss für diesen Stock zu machen, welches niemand zu öffnen imstande wäre, wenn er ihn sogleich freisprechen würde. Der Meister gieng darauf ein, der Bursche verschrieb seine Seele dem Teufel, verfertigte mit dessen Hilfe das Schloss, warf den Schlüssel in die Donau, wurde freigesprochen, aber auch gleich darauf vom höllischen Schlosser geholt. Seitdem schlug jeder Schlosserjunge zum Andenken, dass er in Wien gewesen, einen Nagel in diesen Stock. Da dieses jetzt nicht mehr möglich ist, so besehen sie ihn mit aufgesperrtem Maule und raisonnieren über das höllische Schloss."

Am ausführlichsten erzählt Ziska[3]) die Sage in Form eines echten Volksmärchens: „Vor langer Zeit lebte in Wien ein Schlosserbub, der ein lockerer Vogel war. Eines Nachmittags schickte ihn sein Meister vor das Stadtthor um eine

---

[1]) Siehe oben S. 86 Anmerkung 4.
[2]) Siehe oben S. 89 Anmerkung 3.
[3]) Siehe oben S. 70 Anmerkung 3.

Scheibtruhe Lehm.[1]) Als der Lehrbub hinaus aufs Feld kam, traf er eine Schaar lustiger Bürschel, die gerade „Lezerl“[2]) spielten. Er ließ alles liegen und stehen und spielte mit. Mittlerweile wurde es finster, die Kameraden giengen nach hause, der Schlosserbub aber machte sich an die Arbeit, packte dann Schaufel und Krampen in die Scheibtruhe und fuhr schleunig nach der Stadt. Als er aber beim Stadtthor anlangte, war dieses bereits geschlossen. Nun stand er rathlos da und lamentierte: „Gleich möcht' ich des Teufels sein, wenn ich hineinkommen könnt'“. Kaum hatte er das gesagt, so stand neben ihm ein kleines Mandl mit schwarzen Hosen, rothem Wams und drei Hahnenfedern auf dem Hute. — Warum flennst du? — No, ich soll in die Stadt fahren und das Thor ist schon zu und ich hab' kein Sperrgeld, um mir aufmachen zu lassen, und wenn ich nicht nach haus' komm', krieg' ich vom Meister Schläg'. — Ich gebe dir den Kreuzer, antwortete der Unbekannte, du bekommst keine Schläge und kannst vermöge meiner Macht ein geschickter Schlosser werden, wenn du mir versprichst, dass du mein sein willst, wenn du an einem Sonntage die heilige Messe versäumst. — Das ist ja leicht, dachte der Bursche, schlug ein und gab, da er nicht schreiben konnte, dem Männlein drei Tropfen seines Herzblutes als Pfand. Darauf bekam er den Sperrkreuzer, ließ sich öffnen und der Meister schalt ihn nicht aus.

Am folgenden Morgen kam der Rothe zum Meister und bestellte für die „Weaner Oachn“ (Wiener Eiche) einen eisernen Ring und ein überaus künstliches Schloss. Meister und Gesellen trauten sich nicht, es zu verfertigen. — Euer Lehrbub wird es machen, der ist geschickter als ihr — sagte der Fremde. — Wenn er es zusammenbringt, meinte der Meister, soll er stante pede Geselle sein. Der Junge machte sich an die Arbeit und in einer Stunde war das Schloss fertig. Darauf ist er mit dem rothen Mann zu der Eiche gegangen und hat Ring sammt Schloss daran befestigt; den Schlüssel aber nahm der Rothe mit sich und verschwand. Seit dieser Zeit heißt „dö Weaner Oach'n dr Schtog ôm Ais'n“.

---

[1]) Über das Vorkommen von Lehm (Tegel) vor dem alten Kärntnerthor und an anderen Stellen des Wiener Bodens vgl. Ed. **Sueß**, Der Boden der Stadt Wien etc. 1862.

[2]) Ein altes, österreichisches Kinderspiel.

Der Lehrbub wurde Geselle und gieng nach damaligem Brauch in die Fremde. In Nürnberg legte er bei einem Meister Proben derartiger Kunstfertigkeit und Geschwindigkeit ab, dass dem Meister angst und bange wurde. Er entließ daher den neuen Gesellen, der wieder nach Wien zurückkehrte. Hier hörte er, dass die Obrigkeit darüber ungehalten sei, dass der wildfremde Mensch den Schlüssel vom Schloss bei der Eiche mitgenommen habe und demjenigen das Meisterrecht verspreche, der einen neuen Schlüssel machen würde. Der Geselle gieng gleich an die Arbeit. Das war aber dem Bösen nicht recht und er verdrehte den Schlüsselbart. Der geriebene Schlosser merkte aber bald den Schabernak und betrog den dummen Teufel, indem er den Schlüssel mit verkehrtem Barte in das Feuer schob. Am folgenden Tage öffnete er das Schloss vor den Augen der versammelten Stadtobrigkeit und zahlreicher Neugieriger, schlug zum ewigen Andenken einen Nagel in den Stamm und warf den Schlüssel in die Höhe, der aber zum allgemeinen Erstaunen nicht wieder herabfiel.

Der Geselle erhielt das Meister- und Bürgerrecht, wurde berühmt und wohlhabend und vergaß an keinem Sonntag, der heiligen Messe beizuwohnen.

An einem Sonntag Vormittag saß er wie gewöhnlich in der Weinstube „beim steinernen Kleeblatt“ und spielte Würfel im Kreise guter Freunde. Um 10 Uhr wollte er in die Kirche gehen. Aber die Kameraden redeten ihm zu, noch zu bleiben und er ließ es sich sagen. Da schlug es elf. — Jetzt muss ich gehen, sagt der Meister und springt vom Sessel auf. — Hast noch eine halbe Stunde Zeit, rufen ihm die Freunderln zu und halten ihn zurück. — Da wird es halb zwölf. Kreideweiß stürzt er aus der Weinstube und lauft in die Stephanskirche. Dort trifft er nur ein altes Weib. — Um himmelswillen, liebe Frau, ist denn schon die letzte Messe aus? — Jo freili, es ist schon 12 Uhr vorbei. — O du mein himmlischer Vater, schreit der Meister und lauft zurück zum „steinernen Kleeblatt“. Darauf schlägt es wirklich Mittag und beim letzten Schlag der Uhr steht der Rothe an der Thür und ruft: Versäume die Messe nicht! Der Schlosser stürzt heraus und läuft zur Stephanskirche; doch das rothe Männlein geht hinter ihm und wird immer größer und schrecklicher. Wie sie zum Riesenthor kommen, spricht der Geistliche das „Ite missa est“. Aus dem Männlein

ist ein blutrother Riese geworden, der packt mit seinen Krallen den unglücklichen Meister und fliegt mit ihm in die Luft [illegible] davon[4].

Dieselbe Geschichte mit Auslassung einiger [illegible]licher Details ist auch bei Hormayer[1] 1825 und im [illegible]täten-Lexikon von Realis[2] 1846 abgedruckt. Ho[illegible] [illegible] Winter[3] geben der Sage eine in den meisten Punkten wesentlich andere Fassung. Aus welchen „besten Quellen“ sie [illegible], ist mir nicht bekannt, da die Verfasser keine Literaturangaben machen. Wenedikt und Bermann[4] haben ihren Legenden vom „Stock im Eisen“ die Ziska'sche Darstellung zugrunde gelegt und einiges hinzugedichtet, so den Namen Martin [illegible] und die Personalbeschreibung des Schlossergesellen, den Namen und die Adresse seines Meisters etc. In jüngster Zeit ist mir ein Broschürchen in die Hand gekommen, in welchem gleichfalls die Sage erzählt wird [illegible] Jahrhunderts [illegible]. Nach dieser Fassung [illegible] der Lehrjunge mit Hilfe des Teufels einen Schlüssel zu dem bereits am Eisenbande des [illegible] Baumes hängenden Schlosse, welches er aber nur unter der Bedingung öffnen will, wenn [illegible] seiner [illegible] [illegible] und der Lehrjunge wird [illegible] und ein [illegible] Schlossermeister.[5]

[1] Hormayr [illegible] Wien [illegible]
[2] Siehe oben [illegible] Anmerkung 2.
[3] Siehe oben [illegible] Anmerkung [illegible]
[4] Bermann [illegible] Wien [illegible]
[5] [illegible]

VIII. Abtheilung.

Philosophie und Pädagogik.

I.

Die Gesetze des Urtheilsverhältnisses der Einordnung

(Subalternation)

als Gesetze des Lebens — geselligen Vereinens der Menschen — der Staaten und Völker.

Von

Reg.-Rath Dr. Sigismund Gschwandner,

Director des k. k. Gymnasiums der Benedictiner zu den Schotten in Wien.

„Das Allgemeine schwebt dem Geiste beständig vor,
Nur wie ein Bild, verhüllt von des Besondern Flor.
Doch wenn der Geist einmal sich, durch den Flor zu dringen,
Gewöhnte, sieht er klar das All in allen Dingen.
Das ist die Ähnlichkeit, die Bild mit Bild verknüpft;
Fest hält die Dinge, wem der Faden nie entschlüpft.
Als die Erscheinungen Dir allererst erschienen,
Sahst Du sie regellos und kein Gesetz in ihnen.
Mit Freude wurdest Du dann ihr Gesetz gewahr!"

Friedrich Rückert.

In dem Jahresberichte 1889 habe ich es versucht, meinen Schülern eine Weltansicht auf Grundlage der modernen Forschungen vorzuführen, indem ich namentlich das Thätige — die Weltfactoren — in ihrem Ineinandergreifen im Gebiete der Natur darzustellen suchte.

In dem gegenwärtigen Jahresberichte will ich es versuchen, das Menschenleben nach seinen Gestaltungen vorzuführen, und zwar das „Wie" desselben, für welches ich den logischen Ausdruck in dem Urtheilsverhältnisse der Einordnung (Subalternation) zu erkennen glaube.

Ich beginne die Lösung der gegenwärtig vorliegenden Aufgabe bei jener Geistesgestaltung, welche bei keinem Menschen fehlt, welche mit dem Leben des Menschen im innigsten Zusammenhange steht, welche ihn veranlasst, sich für das Leben zu interessieren, welche die vorwaltendste Lebendigkeit, Innigkeit und Thatenrührigkeit besitzt und äußert — nämlich bei dem Gemüthe. „Gemüth" im allerweitesten Sinne ist die besondere Art und Gestaltung der Auffassung der Außenwelt nach unserem persönlichen Wesen, nach unserem freilich noch nicht klar bewussten Ich. Man nennt die unbefangene und durch den scheidenden Verstand noch nicht gestörte Einheit des Gemüthlebens ein Kindergemüth, ein kindliches Gemüth, das sich manche Menschen bis in ihr Alter bewahren. Von der Naivität des Ge-

müthlebens aus hat sich das Menschenleben — sowohl das Einzel- als Gesammtleben nach seinen Schöpfungen etc. entwickelt und gestaltet. „Das Gemüth strebt vom Einzelnen zum Ganzen — nicht Allgemeinen (Abstracten) fort, nur im Begriffe des Ganzen beruhigt sich seine rastlose Bewegung. Darum gestalten wir die zusammenhangslosen Bruchstücke des Weltlaufes, die wir in unseren Vorstellungen in uns tragen, zu einem Ganzen, in welchem die einzelnen Theile als lebendige Glieder harmonisch vereinigt sind. Nur das Wertvolle ist für das Gemüth das Seiende. Es ist nur befriedigt, wenn es wahrnimmt, dass nicht bloß wirkende Ursachen walten, sondern dass auch Zwecke in diesem Getriebe erfüllt werden, Zwecke, welche dem ganzen Sein erst Wert und Würde verleihen. Wir tragen die Welt nicht bloß im Kopfe, sondern auch im Herzen, und von dem Gemüthe wird die Auffassung der natürlichen wie der geistigen Welt (Wissenschaft, Kunst, Religion und Sittlichkeit) bestimmt.“ [1]) Wo Gemüth fehlt oder verkommt, tritt Verrohung ein oder hervor. Die uns zu unseren Handlungen verpflichtenden Gebote sind nicht Sätze, deren wir uns vor aller Erfahrung bewusst waren, sondern dies werden sie erst durch die Erfahrung und eine nachfolgende Überlegung unseres Geistes. „Schlüsse vom Einzelnen auf Einzelnes, ohne Durchgang durch das Allgemeine, sind es nach J. St. Mill, welche im letzten Grunde allen Fortschritt im Denken herstellen.“ J. St. Mill sagt über das Wesen der Beobachtung: „Der Beobachter ist nicht der, welcher bloß das Ding sieht, das vor seinen Augen liegt, sondern welcher sieht, aus welchen Theilen das Ding besteht.“ Das gilt auch von dem echten „Persönlichsein“ selbst; der Mensch bringt es nicht als eine Gabe der Natur fertig mit, sondern muss erst in umwandelnder That durch Anknüpfung seines Daseins an die Wirklichkeit dahin vordringen.

Diese und ähnliche Thatsachen können nie aus abstracten Begriffen abgeleitet werden, sondern behalten als Werk der Freiheit etwas mehr Positives — wirklich Werdendes und Gewordenes. Wir dürfen aber den Menschen auch wieder nicht bloß in seiner Vereinzelung betrachten. „Unus homo nullus homo“. Die Anschauung ist nicht richtig, welche sich den einzelnen Menschen abgetrennt von der Gemeinschaft vorstellt.

[1]) Der Leser mag entschuldigen, dass ich Citate, die ihrer Formschönheit wegen gewählt, allgemein giltige Wahrheiten enthalten, nicht mit der Quellenangabe versehe.

Einen solchen abstracten Menschen gibt es nirgends als in der wissenschaftlichen Überlegung. Unser „Ich" denken wir in Wirklichkeit immer eingeschlossen von einem „Wir". Wir sind in die große geistige Gemeinschaft unseres Volkes und damit der ganzen Menschheit hineingeboren als Glieder derselben. Unser ganzes geistiges Leben ist von dem lebendigen Geiste dieser Gesammtheit bedingt, und es ist dieser Gesammtgeist doch selbst wieder ein Erzeugnis der Thätigkeit aller Einzelgeister.

Der logische Ausdruck für das Verhältnis des Einzelnen zum Einzelnen, des Einzelnen zum Ganzen, der Vielheit zur Allheit, des Singulären und Particulären zum Universellen, der Wendung vom Theile zum Ganzen etc. ist das Urtheilsverhältnis der Einordnung (Subalternation); das Ganze könnte sich aber nicht bilden, wenn die Theile nicht so geartet wären, dass sie solche Verbindungen aus Neben-, Über- und Unterordnungen eingehen könnten, es darf kein Gegensatz bestehen. Einigkeit ist eben das Ziel und Ergebnis der Einordnung.

I.
Wesen und Gesetze des Urtheilsverhältnisses der Einordnung (Subalternation).

Da das Verhältnis der Einordnung ein Urtheilsverhältnis ist, so müssen wir, um das Wesen und die Gesetze des Verhältnisses der Einordnung verständlich machen zu können, das Urtheil selbst in Kürze besprechen.

A. Das Urtheil.

Das Urtheil ist in psychischer Hinsicht eine Bewusstseinsform — ein Vorstellen —, in logischer Hinsicht eine Denkform — die unmittelbare Begriffsbestimmung — und hat in sprachlicher Hinsicht seinen Ausdruck im Satze. Seine logischen Bestandtheile sind Subject, Prädicat und Copula. Das Urtheil ist daher zu bestimmen als Vorstellung nach der Art seiner Gewissheit, dann nach seinem Subject, seinem Prädicat, seiner Copula und nach seiner Sprachform. Man bezeichnet die Art der Gewissheit mit dem Ausdrucke Modalität, die Beschaffenheit nach dem Subject mit Quantität, die Beschaffenheit nach dem Prädicat mit Qualität, die nach der Copula mit Relation des Urtheils; diese Bestimmungen können verschieden sein.

In Bezug auf die nähere Bestimmung des Urtheilsverhältnisses der Einordnung sind zunächst die Verschiedenheiten in Bezug auf Quantität und Qualität und beziehungsweise auch der Modalität in Betracht zu ziehen.

In Bezug auf die Quantität kann das Urtheil entweder ein Allheits- (universelles) Urtheil oder ein Vielheits- (particuläres) Urtheil sein; in Bezug auf die Qualität kann das Urtheil entweder bejahend (affirmativ) oder verneinend (negativ) sein. Werden diese möglichen Verschiedenheiten zusammengefasst, so ergeben sich folgende vier Hauptarten von Urtheilen, nämlich:

Das bejahende Allheits- (universell-affirmative) Urtheil,
das bejahende Vielheits- (particulär-affirmative) Urtheil,
das verneinende Allheits- (universell-negative) Urtheil,
das verneinende Vielheits- (particulär-negative) Urtheil.
(Kurz bezeichnet mit A, I, E, O.)

B. Das Urtheilsverhältnis der Einordnung.

Bei dem Urtheilsverhältnis der Einordnung hat man es mit concreten (d. i. mit auf Thatsachen sich beziehenden) Urtheilen zu thun; es werden zwei Urtheile verglichen, welche dieselben Begriffe (also gleiche Materien), welche ferner diese Begriffe in der gleichen Stellung, welche ferner dieselbe Relation, ferner gleiche Qualität und nur verschiedene Quantität haben. Es liegt also zunächst die einzige äußere Verschiedenheit in der Quantität der beiden Urtheile. In dem Verhältnis der Einordnung stehen daher einerseits die Urtheile „A“ und „I“ und anderseits „E“ und „O“. Man nennt das Allheitsurtheil das einordnende (subalternans) und das Vielheitsurtheil das eingeordnete (subalternatum). So ist im ersten Falle „A“ das einordnende und „I“ das eingeordnete, im zweiten Falle „E“ das einordnende und „O“ das eingeordnete Urtheil. Diese Urtheile verhalten sich auch wie Ganzes und Theil.

C. Gesetze des Urtheilsverhältnisses der Einordnung.

1. Aus der Wahrheit des einordnenden Urtheiles folgt die Wahrheit des eingeordneten Urtheiles. Aus der Wahrheit des „A“ folgt die Wahrheit des „I“ und aus der Wahrheit des „E“ folgt die Wahrheit des „O“. Aus der Wahrheit des Ganzen folgt die Wahrheit des Theiles.

2. Aus der Unwahrheit des einordnenden Urtheiles folgt **nicht** nothwendig die Unwahrheit des eingeordneten Urtheiles.

Aus der Unwahrheit des „A“ folgt noch nicht nothwendig die Unwahrheit des „I“ und aus der Unwahrheit des „E“ noch nicht die Unwahrheit des „O“. Wenn auch die Wahrheit des Ganzen nicht erwiesen ist, so können doch Theile desselben wahr (wirklich) sein.

3. Aus der Wahrheit des eingeordneten Urtheiles folgt nicht nothwendig die Wahrheit des einordnenden Urtheiles. Aus der Wahrheit des „I“ folgt nicht nothwendig die Wahrheit des „A“, ebenso folgt aus der Wahrheit des „O“ noch nicht die Wahrheit des „E“. Wenn auch Theile wahr (wirklich) sind, so folgt daraus noch nicht, dass schon das Ganze wahr (wirklich) sein muss.

4. Aus der Unwahrheit des eingeordneten Urtheiles folgt aber nothwendig die Unwahrheit des einordnenden Urtheiles. Aus der Unwahrheit des „I“ folgt nothwendig die Unwahrheit des „A“ und aus der Unwahrheit des „O“ nothwendig die Unwahrheit des „E“. Sind Theile nicht wirklich, so kann nicht mehr das Ganze als wirklich (wahr) sein.

Vergleichen wir diese vier Gesetze, so finden wir, dass der Hauptpol des Verhältnisses in dem eingeordneten Urtheile liegt; dieses bildet den eigentlichen Erklärungsgrund für die Entstehung und Wahrheit des einordnenden Urtheiles. Man muss vom Einzelnen ausgehen, muss dieses nach seiner Thatsächlichkeit und Wahrheit prüfen, und zwar jedes Einzelne, muss diese dann nach dem erkannten Verhältnis harmonisch aneinanderreihen und so folgeweise zum Ganzen zu schreiten suchen; am Einzelnen hat man dann immer das Prüfungsmittel für die Geltung des Ganzen, an diesem aber, wenn es einmal gebildet und constatiert ist, das einfache Kennzeichen auch für die Wahrheit des Einzelnen.

Es erfordert dieser — geradezu kritische — Vorgang von Seite des Urtheilenden tüchtige Anspannung des Geistes und stete Selbstzucht (sit animo liber), indem vorsichtige Zurückhaltung und genaueste Prüfung und die Methode verlangt wird, nicht sogleich die scheinbar zusammenstimmenden Erscheinungen zu ergreifen, sondern durch Ausschluss der negativen Fälle allmählich zum Positiven vorzudringen.

Anmerkung. Da zur Bewahrung vor naheliegenden Irrthümern der Association und zur Beurtheilung etwa hierin vorkommender Fehler die Gesetze der Verhältnisse des Widerstreites (conträren Gegensatzes) und des Widerspruches (contradictorischen Gegensatzes) entscheidend sind, so will ich noch kurz die Gesetze dieser beiden Urtheilsverhältnisse hier beifügen:

a) Den Widerstreit bilden die zwei Urtheile „A" und „E"; diese beiden Urtheile können nicht gleichzeitig wahr, wohl aber gleichzeitig unwahr sein, weil noch „I" und „O" möglich sind.

b) Den Widerspruch bilden einerseits die Urtheile „A" und „O" und anderseits die Urtheile „E" und „I". Diese Urtheile können nicht gleichzeitig wahr, aber auch nicht gleichzeitig unwahr, sondern eines derselben muss wahr sein.

Bei dem Fortschreiten im Aneinanderfügen der wirklich zusammengehörigen Einzelnen wird der Umfang des Ganzen immer mehr ausgefüllt, aber nicht in allen Fällen auch voll. Es wird der volle Umfang nicht ausgefüllt, weil er oft noch nicht erreichbar ist; dann gilt das Verhältniss der Einordnung doch für den bereits erreichten Theil des Umfanges. Beispiele bilden der Speciesbegriff in der Naturgeschichte, Schlüsse in der Geschichte, Urtheilsbildungen bei Gerichtsverhandlungen etc. Es besteht die Aufgabe der betreffenden Wissenschaft und des Lebens in einer fortgesetzten Anwendung des Verhältnisses der Einordnung.

D. Beziehung des Verhältnisses der Einordnung (Subalternation) zu dem Verhältnisse der Unterordnung (Subordination).

Bei dem Verhältnisse der Einordnung steht man fortwährend auf dem Standpunkte des Thatsächlichen — der Erfahrung, des Einzelnen, des Concreten, dessen, was ist; man schreitet schrittweise [illegible] nach dem Ganzen zu. Wird der volle Umfang des Ganzen erreicht, so gibt der abgeschlossene Inhalt desselben den Inbegriff des allen Einzelnen zukommenden Gemeinsamen — das Allgemeine.

Mit diesem kann ein neuer Denkgang eingeleitet und folgerichtig durchgeführt werden, der Gang vom Allgemeinen zum Besonderen (das abgeleitete Verhältniss); dafür ist das Urtheilsverhältniss der Über- und Unterordnung (Subordination). Indem

dieser Gang hat seine Berechtigung, findet seine Anwendung, ist von großer Tragweite; er steht aber auf einem ganz anderen Standpunkte. Man nennt diesen den metaphysischen, idealen, abstracten, rationalen, dessen, was sein soll, die Deduction. Die Quelle und Kraft dafür ist die Vernunft als das Vermögen, wodurch wir der Vorstellung der Allgemeinheit und Nothwendigkeit fähig sind, deren Wesen in dem Streben nach absoluter Einheit besteht.

II.

Gestaltung des Einzellebens des Menschen nach dem Verhältnisse der Einordnung.

Die wesensgemäße Ausbildung des Einzelmenschen bildet den Inhalt und die Aufgabe der Humanität.

Der Mensch ist bei seiner Geburt reich an Möglichkeiten, aber arm an Wirklichkeiten; sein Leib ist ein schön veranlagtes, aber noch unentwickeltes Gebilde, sein Geist ein noch schlummerndes Seiendes — ein unbeschriebenes Blatt; beide müssen erst ausgestaltet werden, und zwar jedes nach seiner Art und nach allen seinen Einzelheiten, aber auch in harmonischer Zusammenreihung.

So hat das Kind die Bewegungsfähigkeit; aber es kann noch nicht gehen, es hat so schöne, hoher Ausbildung fähige Organe des Leibes, es kann sie noch nicht gebrauchen; es muss erst gehen lernen, es müssen die körperlichen Fähigkeiten erst entwickelt und ausgebildet werden.

Ebenso ist es in Bezug auf das Sprechen. Wie vielgestaltig sind ferner die geistigen Thätigkeiten, das häusliche Leben, die Berufsthätigkeit etc.

Sehen wir uns nur vorläufig eine kurze Zusammenstellung an, und zwar: die Gestaltungen des Empfindens und Begehrens, die Entwicklung des Gemüthes, die Gestaltungen der unwillkürlichen Wahrnehmung, des Anschauens, des Bildens der Vorstellungen und deren Vergesellschaftung (Associationen) zu Gesammtvorstellungen, die Bildung des Gedächtnisses und der Einbildungskraft, die Gestaltungen des Denkens, seine Formen

und Gesetze, die Entwicklung der Vernunft, des Gewissens, des Gefühles und deren Schaffungen (als Sittlichkeit, Recht, Kunst, Wissenschaft etc.), die Entwicklung des Willens, des Handelns, die Ausbildung der Persönlichkeit, des Charakters und seiner möglichen Gestaltungen, die Ausbildung für ein Berufsleben, sei es in Bebauung des Bodens, in Gewerbe, in Kunst oder Wissenschaft etc., die Erwerbung von Privatvermögen und Gründung von Wohlstand, die Gründung eines eigenen Hausstandes etc. So sehen wir, dass am Einzelmenschen dem Leibe, dem Geiste, dem Leben nach so viele und mannigfache Einzelgestaltungen herauszubilden sind. Jede derselben hat aber wieder viele Einzelheiten; keine derselben darf übersehen oder vernachlässigt werden. Bei jeder ist vom ersten Werden zum nächsten Werden etc. bis zur Vollendung vorzuschreiten; aber alle müssen auch immer in ein harmonisches Gefüge gebracht werden, wenn endlich nach und nach ein Ganzes von humaner Bildung erreicht werden soll — und das bei jedem einzelnen Menschen. Heutzutage, wo die Bildung schon so vorgeschritten ist, wo so viele und mannigfache Anstalten zur Heranbildung und Beglückung für jeden Einzelmenschen geschaffen und im besten Gange sind, wird der Mensch in die Bildung schon hineingeboren, von allen Seiten wieder angeregt, unterstützt, ja fast geleitet. Es ist also leichter, als es sich darstellt, wenn man in der Geschichte zurückgeht und die Gestaltung des Einzelmenschen in früherer Zeit und im Verlaufe der Zeit ansieht. Aber sowohl der geschichtliche Verlauf der Bildungsgeschichte der Menschheit als der wesensgemäße Gang der heute noch zu befolgenden Ausgestaltung des Menschen können nur nach dem Verhältnis der Einordnung regelrecht und zweckentsprechend vor sich gehen, indem jedes Einzelne nach seiner Wahrheit bestimmt, Einzelnes an Einzelnes ihrem Verhältnis gemäß harmonisch aneinander gereiht und so ein Ganzes angestrebt und schließlich auch erreicht wird. Wahre „I" an wahre „I" sollen endlich ein wahres „A" bilden.

Anmerkung. Es würde zu umfangreich werden, wenn ich alle oben angeführten Einzelheiten, welche human zu bilden sind, eingehend nach dem Verhältnis der Einordnung durchführte. Ich erlaube mir daher, nur wenige — doch etwas bedeutsame — eingehender zu besprechen, gleichsam nur als Beispiele, und bemerke, dass andere so im Zusammenhange mit dem geselligen (socialen) Zusammenleben mit anderen Menschen

stehen, dass sie eben in diesem Zusammenhange auch behandelt werden müssen, was im III. Theile geschehen wird.

Betrachten wir z. B. das „Gehenlernen" (einen rein leiblichen Vorgang). Wie viele Einzelheiten muss das Kind durchmachen, bis es den Kopf heben, bis es sitzen und sich selbst aufsetzen, bis es stehen, frei stehen, bis es gehen, bis es allein gehen, bis es sich regelrecht und sicher nach den Gesetzen der Stabilität bewegen kann. Diese Einzelheiten sind harmonisch vereinigt in dem Ganzen, das wir Gehen nennen. Wie viele Einzelheiten muss ferner der Knabe und das Mädchen durchmachen, um die einzelnen Organe des Leibes zweckentsprechend gebrauchen zu lernen! Damit ist aber die Ausbildung der Bewegungsfähigkeit noch nicht vollendet; es sollen Knabe und Mädchen es noch zu körperlichen Fertigkeiten bringen, sie sollen schreiben lernen, sollen alle Bewegungsorgane harmonisch gebrauchen lernen, sollen turnen, tanzen etc., sollen die Sinnesorgane für Wahrnehmen äußerer Eindrücke gebrauchen lernen und bilden etc.; und das ist für jeden einzelnen Menschen erforderlich.

Wie viele Einzelheiten hat daher jeder Mensch bloß in dieser einen Richtung schon durchzumachen!

Betrachten wir ferner das „Sprechenlernen" (ein leiblich-geistiger Vorgang). Das Organ, Laute hervorzubringen, bringt das Kind mit zur Welt; bei seinem Eintritte in die Welt macht es schon Gebrauch davon. Zum Sprechen genügen aber die bloßen Laute noch nicht, es gehört zum Sprechen die Gliederung (Articulation) der Laute und die Bedeutung des Gesprochenen. Dazu hat das Kind noch nicht einmal alle Organe, es fehlen noch insbesondere die Zähne. Mit welchen Zwischeneinzelheiten erfolgt aber das Bekommen der Zähne, wie viele Einzelheiten, wie viel Zeit und Mühe erfordert es, bis dann das Kind sprechen erlernt, Wort und Satz aussprechen kann! Es hat aber jedes Wort und jeder Satz eine bestimmte Bedeutung, d. h. es soll damit eine Vorstellung ausgedrückt werden, diese ist aber etwas Geistiges. Es reiht sich also beim Sprechenlernen an die leibliche Ausbildung des Sprechens gleichgehend eine geistige Ausbildung an; es muss die Vorstellungsthätigkeit mit entwickelt werden. Wie viele Einzelheiten sind aber hier vom Berührtwerden von äußeren Gegenständen angefangen bis zum Entstehen der Vorstellungen durchzumachen! Man kann daher

genau bei dem Sprechenlernen recht deutlich sehen, wie [illegible]
[illegible] gegliederten Laute so recht harmonisch zu einem
ganzen [illegible] und die entsprechend gebildeten Vorstellungen
[illegible] werden muss, damit ein Ganzes gegliederter
Laute [illegible] bestimmter Bedeutung entstehe. Allein das Sprechen
[illegible] entwickelt, denn in den Massen [illegible]
[illegible] zum Denken [illegible]

[illegible]

Richtet sich das Denken auf eine einfache oder zusammengesetzte Vorstellung im Verhältnis zu anderen Vorstellungen, und ist es imstande, sie nicht nur von anderen Vorstellungen zu unterscheiden, sondern auch in ihr selbst alle ihre Theilvorstellungen zu unterscheiden, so ist sie deutlich. Das Denken vergleicht ferner, nachdem es klare und deutliche Vorstellungen gebildet hat, mehrere Einzelvorstellungen, hebt die ihnen gemeinsamen Merkmale heraus unter Absehen von ihren Verschiedenen, fasst die gemeinsamen Merkmale zur Allgemeinvorstellung zusammen, bildet so die Begriffe, mit und aus den Begriffen dann Urtheile, dann Schlüsse etc., und indem es endlich eine ganze Reihe zusammengehörende Erkenntnisse zu einem geordneten Ganzen methodisch vereinigt, ganze Systeme.

Es hat daher das Denken sehr viele Einzelheiten zu prüfen, Einzelheit dann an Einzelheit zu reihen, um das geordnete Ganze zustande zu bringen; es erfolgt daher auch nach dem Gange des Verhältnisses der Einordnung.

Ich will zum Schlusse noch als ein Beispiel aus dem sogenannten praktischen Leben den Gang des Erwerbens von Eigenthum anführen.

Der Mensch bedarf zu seiner Erhaltung und Bethätigung eine Menge von Mitteln, für welche er sich letztlich an die Natur gewiesen findet. Er verhält sich zur Natur aneignend und sie für seine Zwecke zurechtmachend; er richtet zunächst seine Thätigkeit auf eine bestimmte Sache, auf welche einzuwirken und an welcher Veränderungen vorzunehmen ihm gestattet ist, d. h. er arbeitet, und zwar, wir wollen annehmen, mit Gesinnungstüchtigkeit. Nach der Art und dem Gelingen der Arbeit erhält auch er einen Antheil an und von dieser Sache — in welcher Form, das kann verschieden sein; dieser Theil wird sein „Eigen“. Davon verwendet er für die Erhaltung seiner selbst nur einen Theil, sucht den Rest zu erübrigen, setzt aber zugleich das Arbeiten in derselben Art oder vielleicht auch etwas gesteigert fort, und so nimmt sein „Eigen“ zu. Genügt es, so sucht er selbst eine Sache so zu erwerben, dass er mit Ausschließung Anderer auf dieselbe einwirken — mit ihr arbeiten — kann, er gelangt in den Besitz derselben. Nun kann er ausschließlich an und mit derselben arbeiten und bei Fleiß und Sparsamkeit sein „Eigen“ vermehren; er kann dann auch nach dem Besitze solcher Sachen streben, die nicht nur sein Eigenthum sind,

sondern die ihrer Natur nach unveräußerlich und nicht zerstörbar sind. Und so kann er Eigenthum erwerben und sichern.

Wer diesen Weg durchgemacht hat, der wird wohl auch wissen, welche und wie viele Einzelheiten zu gestalten und harmonisch — mühevoll, ehrlich und rechtlich — aneinanderzufügen sind, bis das Ganze, „Sicheres Eigenthum“, zustande kommt.

Mögen die aus dem Entwicklungsgange des Menschenlebens entnommenen, hier etwas eingehender durchgeführten Beispiele veranschaulichen, wie sich das Einzelleben des Menschen wirklich nach dem Urtheilsverhältnis der Einordnung gestaltet.

Wir wollen nun sehen, wie sich das Leben gestaltet im geselligen Zusammensein der Menschen.

III.

Gestaltung des Menschenlebens zur Gesellschaft und geselligem Vereinen der Menschen nach den Gesetzen des Verhältnisses der Einordnung.

A. Von der Gesellschaft im allgemeinen. Bildung derselben und deren Arten. Bedürfnis derselben.

Es leben viele Menschen nebeneinander; sie existieren aber nicht bloß nebeneinander, sondern sie wirken auch aufeinander ein, sie treten in wechselseitige Thätigkeitsbeziehungen, gesellen sich zu einander, ja sie bedürfen einander; denn nichts in der Welt ist sich gegenseitig nützlicher, nichts steht sich näher als die Einzelwesen [illegible]

leben und Zusammenwirken erforderlichen Grad entwickeln: hierin besteht das Wesen der Civilisation. Diese offenbart sich an dem freundlichen Entgegenkommen gegen andere, an der feinen, gebildeten Lebensart; ihr äußerer Ausdruck ist kurz gesagt — die wahre Höflichkeit und Herzensgüte. Dagegen ist das Kennzeichen des Barbaren in Bezug auf den Seelenausdruck, dass ihm die Mäßigung fehlt, dass er sich dem Sturm der Leidenschaft rückhaltslos hingibt — er ist und bleibt roh und rücksichtslos gegen andere. Der Begriff „Gesellschaft" kann im weiteren und engeren Sinne genommen werden.

Im weiteren Sinne versteht man unter Gesellschaft jene allgemeine Vereinigung, welche zwischen den Menschen überhaupt stattfindet, insofern keiner isoliert von den anderen dasteht, sondern jeder in lebendiger Verbindung mit anderen sich befindet. Diese Gesammtheit aller Menschen nun, insofern sie im allgemeinen Lebensverbande miteinander stehen, nennen wir die menschliche Gesellschaft im weiteren Sinne, die Societät (societas humana).

Im engeren Sinne versteht man unter einer Gesellschaft die dauernde Vereinigung einer Gesammtheit von Menschen zur Erreichung eines gemeinsamen Zweckes. Insofern nämlich mehrere Menschen miteinander in dauernder Weise vereinigt sind, um mit vereinten Kräften einen einheitlichen gemeinsamen Zweck anzustreben, bilden sie miteinander eine moralische Einheit, und diese moralische Einheit ist Gesellschaft. Es setzt eine solche besondere Gesellschaft die allgemeine menschliche Gesellschaft voraus, bildet sich eben als eine besondere — einzelne Gesellschaft im Schoße jener allgemeinen menschlichen Gesellschaft.

So liegt es denn schon in der Art der Entstehung, im Wesen und Begriffe der Gesellschaft, dass sie nach dem Gesetze der Einordnung entsteht und besteht. Einzelne Menschen („I") vereinigen sich zu einem bestimmten Ganzen („A"), das ist der Gesellschaft, und scheiden alle „O", welche nicht dazugehören, von sich aus oder verweisen diese in die Sphäre ihres „E".

Die Gesellschaften können verschieden große Sphären und Zwecke haben; sie können Privatgsellschaften bleiben, sie können sich zum Staate gestalten, und es können die Staaten in Beziehungen zu einander als Völker treten.

In der ersten Beziehung kann man verschiedene Arten von Gesellschaften unterscheiden. Das schönste Beispiel, wie eine Gesellschaft sich nach dem Verhältnisse der Einordnung bildet, bietet uns die Entstehung der christlichen Kirche. Den Beginn bildet eine ganz singuläre Einheit, der göttliche Heiland; an ihn schließen sich bleibend die 12 Apostel und 72 Jünger an und nach und nach viele noch nicht gezählte, weil noch nicht als bleibend erwiesene Anhänger; nach dem Tode und der Himmelfahrt des Heilands und der Herabkunft des heiligen Geistes treten die Apostel zunächst zur Bildung eines ewig ehrwürdigen „A" zusammen, nämlich zur Abfassung des apostolischen Glaubensbekenntnisses, in welchem sie die einzelnen, vom göttlichen Heiland erhaltenen Lehren zu einem Ganzen vereinten; hierauf zerstreuen sie sich nach allen Richtungen, verkünden dieses „A", gewinnen tausende von Anhängern, also unzählbare „I", wählen Stellvertreter und Nachfolger etc. und gründen so ein herrliches Ganzes, nämlich die Kirche Jesu auf Erden, welche bald über den ganzen Planeten ausgebreitet ist.

In Bezug auf die Frage, ob es für den Menschen Bedürfnis ist, in geselligen Verkehr und Verband mit anderen Menschen zu treten, ob das gesellige Vereinen der Menschen etwas Ursprüngliches, in der Menschennatur Begründetes ist, oder ob der Zufall allein Grund zur Vereinigung der Menschen ist, herrschen abweichende Meinungen.

Anmerkung: Zufall heißt jedes Sichdurchkreuzen zweier voneinander unabhängiger Causalitätsreihen, indem sie, in Raum und Zeit zusammenfallend, sich zu einem neuen Ereignisse verbinden. Beachtet man aber die natürliche Liebe zwischen Mann und Weib, zwischen Kindern und Eltern und Familiengliedern, ferner den Zustand, in welchem der Mensch zur Welt kommt, in welchem er auf die Hilfe anderer angewiesen ist, ferner wie jeder Mensch der Erziehung und des Unterrichtes bedarf, um zur rechten und vollkommenen Entwicklung in intellectueller, sittlicher und religiöser Hinsicht und zur Brauchbarkeit für das Leben zu gelangen, ferner dass — wie ich in der Einleitung zu diesem Abschnitte III bereits hervorgehoben habe — im Menschen selbst ein Gesellschaftstrieb angelegt ist, durch welchen er sich angeregt fühlt, seine Gedanken und Willensmeinungen anderen anzuvertrauen, bei ihnen Theilnehmer an seinen Freuden, Trost in seinem Leiden zu suchen, dass endlich dem Menschen

die Sprache zukommt als Mittel des Verkehres mit anderen: so müssen wir erkennen, dass das gesellige Vereinen der Menschen im Schoße des Menschengeschlechtes begründet ist.

B. Aufgabe der Civilisation.

In diesem Abschnitte soll nicht eine besondere Gesellschaft in Betracht gezogen werden, sondern es soll die Grundbedingung für die Gestaltung des Menschenlebens als Ganzes — für die Societas humana und damit ohnehin auch mittelbar für jede besondere Gesellschaft im Schoße der Menschengesellschaft in ihren Hauptmomenten und deren Entwicklung von Einzelheit zu Einzelheit bis zur Ausgestaltung des Ganzen verfolgt, es sollen einige dieser bedeutsamen Momente auch eingehender betrachtet werden.

Die Grundbedingung für das gesellige Beisammensein der Menschen ist die Civilisation; es soll deren Aufgabe im einzelnen betrachtet werden.

1. Da die Civilisation eine Vergrößerung der Aufgabe der Humanität ist, so hat sie sich zunächst an die Humanität anzuschließen, hat dieselbe folgerichtig fortzuführen, zu begründen und successive erweiternd allseitig auszugestalten.

2. Da der Grund zur Bildung von Gesellschaften in den Zwecken liegt, welche angestrebt und verwirklicht werden sollen, so hat die Civilisation zur Kenntnis dieser Zwecke und deren hohe Bedeutung zu führen, dieselben zu begründen und den Willen der Einzelnen dafür anregend und dauernd zu stimmen — kurz zur Gesinnungstüchtigkeit zu leiten.

3. Den Anfang und den festesten Grund zur Gesellschaft bildet die Freundschaft. Die Anzahl der dazu sich Vereinigenden ist zwar sehr klein; allein die Freundschaft zwischen geistig hervorragenden Männern gilt als die Höhe aller individuellen Vereinigung. „Die Gesammtheit der menschlichen Verbindungen kommt bei all ihrer Mannigfaltigkeit auf zwei Hauptformen zurück: Freundschaftsverhältnis und das Staatsleben, jenes für die individuellen Beziehungen des Einzelnen zum Einzelnen, dieses für die weitere Gemeinschaft und die Organisation zu einem geordneten Ganzen.“ „In der Verzweigung der Lebensführung heben sich drei Gebiete besonders kräftig hervor: Freundschaft, Staatsleben und Wissenschaft; in der Freundschaft die Höhe des Gemüthslebens, im Staate die

Erhebung des gesammten menschlichen Daseins zu geschlossener Wohlthätigkeit und in der Wissenschaft die Begründung des Geistesgehaltes unseres Daseins."

4. Da jede Gesellschaft gegliedert (organisiert), die Aufgabe derselben den Kräften der Einzelnen entsprechend vertheilt sein muss, soll der Zweck verwirklicht werden, so hat die Civilisation diese Organisation in dem Zwecke und den Kräften angemessener Weise zu schaffen und die Gesellschaftsmitglieder so zu bilden, dass sie im organischen Lebensverbande auch entsprechend mitwirken.

5. Da die Gesellschaft als moralische Einheit nicht möglich ist ohne ein thatsächliches (concretes) Princip der Einheit, wodurch die Vielheit der Gesellschaftsglieder zur Einheit verbunden wird, so ist eine concrete Auctorität erforderlich, von welcher jene Anordnungen ausgehen, durch welche die Gesellschaftsglieder zu Einem Willen und zu Einer Thätigkeit bestimmt werden. Die Gesellschaftsglieder haben diese Auctorität zu achten, zu unterstützen und ihr zu gehorchen. Die Civilisation hat sie dahinzuleiten; sie stehen der Auctorität gegenüber im Subordinationsverhältnisse, zu einander im Coordinationsverhältnisse und im Verhältnisse zum gemeinsamen Zwecke und ihrer eigenen Würde im Verhältnisse der Einordnung (Subalternation).

6. Da die letzten Grundlagen jedes Zusammenseins die Sittlichkeit und das Recht bilden, so hat die Civilisation auch eine sittliche und eine rechtliche Aufgabe. Sie hat den Sinn der Menschen zu einer höheren Auffassung unseres Daseins, kurz zum Ganzen der Weltbetrachtung zu leiten; sie hat zur Einsicht zu führen und festzustellen, welche Art von menschlicher Lebensführung die beste — die vollkommenste ist. Da man die Gedankenbilder eines absolut Wertvollen in ihrer Vollkommenheit „Ideale" nennt, so hat die Civilisation im folgerichtigen Fortschreiten zur Kenntnis und unbedingten Anerkennung der Ideale von Sittlichkeit, Recht und Religiosität zu führen.

7. Die Civilisation hat [illegible] religiöse Bildung des Menschen zu entwi[illegible] Menschen Gefühle der Abhängig[illegible] bemerkbar, es steigert sich die [illegible] kenntnisse der eigenen Ohnm[illegible] Gefühle finden wir nach dem [illegible] allen Zeiten bei den Menschen, [illegible] ein Durcheinander

von Auffassungen und Verhalten. Von weicher Sentimentalität an bis zur leidenschaftlichen Schwärmerei durchläuft die Stimmung, je nach der Art und Bildung der Individuen, die verschiedensten Stufen! Zu einer großen geschichtlich fortwirkenden Leistung ist diese Denkarbeit nicht gelangt vor der Berührung mit dem Christenthum. Ich darf die Grundwahrheiten des Christenthums, seinen Einfluss auf die Gestaltung des Menschenlebens hier als bekannt voraussetzen; es sei nur angeführt, „dass in Wahrheit der Eintritt des Christenthums die größte Befreiungsthat der Weltgeschichte bildet“. Das Christenthum hat dem von der Außenwelt gedrückten und vom Schicksal gleichgiltig behandelten Individuum (Einzelmenschen) aus einer neuen Ordnung der Dinge einen unermesslichen Wert und eine freudige Zuversicht gegeben und auch dem Ganzen und der ihm begründeten Gemeinschaft eine gewaltige Erhöhung verliehen.

8. Da der Mensch nicht bloß eine Person, sondern, näher bestimmt, eine geistig leibliche Person ist, so obliegt der Civilisation auch die doppelte Sorge für die geistige und für die leibliche Ausbildung des Menschen, soweit selbe für das gesellige Zusammensein erforderlich sind.

α) In geistiger Hinsicht.

Zur weiteren Ergänzung der soeben betrachteten Bildungen will ich nur noch einige hervorheben:

1. Die Civilisation hat den Menschen dahinzuführen, dass er seine persönliche Freiheit, seine persönliche Gleichheit sowohl an und für sich, soweit es ihn als Einzelperson angeht, als auch im richtigen Verhältnisse zu den übrigen Menschen, im Zusammenleben und Zusammenwirken erforderlich ist, erkenne, anstrebe und bethätige. Darin bewährt sich die Menschenwürde des Einzelnen und wird zur Menschenwürde aller.

2. Die Civilisation hat die Entwicklung der intellectuellen Fähigkeiten, ferner die sittliche Integrität, die religiösen Tugenden aller Menschen zu beachten, zur Ausbildung und Verherrlichung zu erstreben, daher die dazu erforderlichen Anstalten zu treffen und zu unterstützen.

3. Die Civilisation hat es dahinzubringen, dass die Ehre und der gute Name jedes einzelnen Menschen (etiam puero debetur honor), jeder kleineren und größeren Gesellschaft, ja der ganzen Menschheit unangetastet, ja heilig gehalten werde.

Das Verlangen, geachtet zu werden (die Respectabilität), ist tief im Menschenherzen begründet, und es bildet der sittliche Wert der Herzensgüte den psychologischen Grund der Respectabilität. Ja es liegt gerade in der Art, wie die Ehre respectiert wird, ein Kennzeichen für den Grad der Civilisation eines bestimmten Zeitalters; und die meisten Verletzungen der Ehre haben ihren Grund im Verkennen und Fehlen gegen die Gesetze des Verhältnisses der Einordnung, wie ich etwas eingehender behandeln will.

Das erste Merkmal der Urtheile, welche im Verhältnisse der Einordnung stehen, ist die „Thatsächlichkeit“. Es zeigt nun keine hohe Bildung, wenn man, ohne sich um die Thatsächlichkeit zu kümmern oder sich von derselben früher überzeugt zu haben, gleich absprechend über die Ehre Anderer Urtheile ausspricht oder auch nur nachspricht, und wenn man ferner gegen das II. und III. Gesetz der Einordnung vom Theil gleich auf das Ganze schließt, wenn z. B. ein Mitglied einer Gesellschaft eine sündhafte That verübt, gleich die ganze Gesellschaft für sündhaft hält und erklärt.

So wie die Häufigkeit der Ehrenbeleidigungen zeigt, wie wenig die Civilisation durchgedrungen ist, so ist die äußerst selten vorkommende Verletzung der Ehre ein Beweis für die gediegenste und allseitige wahre Civilisation.

Ein weiterer Beweis, dass Ehrenbeleidigungen niedere Bildung zeigen, offenbart sich auch in einer eigenthümlich psychologisch-logischen Äußerung: Der Beleidiger lässt sich vom Affecte hinreißen, spricht in unvollständigen Sätzen, zusammenhangslosen Urtheilen, gebraucht Worte und Namen, die nicht der Menschensphäre, sondern der Thierwelt entnommen sind, und zwar von nicht hoch entwickelten Thieren — und der Beleidigte greift zu physischer Gewalt, um Beleidigungen abzuwehren, sei es ein gemeines Balgen und Raufen oder nenne man es Duell. Wie schwer wird aber dabei das Verhältnis der Einordnung verletzt!

b) In leiblicher Hinsicht.

1. Die Civilisation hat dahinzuwirken, dass das Leben, die Gesundheit und Intregrität des leiblichen Lebens die gehörige Beachtung, Ausbildung, Pflege und Sorgfalt finde und gegen Verletzungen geschützt sei, dass daher auch alle erforderlichen

sanitären Veranstaltungen getroffen werden etc. Welche und wie viele Einzelheiten sind aber hier nicht zu besorgen!

2. Die Civilisation hat die wahre Bedeutung der Arbeit für das Leben, ihre Organisation etc. zu ordnen, den Menschen zu Bewusstsein zu bringen, deren Kraft dafür zu bilden und zu gewinnen, Ackerbau, Gewerbe, Kunst, Industrie etc. zu schaffen und zu fördern.

3. Die Civilisation hat namentlich als Gewerbetheorie die Aufgabe, den Menschen zu ermöglichen, sich Kenntnisse und Geschicklichkeiten zu erwerben und es so einzurichten, dass der Einzelne jene Kenntnisse und Geschicklichkeiten auch ausüben könne, welche er sich zum Zwecke seines Fortkommens und Schaffens angeeignet hat; sie hat dem Müßiggang entgegenzuwirken, die Zahl der Müßiggänger zu vermindern und unschädlich zu machen. Glücklich ist die Gesellschaft, die keine Müßiggänger hat, wo der wahre Geist der Arbeit alle beseelt, nämlich der Trieb nach Ausübung unserer Naturanlagen zum Zwecke genugthuender Selbsterhaltung, wo alle Mitglieder Arbeiter sind in dem Sinne, unermüdlich und methodisch an der Aufrichtung des Gemeinwohles zu arbeiten. „Nur durch das Thun werden wir tüchtig und wird die vernunftgemäße That zuerst durch Sitte und Gesetz von der Umgebung veranlasst, um schließlich unsere eigene freigewollte zu werden.“

4. Damit die Menschen sich aber auch des Lebens freuen, nicht nur Pflichten erfüllen und arbeiten, sondern auch Ruhe, Erheiterung, ja Vergnügen finden, wird die Civilisation auch Einrichtungen und Anstalten fördern, welche Bequemlichkeit, Verschönerung und Erheiterung des Lebens, Unterhaltungen zu bieten streben, welche Lebensfreude und Liebe zum Leben, Liebe, Wohlwollen und Wohlthun zu und unter den Menschen, ja wahre und reine Glückseligkeit gewähren.

Die Civilisation wird ferner auch solche Anstalten und Einrichtungen fördern oder selbst ins Leben rufen, wo auch den Gebrechlichkeiten der Menschen, seien es Krankheiten, allerlei Unfälle und Alterschwäche etc., Hilfe gebracht wird, dass der Mensch, der wesensgemäß lebt und arbeitet, auch beruhigt und getröstet, voll guter Hoffnung ohne Furcht und Zagen der Zukunft entgegenschauen und leben kann.

5. Dazu gehören aber auch Mittel, der Wohlstand. Die Civilisation wird daher auch bedacht sein, dass sowohl im engeren

Kreise der Familie als auch in der großen Gesellschaft jener Wohlstand erreicht wird, welcher Noth ausschließt und die Menschen glücklich leben lässt; sie wird daher solche finanzielle und national-ökonomische Einrichtungen fördern und sichern, welche den Nationalwohlstand zu begründen und zu erhalten geeignet sind und auch dem Einzelnen es möglich machen, sicheres Eigenthum zu erwerben und darüber selbständig zu verfügen.

6. Es hat sich daher auch die Civilisation mit der Eigenthumsfrage zu beschäftigen, deren richtige Lösung anzustreben.

Im II. Theil ist die Eigenthumsfrage vom Standpunkte des Einzelmenschen — nach der Individualitätsnatur des Menschen — betrachtet und gezeigt worden, dass die Individualitätsnatur des Menschen auch individuelle dauernde Verhältnisse zu bestimmten Sachgütern oder *Privateigenthum* erfordert.

Privatbesitz und Privaterwerb müssen aber wegen der Individualitätsnatur des Menschen die Rücksicht auf die gleiche Bedürftigkeit aller Menschen und daraus folgende Recht aller Menschen auf Aneignung von Sachgütern in sich aufnehmen. Der *Communismus* ist sittlich nur zulässig, wo er selbst ein individuelles Verhältnis ist; aber bei ihm als Zwangsinstitution könnte sich die freie individuelle Bethätigung in Arbeit und Genuss nicht geltend machen. Diese gehört aber zur Erhaltung und Förderung der Menschheit; ihre Niederdrückung drückt die geistige Lebendigkeit selbst nieder.

Ich will nun das, was ich im II. Theil über die Entstehung des Eigenthums durchgeführt habe, ergänzen und erweitern, soweit es eben die Civilisation in Bezug auf das sociale Zusammenleben der Menschen erfordert. Will man ganz auf den Ursprung zurückgehen, so muss man zuerst fragen, woher kommen denn die Sachen (die Naturgegenstände), welche den Gegenstand des Eigenthums bilden? Darauf kann nur geantwortet werden, sie finden sich eben geschaffen, also anders gesagt, sie sind ein [illegible]schenk des Schöpfers, gehörten sonach keinem einzelnen [illegible]schen, sondern waren für alle bestimmt. Es war also eine [illegible]tive Gütergemeinschaft, das heißt: an und für sich hatte [illegible] Mensch vermöge seiner Natur ein wirkliches Recht auf [illegible] welche Güter der Natur; er musste es sich erst erwerben. [illegible] weiter die Frage: Wodurch wird aber dieses Recht [illegible] Die Antwort lautet: Durch *Arbeit*, indem der Einzel-

mensch durch freithätige Handlungsweise so auf eine Sache, die bis dahin noch niemand gehörte, verändernd und gestaltend einwirkte, dass sie dadurch das von ihm erdachte Gepräge erhielt und so sein wurde. Nicht ohne Grund heißt es daher vom Schöpfer, dass er dem Menschen gesagt habe: „Im Schweiße des Angesichtes musst du dir dein Brot verdienen!“ Die übrigen Menschen sahen dieses und erkannten die gemachte Erwerbung an; und als sie sich gesellig miteinander verbanden, trafen sie weitere Vereinbarungen und schlossen auch Verträge, in denen das erworbene Eigenthumsrecht gesichert wurde.

Wenn nun nichts Herrenloses mehr zu occupieren ist, so muss doch der Privatbesitz allgemein zugänglich gemacht werden, aber so, dass die Tugenden der Thätigkeit, des Wohlwollens und der praktischen Verständigkeit hiebei leitend sind.

Dieses geschieht dadurch, dass die von früher her Besitzenden den Nichtbesitzenden Gelegenheit geben, durch ihre Thätigkeit an Sachgütern neue oder vermehrte Brauchbarkeiten hervorzubringen (nützliche Arbeit) und als Entgelt dafür in den Besitz von Privateigenthum zu gelangen (Arbeitsverdienst). Der Einzelne muss nämlich wirklich productiv sein, das heißt durch den Factor der Arbeit mehr Brauchbarkeiten an Sachgütern hervorbringen, als er zur eigenen Existenz verbraucht, damit er mit seinem Überschusse noch anderen dienen kann gegen Ergänzung seiner leiblichen oder geistigen Bedürfnisse durch Leistungen ihrerseits. Umgekehrt müssen die nicht unmittelbar materiell Producierenden auch in ihrem Berufe mit einem Überschusse productiv sein, um gegen denselben die erforderlichen materiellen Güter einzutauschen, sie müssen den anderen etwas für diese Wertvolles leisten. Die Einzelnen verhalten sich daher gebend und empfangend.

Die Rücksicht der Besitzenden auf die Nichtbesitzenden darf aber nicht zum Socialismus als Zwangsordnung führen oder zu der sogenannten Organisation der Arbeit, als Centralleitung aller Production und Consumtion von rechtswegen; denn dadurch würde die freie Bewegung unterdrückt. Das kann nur in kleineren, individuell dazu gestimmten Gemeinschaften, und zwar zeitweilig vorkommen. Für das thätige Wohlwollen bleibt eine schöne Aufgabe, die Rücksicht zwischen Besitzenden und erst Erwerbenden in jenen Fällen auszugleichen, wo Arbeit nicht sogleich eingesetzt werden kann oder nicht ausreicht. Dieses Wohlwollen bethätigt

sich nicht bloß durch gelegentliche hilfreiche Aufmerksamkeiten, sondern durch regelmäßiges Zuhandgehen bei unverschuldeter Hilflosigkeit, aber auch bei verschuldeter, zu etwaiger Aufraffung und Besserung etc. und äußert sich besonders dadurch, dass man von dem, was man an Gütern, Muße etc. selbst hat, gerne Opfer bringt, falls andere überhaupt oder unter besonderen Umständen einen besseren Gebrauch davon machen können (helfende Liebe). Bei dem Gange der Erwerbung, Erhaltung, Vermehrung und Überlassung von Eigenthum ergeben sich aber auch Thatsachen, die nicht in der Arbeit des Erwerbenden allein und unmittelbar ihren Grund haben, sondern in Umständen, die wir darum wunderbar nennen, weil wir den Grund davon im Fügen oder Zulassen einer höheren als der menschlichen Kraft suchen müssen. Es offenbart sich hierin gar oft die göttliche Vorsehung, schenkend und strafend und prüfend. Es werden Güter gewonnen, es werden Güter verloren, es werden Besitze auch herrenlos und fallen der Gesellschaft wieder anheim, über welche dann das Gesetz und die oberste Auctorität der Gesellschaft verfügt.

Werfen wir einen Rückblick auf das in diesem III. Abschnitt Behandelte, so sehen wir, wie viele Einzelheiten wieder mit ihren Einzelheiten klar und deutlich zu bestimmen, wie dieselben dann ihrem Verhältnisse entsprechend geordnet aneinanderzureihen sind, wie alles nicht Vereinbare auszuscheiden ist; wir sehen, wie das „gesellige sich Vereinen“ der Menschen ganz nach dem Verhältnisse der Einordnung zustande kommt und nur bestehen kann, was die Civilisation für mannigfache, schwere und umfangreiche Aufgaben hat, wie jeder Verstoß gegen die Gesetze der Einordnung die folgenreichsten Verirrungen veranlasst, die nur beseitigt werden können durch das Zurückgehen auf die richtige Erkenntnis und Anwendung der Gesetze der Einordnung.

Die Civilisation, welche in der soeben bezeichneten Weise nach dem Verhältnisse der Einordnung vorgeht und fortschreitet, erhält aber ihre geordnete Gliederung und ihre Weise und Auctorität im Staate, wo die einzelnen Menschen und Gesellschaften einem Ganzen eingefügt sind.

IV.
Das Verhältnis der Einordnung (Subalternation) als Staatengesetz.

„Gemeinsame Hilf' und gemeinsame Noth
Hat Reiche und Staaten gegründet;
Der Mensch ist ein Einsamer nur im Tod,
Doch Leben und Streben verbündet."
Grillparzer.

„Die Gesellschaft, als eine einheitliche Verwaltung benöthigende Sondergruppe, ist die vereinzelte, aber für das Ganze schaffende Kraft; sie baut den Staat auf, der um ihretwillen da ist und der den Einzelnen zu schützen hat."

Der Staat, als die einheitlich organisierte Verwaltung der Gesellschaft, steht weder außer noch über ihr, sondern ist die deren Gedeihen erhaltende Kraft; an ihn ergeht der Auftrag, die Gesellschaft bestmöglich auszubauen; denn deren Vortrefflichkeit ist seine eigene Vortrefflichkeit. Zu den Staatszwecken gehört die allgemeine Wohlfahrt mit. „Durch die Malträtierung der Glieder leidet das Haupt und mit den Hieben, die sie auf das Haupt führen, schlagen sie sich selbst."

„Nicht in der Tendenz zu endloser Ausdehnung, sondern an sich selbst, in der friedlichen Thätigkeit, der vernunftgemäßen Gestaltung der inneren Verhältnisse findet der Staat seine wahrhafte Aufgabe."

„Der Staat ist glücklich, wenn die einzelnen Bürger glücklich sind."

Um der Aufgabe des vorliegenden Themas nachzukommen, wollen wir handeln von:

1. der Entstehung und Bildung des Staates,
2. von dem Wesen, Begriffe und Zwecke des Staates,
3. von der staatlichen Auctorität,
4. von den Aufgaben des Staates und deren Lösung.

1. Entstehung und Bildung des Staates.

Kein Staat ist auf dem abstracten Wege — auf dem Wege bloßer wissenschaftlicher Ableitung — entstanden, sondern es sind alle Staaten auf concretem Wege — auf dem Wege von Thatsachen — geworden, und sind bestanden, wenn sie auf sittlicher

Grundlage gegründet waren und solange sie auf dieser Grundlage geblieben sind. Auch hat alles Recht zunächst auf Veranlassung besonderer Fälle mit einzelnen Begriffen und Sätzen angefangen, ist von diesen allmählich zu Grundsätzen — Urtheilen — aufgestiegen, hat sich endlich zu einem systematisch verbundenen Ganzen erhoben.

Die Vernunftgründe, aus welchen sich die Entstehung des Staates überhaupt ableiten lassen, bestehen α) in der Vervielfältigung der Familien und Gemeinden auf einem bestimmten Territorium, β) in der gesellschaftlichen Verbindung, in welcher diese Familien und Gemeinden miteinander bleiben, und γ) in der Nothwendigkeit des Rechtsschutzes und der Handhabung der Gerechtigkeit, welche aus jener gesellschaftlichen Verbindung vieler Familien und Gemeinden miteinander auf jenem Territorium erfolgt.

Der thatsächliche Grund dagegen, auf welchem die Existenz dieses oder jenes Staates beruht, ist immer eine Thatsache, die als solche der Geschichte anheimfällt, und diese Thatsachen sind nach dem Zeugnisse der Geschichte verschiedener Art. Es wäre nun die weitere Aufgabe, an der Hand der Geschichte von den ältesten Zeiten angefangen die Entstehung und Ausbildung aller einzelnen Staaten zu verfolgen. In Anbetracht des vorliegenden Themas würde diese Arbeit zu weit führen und muss dieselbe dem Studium der Geschichte überlassen werden. Man würde zur Einsicht geführt werden, dass diese Entstehung und Bildung der Staaten ganz nach dem Urtheilsverhältnisse der Einordnung erfolgt ist und erfolgt.

Um aber doch Beispiele dafür vorzuführen, will ich — in möglichster Kürze — die Entstehung eines monarchischen, altehrwürdigen und eines republikanischen, neuen Staates betrachten, nämlich des österreichisch-ungarischen Reiches und der nordamerikanischen Union.

An das kleine Stammland Niederösterreich sind nach und nach Steiermark, Oberösterreich, Kärnten, Krain, Tirol etc. angereiht und successive das sogenannte Inner-Österreich gebildet worden. Während derselben Zeit sind auch Böhmen, Mähren, Schlesien etc. zum Reiche der böhmischen Krone vereinigt und ebenso das Ungarreich gegründet worden, bis endlich [illegible] alle diese grösseren Reiche zu Einem Ganzen vereinigt worden sind. Es hat lange gebraucht, bis es gelungen ist, diese Einzelreiche

harmonisch aneinander zu fügen, und zwar durch die unausgesetzte Thätigkeit des Regentenhauses als der staatlichen, einheitlichen Auctorität. Dieses Aneinanderfügen hat in neuer Zeit eine ganz eigene Form angenommen. Die Bewohner sehen mehr auf die Eigenthümlichkeiten ihrer Stammverwandtschaft (Nationalität) als auf die geographischen Grenzen und haben das Bestreben, diese Eigenthümlichkeiten ihrer Stammverwandtschaft zur möglichst ausgedehnten Geltung zu bringen. Der Weg dazu ist aber wieder nur nach dem Verhältnisse der Einordnung der Weg der gegenseitigen Verständigung (des Ausgleiches). Es treten zunächst einzelne hervorragende Vertreter der einzelnen Nationen zur Berathung zusammen, einigen sich bezüglich der wichtigsten Forderungen; die Ergebnisse dieser Berathung werden dann größeren Berathungskörpern vorgelegt, in allen Einzelheiten durchberathen und zum Beschlusse erhoben. Da es bei diesen Berathungen Dinge gibt, die besprechbar sind und die Gemüther erregen, so darf man durch die mitunter stürmischen Vorgänge nicht irre und hoffnungslos werden; denn solange man folgerichtig nach dem Urtheilsverhältnisse der Einordnung vorgeht, solange man auf sittlicher und rechtlicher Grundlage bleibt, die oberste Staatsauctorität ehret und mit ihr in vollster Eintracht bleibt, auf das Walten einer höheren Macht vertraut, muss das angestrebte Ziel erreicht werden, das ja dann wieder erweiterungsfähig ist. Der Kampf wird enden (die „O“ aufhören), an seine Stelle wird ein Wetteifer im Schaffen von Werthvollem treten (schöne „I“ für ein neues „A“). Die einzelnen Nationen bedürfen einander und ergänzen sich durch ihre gegenseitigen Vorzüge.

Ähnlich ist der Bildungsgang der noch jungen nordamerikanischen Union. Es sind erst nach und nach einzelne Städte gegründet worden, um diese haben sich Menschen in engeren und dann auch in weiteren Kreisen angesammelt. Diese haben dann kleinere Staaten gegründet, die noch untereinander unabhängig und vom Mutterlande — England — abhängig waren. Mehrere derselben haben sich dann enger aneinander geschlossen, haben sich gemeinsame Staatseinrichtungen gegeben, sich vom Mutterlande für immer unabhängig gemacht, die Union unter der staatlichen Auctorität eines gewählten Präsidenten gegründet. Nach und nach haben sich neben der Union wieder einzelne kleine Staaten gebildet und haben, wenn sie schon imstande waren, die

Bedingungen zu erfüllen, um Einordnung in die Union sich beworben. Doch sind auch für den Bestand der Union schwere Kämpfe nicht ausgeblieben; durch deren Besiegung hat die Union an Ausdehnung und innerer Festigkeit gewonnen — und wird bestehen, solange sie auf diesem Wege, auf sittlicher und rechtlicher Grundlage bleibt, die staatliche Auctorität ehrt und auf Gott vertraut.

2. Zweck, Wesen und Begriff des Staates.

Aus der Betrachtung der Art der Entstehung und Ausbildung des Staates ergibt sich die Antwort nach dem Zwecke, Wesen und Begriffe des Staates. Der oberste Zweck des Staates ist Rechtsschutz; der Staat ist daher wesentlich Rechtsgesellschaft und zu definieren als eine Gesellschaft, welche zu dem Zwecke gegründet ist, dass die Rechte aller seiner Mitglieder geschützt und die Gerechtigkeit in Bezug auf alle Mitglieder gehandhabt werde. Er verfolgt den Zweck der Verwirklichung des Rechtsgesetzes oder Begründung und Handhabung des Rechtszustandes, d. h. eines Zustandes, worin jedem die freie Ausübung seiner Rechte gesichert ist.

Da das Gesetz die Grenzbestimmung zwischen Pflicht und Recht ist, so werden auf dem Wege der Gesetzgebung auch die Rechte eigentlich zu dem bestimmten Ausdrucke gebracht.

Es hat jeder Mensch sowohl an und für sich — als einzelne Person — Pflichten zu erfüllen, als auch als Mitglied der Gesellschaft gegenüber den übrigen Menschen; es muss ihm daher die Möglichkeit gesichert sein, diese Pflichten zu erfüllen, und es muss gleichzeitig diese Möglichkeit jedem anderen als Person und Mitglied der Gesellschaft gesichert sein.

In dieser Möglichkeitsbestimmung und Sicherung derselben liegt ein Entstehungsgrund des Rechtes und Gesetzes und in der richtigen Feststellung derselben die Vortrefflichkeit der Gesetze, die Klarheit und Bestimmtheit der Rechte.

Die größten Wohlthäter der Menschheit waren und sind die Gesetzgeber, wurden auch immer besonders hoch geehrt, sind in der Geschichte verewigt. Es waren hochbegabte, edel angelegte, für das Gemeinwohl fühlende und denkende Männer von kräftigem Willen und fester Gesinnungstüchtigkeit, welche erkannten, was Recht ist und aussprachen, in welcher Gesetzesform das Recht zu fassen und zu handhaben ist.

Sehen wir kurz den Hergang an!

Es begann nun die Gesetzgebung etc. bei und von diesen Einzelnen; diese wussten dann die geistig und gemüthlich Hervorragenderen der Gesellschaft für ihre Ansichten zu gewinnen, und diese zusammen wieder durch ihr Ansehen auf die übrigen Mitglieder der Gesellschaft einzuwirken und zur Annahme der Gesetze etc. zu bestimmen — ein Gang, der ganz nach dem Verhältnisse der Einordnung erfolgt. Damit diese Gesetze und Rechte volle Achtung erhielten und unbedingt gehandhabt werden konnten, war noch eine höhere Auctorität nothwendig, welche denselben die höhere Weihe verlieh — sie „sanctionierte“. Dieser Vorgang der Gesetzgebung findet auch heutzutage noch statt, nur in einer mehr ausgebildeten Form, in den sogenannten „gesetzgebenden Körperschaften“. Es sind zunächst gar nur ein Einzelner oder doch nur sehr wenige, welche das Gesetz entwerfen — modern gesagt „die Vorlage“ ausarbeiten; dann kommt sie in einen kleineren, eigens dazu zusammengesetzten Kreisausschuss oder Comité genannt — wird hier in allen Einzelheiten durchberathen, ergänzt etc. und gelangt endlich in den großen gesetzgebenden Körper zur Beschlussfassung. Es muss aber seine Weihe und Geltung erst erhalten durch die Sanctionierung von der höchsten Staatsauctorität; der Staat bedarf daher auch zuletzt und zuerst einer staatlichen Auctorität.

3. Die oberste staatliche Auctorität.

Zum Verständnisse sollen nur einige diesbezügliche Begriffe vorausgeschickt werden, und zwar über: Staatsgewalt, Staatsoberhaupt, Staatsform und Staatsverfassung.

Unter Staatsgewalt ist das Recht zu verstehen, den Staatszweck zu verwirklichen (zu realisieren), das ist, die Rechte aller zu schützen, die Gerechtigkeit zu handhaben und dadurch das allgemeine Wohl zu fördern. Als Staatsoberhaupt ist die Persönlichkeit zu verstehen, welche mit dem gedachten Rechte ausgestattet ist. Im Verhältnisse zum Staatsoberhaupte heißt die Gesammtheit der Bürger das Volk (populus) und werden die einzelnen Bürger Unterthanen genannt.

Unter Staatsform ist die Art und Weise zu verstehen, wie in einem Staate die Staatsgewalt thatsächlich repräsentiert, sowie die Art und Weise, wie sie demgemäß ausgeübt wird.

Die Staatsverfassung ist dann endlich der Inbegriff (das Ganze) aller jener Staatsgrundsätze, wodurch die Staatsform

begründet und bedingt ist. Es werden die Begriffe „Staatsform und Staatsverfassung“ häufig füreinander gesetzt; sie sind aber bei einzelnen Staaten verschieden. Es soll nun weiter verfolgt werden, wie sich die Staatsgewalt im allgemeinen geschichtlich entwickelt hat und an ein bestimmtes Staatsoberhaupt gelangt ist.

Da die erste Gesellschaftsgruppe die Familie ist, so geschah es auch, dass das Oberhaupt der Familie, der Stammvater von den übrigen Familien zugleich als höchstes Oberhaupt anerkannt und ihm die Schlichtung der Rechtsstreitigkeiten, die Bestrafung der Rechtsverletzungen etc. überlassen wurde. Mit dem Zunehmen der Familien breiteten sich die Menschen mehr auf dem Territorium aus, es bildeten sich Gemeinden etc. Diese hatten auch ihre Rechtsbedürfnisse; sie erkannten nun entweder auch das Oberhaupt der schon als obersten anerkannten Familie als ihre oberste Auctorität an, oder sie entschieden sich für solche hochbegabte Männer, welche sich dadurch hervorthaten, dass sie in den meisten Fällen die besten Rathschläge zu ertheilen wussten, Gesetze erwirken halfen oder selbst schufen, Entscheidungen trafen und diese auch verwirklichen halfen, oder auch so mächtig waren, dass sie Familien und Gemeinden gegen innere und äußere Feinde zu schützen imstande waren. Wenn nun diese Männer dafür sorgten, dass sich das von ihnen erworbene und verdiente Ansehen, der Sinn für das Gemeinwohl für Sitte und Recht und für feste Handhabung von Gerechtigkeit auch in ihren Nachkommen rege forterhielt, so ist man auch gerne bei der einmal erwählten Familie als oberster Auctorität geblieben, um den Staat vor Erschütterungen zu schützen und bleibende Rechtszustände zu sichern — und so ist die Erbfolge zugleich zum Besitze des Rechtes geworden.

In dem Entwicklungsgange bis zum Werden einer bestimmten Staatsform mit einer bestimmten höchsten Staatsauctorität treten aber auch Ereignisse ein, die zunächst wunderbar erscheinen und selbst bei eingehender Prüfung wunderbar sind, daher auf eine höhere Macht zurückgeführt werden müssen. Es sind Ereignisse, deren Vorbereitung, Herbeiführung und Gestaltung entscheidend ist, die aber von menschlicher Thätigkeit nicht vorbereitet sind, ja nicht vorbereitet werden konnten, weil sie menschliches Kennen und Können übersteigen, die einen höheren, ja höchsten Grund — göttliches Zulassen, Fügen und Walten — voraussetzen. So [illegible] dass für die Verhältnisse, die ganz eigenthümlich

geworden sind, sich im rechten Augenblicke der richtige Mann findet, der nach höheren Plänen in einer Weise ordnet, wie die Menschen es nicht gedacht hätten, dass dieser Mann auch anerkannt wird, dass er zugleich Anordnungen trifft, dass die von ihm hergestellte Ordnung eine bleibende wird, dass seine Nachkommen im gleichen Sinne für das Wohl des anvertrauten Staates und seiner Bürger wirken, von diesen daher hoch geehrt als von Gott auserwählte oberste staatliche Auctorität mit der Würde höherer Weihe erkannt werden, wie eben Glaube und Vertrauen auf Gottes weise Fügung die Gemüther kräftig und selig macht. So ist daher die Wahrheit: „Omnis potestas a Deo“ und die Staatsauctorität von Gottes Gnaden dem Träger derselben verliehen. In der erblichen Monarchie wird das Wohl der Fürstenwürde mit dem Wohle des Staates unzertrennlich verbunden.

Um dieses an einem Beispiele und zugleich zu zeigen, welche Erschütterungen des Staates eintraten, wenn ein Wechsel in der Regentenfamilie eintrat, wollen wir einen kurzen Blick wieder auf das altehrwürdige österreichisch-ungarische Reich lenken. Die Länder an der Ostgrenze des deutschen Reiches waren durch die Einfälle von Osten her sehr verwüstet; da hatte der deutsche Kaiser Otto in Leopold dem Erlauchten aus der Familie der Babenberger den hochgebildeten, edel denkenden und kraftvollen Mann erkannt, der geeignet schien, die Grenze zu bewachen und gegen weitere Einfälle zu schützen, wieder im Innern geordnete Verhältnisse herzustellen und Cultur anzubahnen. Es ist auch ausgiebig geschehen, aber zur vollen Durchführung und Erhaltung genügte die Dauer Eines Menschenlebens nicht; es gehörte eine längere, bleibende, gleichgerichtete Thätigkeit dazu. Es haben daher die deutschen Kaiser die oberste Leitung unseres Stammlandes der Familie der Babenberger übertragen, sie zu den Staatsoberhäuptern gemacht. Es würde die Grenzen dieses Themas wieder überschreiten, wenn ich im einzelnen ausführen würde, was diese Familie alles gethan und erreicht hat und wie glücklich sich die Bewohner unter ihrer Leitung fühlten. Aber welche Stürme brachen herein, als die Familie der Babenberger ausstarb! Die Geschichte der Interregnums weiß davon zu erzählen, die um so trauriger verlief, als auch im deutschen Reiche ein noch traurigeres Interregnum war. Da zeigte sich recht auffallend das Eingreifen der göttlichen Vorsehung; diese hatte die Wahl zum deutschen Kaiser auf einen Mann gelenkt, der aus einem alten

Geschlechte abstammte, der zwar nicht reich an irdischem Besitze, aber reich an Seelenadel und thatkräftig war, nämlich auf Rudolf von Habsburg. Dieser stellte Ordnung im deutschen Reiche und in den österreichischen Ländern her, indem er kraft seiner kaiserlichen Macht und nach Einholung der „Willebriefe" der Reichsfürsten die österreichischen Länder seinen Söhnen und deren Nachfolgern übertrug, damit sie unter dem kaiserlichen Schutze selbst als oberste Staatsauctorität die österreichischen Länder regierten und vermehrten — was auch, wie die Geschichte zeigt, wunderbar gelungen ist. Es trat aber wieder eine Erschütterung ein, als die Familie Habsburg im Mannesstamme erlosch. Die Vorsehung hatte aber den letzten weiblichen Sprossen, nämlich Maria Theresia, derart begnadet, dass sie nicht nur das Reich beisammen erhielt, sondern den Grund zu dessen Neugestaltung legte, und hatte es ferner gefügt, dass sie sich mit dem Sprossen aus einem anderen erlauchten, stammverwandten Geschlechte — Franz Stephan von Lothringen — verband.

Machen wir einen Rückblick, so können wir sehen, wie sich zu den einzelnen Menschenthaten die Fügungen der Vorsehung zu einem Ganzen einordnen und wie durch menschliches und göttliches Zusammenwirken Staat, Gesetz, Recht, staatliche Auctorität geworden sind, werden und bestehen, wie in ihrem gut eingeordneten Verhältnisse Wohlfahrt und Gedeihen liegen.

Was die Ausübung der Staatsgewalt betrifft, so ist dieselbe beschränkt durch die Gesetze der Sitte und des Rechtes, durch die Würde der Menschheit, nämlich durch die natürlichen und wohlerworbenen Rechte der Staatsangehörigen und endlich durch das Wesen des Staatszweckes.

Am besten entspricht jene Ausübung, wo es den Einzelnen möglich ist, ihre Ansichten und Wünsche frei zu äußern, die Gesetze durch die besterkannten Vertreter zu berathen und zum Beschlusse zu erheben, wo dann dieselben von der obersten Staatsauctorität erwogen und gewürdigt werden und die Weihe der Sanction erhalten, und endlich das Vertrauen auf Gottes Segen lebendig bleibt — kurz alles schon einander eingeordnet ist.

4. Aufgaben des Staates und deren Lösung.

A. In Bezug auf die Hauptaufgabe des Staates hat die Staatsauctorität:

1. Das Recht, zu diesem Zwecke die erforderlichen Normen vorzuschreiben, welche alle Staatsangehörigen zu beobachten verpflichtet sind. Diese allgemeinen Normen sind aber die Gesetze, und die Gewalt dazu heißt gesetzgebende Gewalt.

2. Das Recht und die Gewalt, die Gesetze in die Praxis einzuführen und zu überwachen. Diese Gewalt heißt die vollziehende Gewalt.

3. Das Recht und die Gewalt, autoritativ nach den bestehenden Gesetzen Recht zu sprechen, die Gerechtigkeit zu handhaben, Verbrechen hintanzuhalten und zu vermindern und Verbrechen zu strafen. Diese Gewalt heißt die richterliche Gewalt.

Es sind die wesentlichen Momente der Staatsgewalt die gesetzgebende — vollziehende — und richterliche Gewalt. Diese Gewalten sind wohl voneinander zu unterscheiden, werden getrennt voneinander nach ihrer Art im einzelnen ausgeübt, haben aber ihre Einheit in der obersten staatlichen Auctorität, welche auch über alle zur Ausübung dieser Gewalten erforderlichen Machtmittel, als Beamte, Polizei, Militär, Finanzen etc. verfügt.

B. In Bezug auf die entferntere Aufgabe, nämlich in Bezug auf die Wohlfahrt des ganzen Staates und der einzelnen Bürger hat der Staat das Recht und die Pflicht, alles zu verwirklichen, was Humanität und Civilisation erfordern. Ihm obliegt es als der dazu berufenen Macht, während es einzelne Gesellschaften freiwillig thun. Es unterstehen ihm daher die Gesellschaften, welche dem Staate eingeordnet sind.

C. Es besteht aber nicht bloß Ein Staat, sondern mehrere nebeneinander, sie stehen auch in Wechselverkehr miteinander; jeder hat seine eigenen Hoheitsrechte gegenüber den anderen Staaten zu wahren und die Hoheitsrechte jedes anderen zu achten; es ist der Wechselverkehr zwischen den Staaten zu regeln. Hierin besteht die Aufgabe des Völkerrechtes.

V.

Das Verhältnis der Einordnung (Subalternation) als Völkergesetz.

Wir sehen, wie sich nach dem Verhältnisse der Einordnung die einzelnen Menschen gestalten, wie sich die Einzelnen zu Gesellschaften vereinigen, wie sich die Gesellschaften zu einem geordneten Ganzen — dem Staate — verbinden; es gibt aber zuletzt doch nur Eine Körperschaft, diese wird durch die Vereinigung aller Völker gebildet und besteht in der gut geordneten Völkergemeinschaft.

Ein Beispiel davon gibt die katholische Kirche, welche alle Völker der Erde umfasst und die Gemeinschaft mit dem Jenseits.

Ich will die Darlegung bezüglich des Völkerrechtes mit einem Einzelfalle einleiten, und zwar mit dem Zustandekommen der pragmatischen Sanction in Österreich.

Mit dem Tode Kaiser Karl VI. stand Österreich vor einem entscheidenden Wendepunkte. Kaiser Karl VI. beschäftigte sich eingehend mit dem Grundgedanken, für die einheitliche Erhaltung der österreichischen Länder nach seinem Tode durch ein Grundgesetz zu sorgen, und zwar auf einer dauernden Grundlage. Als solche erkannte er die „pragmatische Sanction.“ Er berieth sich zunächst mit seinen, ihm nahestehenden Räthen, es wurde dieselbe in die gesetzliche Form gebracht und durch des Kaisers Allerhöchste Auctorität bekräftigt. Es hatte aber dieses Grundgesetz doch noch das Merkmal des „Einzelnen“, des „Persönlichen“. Der Kaiser legte dieses Grundgesetz den Ständen — den gesetzlichen Vertretern der einzelnen Ländertheile des Reiches — zur Anerkennung vor und sanctionierte die Beschlüsse derselben; dadurch wurde die pragmatische Sanction zum „Staatsgesetze“. Der Kaiser legte aber die pragmatische Sanction auf dem Wege der diplomatischen Verhandlungen auch den Oberhäuptern der übrigen Staaten zur Anerkennung vor und dadurch wurde dieselbe ein „Völkerrechtlicher Vertrag“.

1. Das Volk als Einzelperson.

Der Begriff „Volk“ kann in verschiedenem Sinne genommen werden: im geschichtlichen Sinne ist Volk die Gesammtheit aller welche gemeinschaftliche Abkunft und Sprache haben; im

staatlichen Sinne ist Volk die Gesammtheit der Bürger im Verhältnisse zum Staatsoberhaupte; im völkerrechtlichen Sinne heißt ein Staat im Verhältnisse zu Auswärtigen ein Volk, und in diesem Sinne ist hier von Volk die Rede.

Nach dieser Bedeutung ist daher jedes Volk im Verhältnisse zu allen Auswärtigen als eine unabhängige (ideale) Person aufzufassen, also in diesem Sinne ein „Einzelnes“.

Es hat daher ein Volk das Recht zu allen Handlungen, wodurch es seine Unabhängigkeit so gebraucht, dass dabei die Unabhängigkeit jedes Auswärtigen nach einem allgemeinen Gesetze bestehen kann; es ist daher jede Handlung eines Volkes rechtmäßig, die nach einer Maxime geschieht, durch deren Allgemeinheit die Selbständigkeit aller übrigen nicht unmöglich gemacht wird. Das Urrecht eines Volkes ist daher das Recht auf politische Persönlichkeit, das heißt: das Recht, als besonderer Staat für sich zu bestehen und die Anerkennung dieser Selbstständigkeit, welche die Würde des Volkes ausmacht, von allen Auswärtigen zu fordern. Hieraus folgt weiter die natürliche Gleichheit der Völker, welche darin besteht, dass kein Volk von dem anderen zu etwas verbunden werden kann, ohne dieses wechselseitig auf dieselbe Art auch verbinden zu können.

Die Thätigkeit eines Volkes besteht daher darin, sich ungestört zu bilden, zu entwickeln, zu befestigen, seine Wohlfahrt zu erwirken sowohl im Innern als im Verkehre mit anderen.

2. Die Völker in ihrem Verkehre, ihre gesetzliche und rechtliche Vereinigung zur Völkergemeinschaft.

Da jedes Volk selbständig ist, die Völker als solche keine gemeinsame Obermacht haben, so muss sich die Völkergemeinschaft erst nach und nach auf Grundlage von Thatsachen zu völkerrechtlichen Gesetzen und Rechten entwickeln und ausgestalten. Den Anfang dazu bilden Völkergebrauch, nämlich bloß vermuthete Einwilligungen von Völkern überhaupt, und dann insbesondere von gesitteten Völkern, dann Gewohnheitsrechte und stillschweigende Verträge.

Nach und nach folgen die ausdrücklich ausgesprochenen Verträge eines Staates mit einem anderen — sogenannte Verkehrverträge; diese können nur von derjenigen Person, welche den Staat gegen Auswärtige repräsentiert — den Regenten —

und auf die der Verfassung des Staates angemessene Weise giltig geschlossen werden. Die Völkerverträge können verschieden sein. Völkerverträge, welche nicht bloß einzelne vorübergehende Leistungen, sondern die Begründung eines dauernden Verhältnisses gegenseitiger Verpflichtungen zum Gegenstande haben, werden insbesondere Bündnisse genannt; diese können sich auch auf ein gemeinsames Verhalten gegenüber anderen Völkern beziehen, Friedens-, Neutralitäts-, Kriegsbündnisse, Handels-, Zollverträge etc. sein.

Das Volk hat die Aufgabe, seine Selbständigkeit etc. zu wahren. Es kann ein Volk nicht nur unmittelbar durch Verletzung der Rechte, die ihm als Ganzen zukommen, sondern auch mittelbar, in der Person seiner einzelnen Glieder, beleidigt werden. Der Staat hat daher die Aufgabe, für die Machtmittel zu sorgen, um jede Beleidigung abzuwehren oder die Wiederaufhebung des daraus entstandenen Schadens zu erzwingen, und hat die weitere Aufgabe und das Recht, diese Machtmittel, wenn es nöthig ist, anzuwenden — er hat das „Kriegsrecht“.

Der Vertrag, wodurch der Krieg zwischen zwei Völkern beendigt wird, heißt: „Friedensschluss“. Dieser kann auch auf Wunsch der kriegführenden Völker von einer dritten Macht vermittelt werden. Wenn man sieht, dass Kriege leicht entstehen können, dass noch zahlreiche Sonderströmungen bestehen, so erkennt man, dass die Vereinigung der Völker noch eine ziemlich lose ist. Aber es werden auf Veranlassung einzelne Verträge geschlossen, die nachfolgenden an die früheren angefügt, und ist die Zahl derselben zwischen mehreren Völkern größer geworden, so dass sie einer harmonischen Aneinanderreihung bedürfen, besonders wenn es sich auch um territoriale Macht- und Besitzverschiebungen handelt, so tritt dann eine größere Zahl von Staatenvertretungen zu einem sogenannten „Congresse“ zusammen, um die vereinzelten Staatenverhältnisse und die vereinzelten Verträge zu einem „Ganzen“ zusammenzufügen, das dann für alle Theilnehmenden bindend ist. Danach ist das Ideal des Staates die Bildung eines Reiches, wo Selbständigkeit des Einzelwesens mit der Wohlfahrt des Ganzen, empirische Gebundenheit und intellegible (vernünftige) Freiheit wohl verträglich vereinigt, wo die Tugenden der Wahrhaftigkeit und Gerechtigkeit die Grundpfeiler der sittlichen Ordnung sind — und das Ideal des Völkerverkehres ist, dass kein Staat, kein Volk seine Güter

und Producte dem Austausche mit anderen grundsätzlich verschließt, dass der Einzelne, obwohl einem bestimmten Staate angehörig, frei und sicher von Volk zu Volk ziehen kann unter dem Schutze eines internationalen Verkehrsrechtes, für dessen Aufrechthaltung alle Staaten gleiche Sorge tragen. Es ist dazu weder nöthig noch wünschenswert, dass eine Art von Universalstaat auf der Erde entstehe; denn die Existenz von einzelnen besonderen Staaten hat ihre bleibende berechtigte Grundlage an der formellen Ähnlichkeit der Denk-, Gefühls- und Willensart, welche besonderen Gruppen es stets wünschenswert machen werden, sich besonders eng zusammenzuschließen.

Schön und wahr ist dieses ausgesprochen in den am 11. März 1891 gesprochenen Worten der Allerhöchsten Thronrede: „In allen europäischen Staaten gibt sich das Verlangen nach friedlichem Nebeneinanderleben kund.“

Das Verhältnis der Einordnung ist daher auch das wahre Völkergesetz und es gelten des Dichters Worte:

„Nur in des Herzens heilig ernster Stille
Kann erst das Leben schöner sich gestalten,
Nur wo der Eintracht sanfte Geister walten,
Stärkt sich der Wille.

Eintracht und Liebe halten uns zusammen,
Wie auch im Wechsel steigt und fällt das Leben,
Aufwärts die Blicke! Kräftigt euer Streben,
Wahret die Flammen!“

Chr. Schultz.

Geht es nach diesen Grundsätzen, so wird das Menschenleben gewiss ein glückseliges.

Die Glückseligkeit ist aber ein wesentlicher Theil der Sittenlehre (Ethik, Moral).

Diese findet in den Gesetzen des Urtheilsverhältnisses der Einordnung die logische Begründung, wenn sie allen Menschen zuruft:

„Lernet einander ertragen!“

D. G. Morhof und sein Polyhistor.

Ein Beitrag
zur
Lehre vom Bildungswesen.

Von

Wenzel Eymer,
Professor am k. k. deutschen Staatsgymnasium in Budweis.

I.

Die lebhafte Bewegung der Geister, die mit dem Wiedererwachen der classischen Studien im 14. und 15. Jahrhundert ihren Weg von Italien aus genommen hatte, übte namentlich in Deutschland großen Einfluss auf die Entwicklung des geistigen Lebens und Schaffens. Dazu kam hier noch auf kirchlichem Gebiete die Reformation, die in ihrem Ursprunge auf das Forschen und eine tiefere Erfassung des in der Schrift niedergelegten geistigen Gutes gerichtet war. Man fasst die angedeutete Bewegung gewöhnlich unter dem Namen Humanismus zusammen. O. Willmann hat für dieselbe wohl treffend den Namen Renaissance[1]) gewählt, mit Rücksicht auf die gleiche Bezeichnung im Gebiete der Kunst. Ist ja auch hier eine antike Grundlage vorhanden und wie dort der Kunst, so wollte man hier dem Bildungswesen antike Stoffe und Ideen aneignen.

Diese Richtung geistiger Arbeit im weitesten Sinne erstreckt sich in das 17. Jahrhundert hinein und hat in der sogenannten Polymathie eine eigenartige Fortsetzung und Ausbildung gefunden. Im ganzen durchdringt diese aber noch ein antikes Element, hervorgerufen und gefördert durch die Kenntnis der alten Sprachen. Im 17. Jahrhundert trat die Bedeutung des Griechischen wieder vielfach zurück, dagegen stand das Sprechen, Schreiben und Dichten in lateinischer Sprache in voller Blüte. Das fari posse, die Eloquenz, war meist das höchste Ziel jener Bildung. Nicht nur die alten Römer in ihren Werken kennen zu lernen und zum geistigen Eigenthum zu machen, nein, es ihnen gleich zu

---

1) Willmann, Didaktik, I., S. 296.

thun, ja sie womöglich zu übertreffen strebte man, und es ist charakteristisch für diese Zeit, wenn sogar gelehrte Männer die Werke der Alten herabsetzen, so dass Morhof selbst sich zur Ehrenrettung eines Homer, Horaz u. a. veranlasst fühlt.[1])

Die lateinische Sprache herrschte und mit ihr die lateinischen Schulen, in denen das Memorieren und Erklären lateinischer Sätze aus der Logik und Rhetorik ein wesentliches Element des Unterrichtes bildete, während Geschichte, Arithmetik, Geometrie kaum berührt wurden, neuere Sprachen, Naturwissenschaften und selbst die Muttersprache keinen Platz fanden. Auch bei den Musikübungen, die durchaus einen kirchlichen Charakter hatten, sowie bei den religiösen Gesängen, Litaneien und Gebeten bediente man sich der lateinischen Sprache. Diese Herrschaft der lateinischen Sprache gründete sich auf das praktische Bedürfnis, diese Sprache mündlich und schriftlich handhaben zu können, ein Bedürfnis, das für jeden Gebildeten vorlag.

Aber das Zeitalter der Erfindungen und Entdeckungen hatte die Aufmerksamkeit auch auf ein anderes reales Gebiet des Wissens gelenkt. Die Entwicklung der modernen Sprachen, die Naturwissenschaften, die Mathematik und Physik pochten an die Thüren der lateinischen Schulen, und so finden wir schon im 16. Jahrhundert pädagogische Theorien, welche der Jugend neben den Sprachen auch die Sachen ins geistige Eigenthum vermitteln wollen. So sehr war man aber noch im Banne der lateinischen Sprache, dass man diese Vermittlung zunächst in und mit der lateinischen Sprache anstrebte und beides zu verbinden suchte, eine Richtung, die unter den namhafteren Vertretern der Pädagogik Anhänger fand und in den Sprachbüchern des Comenius ihren Höhepunkt erreichte.

Dieses Streben, eine gewisse Masse von realem Wissen zu bewältigen, was auch schon als Grundlage der Eloquenz wünschenswert erschien, ist in verschiedenen Werken versucht worden, welche die Zusammenfassung des Wissenswertesten im Sinne haben. Schon im 16. Jahrhundert hatte man hiefür die Namen Cyklopädie, Encyklopädie, neben denen sich später noch eine ganze Reihe anderer Namen findet, z. B.: Polymathie, Polyhistorie, Pansophie, Pankosmie, theatrum mundi, theatrum vitae u. a. m.[2])

---

[1]) Pol. I., 7, 1, 1.
[2]) Vgl. Willmann, I., S. 314.

Einzelne solcher Werke giengen darauf aus, die Methoden des Erkennens und Forschens aufzusuchen, so das große Werk des Baco von Verulam, die instauratio magna litterarum; andere wollen wieder Massen von Kenntnissen bewältigen und veranlassen dadurch neue Methoden, welche sich mit der Kunst des Lehrens und Lernens befassen. Hieher gehören u. a. die Versuche, die **ars mnemonica** neu zu beleben und zu Zwecken dieser umfassenden Bildungsmassen weiterzubilden. Darauf gehen aber auch die ersten Versuche einer rationellen „Lehrkunst" zurück, für welche wir im 17. Jahrhundert den Titel Didactica finden, der die Abkürzung von methodus didactica bildet, neben dem sich andere Namen bezeichnenderer Art finden, so: Rhadiomathia, obstetrix animorum[1]) u. a., mit denen die Polymathie und die Pansophie, die mit dem Lateinunterrichte Sachbelehrung verbindet, zusammenhängen. Hieher gehören die vielen methodischen Versuche des 16. und besonders des 17. Jahrhunderts. Man erfindet Universal- und Specialmethoden, wie am besten der Jugend das polymathische Wissen zu vermitteln wäre.

Aber daneben finden auch andere Richtungen des Bildungswesens Berücksichtigung, welche besonders im 17. Jahrhundert vielfach ins Auge gefasst wurden. Da gibt es eine ars conversandi, ars legendi, ars excerpendi, man gibt Regeln für den gelehrten Verkehr in der conversatio erudita, für das Reisen in den apodemica u. s. w. Bei einzelnen Männern wieder tritt eine Universalität in der Behandlung des Bildungswesens hervor, wie sie kaum später wieder erreicht worden ist.

Einer der Hauptvertreter dieser Richtung ist der einst vielgenannte und berühmte Polyhistor Daniel Georg Morhof.

---

[1]) Willmann, I., S. 75.

II.

D. G. Morhof war geboren zu Wismar in Mecklenburg am 6. Februar 1639. Sein Vater Joachim Morhof war Notar und Magistratssecretär. Seine Mutter Agnes, die Tochter eines angesehenen Kaufmannes, starb frühzeitig. Die Ausbildung des Knaben überwachte der Vater sorgfältig. [1]

Den ersten Unterricht in der lateinischen Sprache ertheilte ihm der Vater selbst und setzte ihn durch volle drei Jahre fort. In seiner Vaterstadt vollendete Morhof auch bis zum 14. Jahre den gewöhnlichen Schulcursus und machte in Sprachen, Geschichte, Rede- und stilistischen Übungen, aber auch in Mathematik, Geometrie und Geographie große Fortschritte.

Im 16. Jahre kam er an das königliche Pädagogium in Stettin. Diese Anstalt bezweckte die unmittelbare Vorbereitung zur Universität, indem dort encyklopädische Anleitungen zu den Facultätswissenschaften ertheilt wurden. Am meisten schloss sich Morhof hier seinem Lehrer Heinrich Schaev, später Rector des Gymnasiums in Thorn, an. Unter ihm absolvierte er die Mathematik, Physik und machte in der Poesie Fortschritte, indem er deutsche und lateinische Gedichte verfasste. Sein Wissenstrieb war groß, dazu kam eine starke Einbildungskraft, und so trieb Morhof hier Verschiedenes durcheinander, unter anderem auch hebräische Sprache und Jurisprudenz.

Im Jahre 1657 bezog er die Universität Rostock und widmete sich dem Studium der Rechte. Doch blieb ihm immer seine Neigung zur Polymathie und Poesie. In Rostock lehrte als Professor der Poesie Andreas Tscherning, ein Schüler Opitzens, welcher auf den poetischen Sinn Morhofs starken Einfluss übte. Auch wirkte dort J. Seb. Lauremberg,[2]) für welchen Morhof immer eine Vorliebe bewahrt hat.[3])

Im Jahre 1660 empfahl ihn ein komisches Gedicht auf einen Storch dem Herzog Gustav Adolf von Mecklenburg also, dass

---

[1]) Bemerkenswert ist dabei, dass der Knabe frühzeitig Carions Chronikon (eine allgemeine Weltgeschichte) las und viel musikalischen Unterricht genoss.

[2]) Willmann I., pag. 314.

[3]) Schon in Rostock schrieb Morhof verschiedene Abhandlungen, u. a. eine, die sehr charakteristisch für ihn ist: De iure morborum; in ihr wollte er, als recht vielseitig, Rechte und Medicin in einer Schrift umfassen.

er ihm die Professur der Poesie in Rostock, welche durch Tschernings Tod erledigt war, übertrug. Dieses Amt trat Morhof nach Erlangung des Magisteriums philosophiae mit einer Antrittsrede de genio poëtico an.

Zuvor unternahm er aber noch eine Reise nach Holland und England und hielt sich in der Bibliothek zu Oxford länger auf. Auf der Rückkehr erwarb er zu Franeker die juridische Doctorswürde durch eine Abhandlung de iure silentii. In Rostock hielt er öffentliche Vorlesungen über verschiedene Dichter, u. a. über Claudians Raub der Proserpina; privatim las er über juridische, rhetorische und poetische Materien. Das Polyhistorleben setzte er aber fort und schrieb über die verschiedenartigsten Stoffe. Bald verbreitete sich der Ruf seiner Gelehrsamkeit, und er wurde 1665 von Herzog Christian Albrecht von Holstein als Professor eloquentiae et poëseos an die neu gegründete Universität Kiel berufen.[1])

Bald erlangte er akademische Würden, war Decan und Prodecan der phil. Facultät. Die Rectorswürde erhielt er zum erstenmale 1669 und hielt dabei eine Inauguralrede de intemperantia in studiis. Dieses Ehrenamt bekleidete er noch in den Jahren 1677, 1685 und 1690.

Im Jahre 1670 unternahm er eine zweite Reise nach Holland und England zu wissenschaftlichen Zwecken. Er schloss und erneuerte Freundschaften und Bekanntschaften, darunter wohl die bedeutendsten waren mit J. Georg Graevius in Utrecht, einem hervorragenden Gelehrten auf dem Gebiete der Philologie, mit Johann Friedrich Gronov in Leyden und Nikolaus Heinsius im Haag. In London hielt ihn lange die britannische Gesellschaft der Wissenschaften fest, die als gründliche Erforscherin der Natur in jener Zeit die erste Stelle einnahm. Hier lernte er den Naturforscher Robert Boyle kennen.[2])

[1]) Die Eröffnung dieser Universität verherrlichte Morhof durch mehrere Oden auf die Kaiser Ferdinand III. und Leopold I., sowie auf die holsteinischen Herzöge.

[2]) Hier machte Morhof auch das Experiment, das er kurz zuvor in Holland von einem Weinhändler gesehen hatte, Trinkgläser durch den Klang der Stimme zu zerbrechen, worüber er später eine eigene Abhandlung „Epistola de scypho vitreo per certum vocis humanae sonum rupto, ad Johannem Danielem Majorem, professorem medicum Kiloniensem“, Kiel 1664. 4⁰, verfasste.

Ferner kam er in Verkehr mit dem hervorragenden Polyhistor Isak Voss, unter dessen Führung er die königl. Bibliothek besuchte, und wurde in die philosophische Classe der königl. Gesellschaft der Wissenschaften als Mitglied aufgenommen.[1])

Nach seiner Rückkehr verheiratete er sich mit Margaretha von Degingk, der Tochter eines Lübecker Senators. Von ihr hatte er vier Söhne, von denen der erste und dritte den Vater überlebten und einzelne Arbeiten desselben herausgaben. Im Jahre 1673 erhielt er auch die Professur der Geschichte, 1674 die Obsorge für die Universitätsprogramme, 1680 die Stelle des Oberbibliothekars.

Seinem akademischen Amte lag Morhof mit großer Pflichttreue ob; dies beweisen seine zahlreichen Vorlesungen, die er durch 25 Jahre über Poetik, Rhetorik, Geschichte und die gesammte Polymathie gehalten hat.

Morhof war ein starker Arbeiter und immer thätig, selbst bei Tische und auf der Reise. Sein Fleiß war staunenswert, sein Gedächtnis außerordentlich, er verließ sich darauf mitunter zu sehr. Seinem Charakter nach war er ein wahrhaft guter Mann, fromm und religiös gesinnt. Sein Wahlspruch lautete: „Pietate, candore, prudentia!“

Er stand mit zahlreichen Männern in wissenschaftlichem Verkehr, mit vielen hatte er dauernde Freundschaft geschlossen. Angesehen in der gelehrten Welt, geschätzt und geliebt in den Kreisen der Hochschule, erfreute sich Morhof allgemeiner Anerkennung. Aber sein unermüdliches Studium hatte die Körperkräfte erschöpft, der Tod seiner geliebten Gattin im Jahre 1687 verschlimmerte sein Leiden. Im Jahre 1690 schon war er längere Zeit ans Krankenlager gefesselt. Im folgenden Jahre suchte er Genesung in den Bädern von Pyrmont, kehrte aber krank heim. Er starb in Lübeck am 30. Juli 1691 im 53. Jahre seines Lebens und wurde in der Katharinenkirche daselbst begraben.

Dies die Hauptzüge aus dem Leben des hervorragenden Polyhistors, bei dessen Darstellung man gerne länger verweilt,

---

[1]) Zweimal kam er auf dieser Reise in Lebensgefahr: einmal durch Schiffbruch auf der Überfahrt in der Nähe von Briel, das anderemal zu Amsterdam in der berühmten Buchhandlung von Elzevier — von einem Bücherballen getroffen, der von der Höhe herabfiel.

seinen eigenen Worten gemäß, dass in den Biographien[1]) bedeutender Männer kein Zug ohne Interesse und Bedeutung sei.[2])

Seine Schriften sind ungemein zahlreich, vielfach nur kurze Abhandlungen, Gelegenheitsschriften, namentlich seit ihm die Obsorge für die Universitätsprogramme übertragen war, und sie verbreiten sich über die verschiedensten Materien. Ein ausführliches Verzeichnis findet sich in den Prolegomena von Moller.

Bezeichnend für seine polymathische Richtung ist dabei die große Zahl von Schriften aus dem Gebiete der Naturgeschichte, wobei eine gewisse Vorliebe für adeptische und chemische Schriften hervortritt. Außerdem hatte er viel Interesse für die Geschichte und Entwicklung der Sprachen. Er verstand mehrere Sprachen, war u. a. des Englischen gut kundig. Damit verband er eine große Bekanntschaft mit den betreffenden Literaturen. Am eifrigsten bemühte er sich aber für seine deutsche Muttersprache. Es erfreut uns in jener traurigen Zeit der Folgen des dreißigjährigen Krieges sein Wirken, wie ihm denn auch Raumer in seiner „Geschichte der germ. Philologie“ (S. 155 ff.) die entsprechende Würdigung zutheil werden lässt. Morhof pries die deutsche Sprache mit patriotischer Begeisterung als eine Ursprache und suchte dies unermüdlich in einer Menge von Abhandlungen wissenschaftlich zu begründen.[3])

---

[1]) Pol. I., 1, 19, 2.

[2]) Bis zum Jahre 1671 reicht von ihm eine Selbstbiographie; eine ausführliche Darstellung seines Lebens und Wirkens hat Johannes Moller in den Prolegomena zum Polyhistor gegeben. Dieselbe ist ganz nach dem Charakter jener Zeit in enthusiastischer Darstellung und mit großer Ausführlichkeit geschrieben. Man sieht aus ihr, wie die Bewunderung für diesen außerordentlichen Mann noch die Geister erfüllte. Und in der That war der Ruf seiner Gelehrsamkeit und die Bewunderung seiner Schriften über ganz Europa verbreitet.

[3]) Morhof verfasste selbst zahlreiche Gedichte in deutscher Sprache. Diese sammelte er später und gab sie mit Abhandlungen unter dem Titel: „Unterricht in der Teutschen Sprache und Poesie, deren Ursprung, Fortgang und Lehrsätzen“ 1682 heraus. Dieses Werk handelt im ersten Theile von der Abstammung und dem Wesen der deutschen Sprache; im zweiten Theile von der Geschichte der Poesie; als Einleitung geht eine Übersicht der Poesie der anderen europäischen Völker voraus; im dritten Theile folgt dann die Poetik. Unter den deutschen Dichtern bewundert er vor allem Flemming; seine eigenen Dichtungen schließen sich aber am meisten der Art Christian Weises an. Besonders gut bearbeitete er heitere Stoffe. Vgl. R. Treitschke in Prutz' literar-hist. Taschenbuch 1848, S. 439 ff.

Das größte Aufsehen aber machte, obgleich er ein unvollendetes Werk war, bei seinem Erscheinen 1688 der Polyhistor sive de notitia autorum et rerum commentariis, quibus praeterea varia ad omnes disciplinas consilia et subsidia proponuntur. Der erste Theil desselben erhielt damals außerordentlichen Beifall in allen Kreisen der gelehrten Welt. Die kritischen Journale Deutschlands, ja Europas, besprachen dasselbe immer wieder; ein längst gehegter Wunsch, ein Zeitbedürfnis schien erfüllt. Der Polyhistor war ein epochemachendes Werk.[1])

Es ist für die vorliegende Arbeit nothwendig, Plan und Durchführung des zu seiner Zeit viel bewunderten und viel benützten Werkes wenigstens übersichtlich darzulegen. Morhof dachte sich für seine Polymathie das Schema einer idealen Bibliothek, und da er nach eigener Angabe abweichend von seinen Vorgängern bei seiner Darstellung den kritischen Weg einschlug, so hat er die nach Fächern und Disciplinen geordneten Schriften einer Prüfung unterworfen, daran seine eigenen Anschauungen geknüpft und so seinen Hörern ein allgemeines Wissen (Polyhistorie) zu vermitteln gesucht.

---

[1]) Das umfassende Werk ist aus akademischen Vorlesungen hervorgegangen, welche Morhof den neu eintretenden Hörern hielt und bei denen er, ohne schriftliche Aufzeichnungen, theils aus dem Gedächtnisse, theils an der Hand der besprochenen Bücher den Stoff dictierte. Der letztere Umstand erklärt die zahlreichen Citate und Mittheilungen aus den betreffenden Werken. Auf Grundlage von Collegienheften arbeitete dann Morhof, wie er selbst in der Vorrede sagt, zur Wahrung seines geistigen Eigenthums und aus Furcht vor Entstellung seiner Arbeit zunächst den ersten Theil des Werkes, den Polyhistor literarius, aus, daher dieser auch am ausführlichsten ist. Die zwei ersten Bücher erschienen 1688, das dritte nach seinem Tode 1692. Diese drei ersten Bücher erschienen in zweiter Ausgabe von Muhlius 1695. Noch auf dem Sterbebette hatte Morhof die Fortsetzung des Druckes gestattet, aber ausdrücklich verboten, Zusätze zu machen. Die weiteren vier Bücher des ersten Theiles wurden unter der Aufsicht von Friedrich Benj. Carpzow durch Johannes Frick bearbeitet, der sich aber angeblich viele Zusätze erlaubte. Johann Moller, Rector der Schule in Flensburg, revidierte diese Arbeit und stellte selbst unter Berücksichtigung der verschiedenen Manuscripte, Programme und Abhandlungen Morhofs auf Grundlage der oberwähnten Collegienhefte den zweiten und dritten Theil des Werkes für den Druck her. Daher sind diese beiden Theile nicht mehr so ausführlich. Moller verfasste dazu eine ergänzende praefatio und ausführliche prolegomena, und so erschien das ganze Werk im Jahre 1707, in zweiter Ausgabe 1714; mit einer Vorrede von Fabricius, der auch eine interessante Zusammenstellung der periodischen Literatur Europas vorgesetzt ist, 1732; in vierter Ausgabe von J. Schwabe 1744.

Das umfangreiche Werk zerfällt in drei Haupttheile: den Polyhistor literarius, philosophicus und practicus. Im ersten Buche des Pol. lit. beginnt er mit Betrachtungen über die Encyklopädie, Polymathie und den Wert der Literargeschichte. Dann folgt das Bücher- und Bibliothekswesen, die gelehrten und geheimen Gesellschaften, die conversatio erudita, die gelehrten Zeitschriften, dann die bibliothekarischen Schriftsteller, die Kataloge, das Fachwerk (loci communes), die encyklopädischen Schriftsteller und endlich, als für die Gelehrtengeschichte wichtig, die Darstellung der Epistolographie.

Buch II (l. methodicus) behandelt das Unterrichtswesen. Die Erörterung des Studienplanes wird mit Capiteln über die geistigen Kräfte (Urtheil, Phantasie und Gedächtnis) eingeleitet. Beachtenswert ist, was über die Hilfsmittel hiefür gesagt wird, u. a. über die ars Lulliana, die Mnemonik und die verschiedenen Methoden des Wissenserwerbes. Dann folgen Capitel über den Unterricht, besonders in den Sprachen, ferner über den Schulcursus, den akademischen Cursus und die Fürstenerziehung. Der reformatorische Einfluss der Humanisten wird besonders betont. Daran schließen sich ausführliche Anweisungen zu stilistischen Übungen in Prosa und Poesie. Im dritten Buche (lib. parasceuasticus) handelt Morhof weitläufig von der in jener Zeit viel getriebenen Kunst des Excerpierens in den verschiedenen Fächern des Wissens. Buch IV (lib. grammaticus) handelt von der Sprache, ihrem Ursprunge und den Lauten, von der Schrift und den verschiedenen Alphabeten; Morhof bespricht auf Grund der Schnellschrift den Gedanken einer Universalschrift, hält aber nichts von einer sogenannten Universalsprache.

Die folgenden Bücher V bis VII (lib. criticus, oratorius und poëticus) geben eine zum Theile ausführliche Literaturgeschichte, in der sich interessante Ansichten über die Poesie und die verschiedenen lateinischen und griechischen Autoren finden. — Der zweite Theil (Pol. philosophicus) enthält eine Geschichte der älteren und neueren Philosophie, ferner ausführliche Mittheilungen zur Naturgeschichte, Physik, Mathematik, Geographie, Logik und Metaphysik. — Der dritte Theil (Pol. practicus), in dem der Stoff immer dürftiger wird, gibt Daten zur Ethik, Politik, Theologie, Jurisprudenz, Geschichte, Ökonomie und Medicin.

Die Übersicht dieses groß angelegten Werkes zeigt uns den universellen Charakter desselben. Wie Morhof universell ist, so gibt er auch nach allen Richtungen des Bildungswesens Belehrungen, und sein Werk unterscheidet sich zunächst dadurch von ähnlichen Sammelwerken, dass es nicht bloß eine kritische Behandlung der Wissensmaterien betreibt, sondern zugleich den Studienbetrieb behandelt und dem Bildungswesen nach den verschiedensten Richtungen seine Aufmerksamkeit widmet.

Neben dem Schulwesen, in dem wir die eigentliche Veranstaltung der Bildungsarbeit zu erkennen haben, bedarf das Bildungswesen zu seiner vollen Entwicklung auch noch anderer Faktoren, die wir mit Willmann[1] als die Arten des freien Bildungserwerbes bezeichnen können. Bei Morhof finden wir nun oft in eingehendster Weise eine Berücksichtigung dieser verschiedenen Seiten des Bildungswesens, und insofern ist der Polyhistor ein interessantes Document zur Geschichte der [illegible] Bildungswesens, das, wie Willmann mit Recht bemerkt hat, [illegible] noch zu wenig gewürdigt worden ist.

[illegible] Morhofs Mitteilungen [illegible] im allgemeinen zur [illegible] ausführlicher [illegible]

[1] [illegible]

[2] [illegible] Willmann, [illegible]

III.

Indem wir nun auf Morhofs Stellung zur Pädagogik näher eingehen, müssen wir zunächst feststellen, dass er sich von den verschiedenen Didaktikern des 16. und 17. Jahrhunderts dadurch wesentlich unterscheidet, dass ihm für seine Bemerkungen die praktische Bethätigung und Erfahrung fehlt. Wohl haben seine Schriften durchaus, wie er selbst in der Vorrede sagt, einen pädagogischen Zweck, nämlich zum Nutzen der studierenden Jugend zu dienen. Sie bilden eine Hodegetik für Universitätshörer und sind durchaus von einem kritischen Geiste durchdrungen. Seiner Anlage nach ist ja der Polyhistor eigentlich ein literar-historisches Werk, und Morhof stellt die Literargeschichte noch höher als die Polymathie. Aber gerade insofern sind Morhofs Anschauungen und Bemerkungen, die vom Standpunkte des Literarhistorikers und Polyhistors beeinflusst sind, für seine Zeit eine interessante Quelle zur Lehre vom Bildungswesen.

Für Morhof ist Erziehung und Unterricht eine sehr wichtige Angelegenheit: „Die Menschen," sagt er, „verfolgen das Leben, das sie durch ihre Erziehung haben."[1] „Nichts ist leicht und geringfügig, was mit dem Wohle der Jugend zusammenhängt." Freilich eine klare Scheidung der beiden Hauptrichtungen in der Pädagogik, der Bildung und Erziehung, finden wir nicht, doch wiegt das didaktische Element bei weitem vor. Die Didaktik bezeichnet er als aliqua doctrinae de methodo propago[2]) und bei der Methodik sagt er: „methodus est genuina ac primaria logices propago", er stellt also die Didaktik zur Logik.

Erziehung und Unterricht sind aber nothwendig und möglich. Unsere Leiber können wir so bilden und gewöhnen, dass sie Strapazen ertragen und zu außergewöhnlichen Bewegungen fähig werden. Unserem Willen, unseren Leidenschaften setzen wir durch die Religion eine Grenze. Selbst der Erdboden kann durch Cultur gehoben werden — also müssen auch die geistigen Fähigkeiten durch gewisse Mittel ausgebildet und gefördert werden. Dies hat man schon in alter Zeit erkannt. Daher haben die

---

[1]) Pol. I., 1, 15, 45.
[2]) Pol. I., 2, 4, 14.

hervorragenden Gesetzgeber immer auf die Jugenderziehung Rücksicht genommen, so bei den Ägyptern und Spartanern. Daher beklagt es Morhof, dass man zu seiner Zeit so wenig daran denke, die Sitten des Volkes durch öffentlichen Unterricht zu heben. Dies werde meist den Eltern allein überlassen, während es doch für den Bestand und die Ordnung der staatlichen Verhältnisse von Nutzen wäre, dass die Bürger gut gesittet seien. Mit dieser Anschauung steht Morhof auf dem Boden der Didaktik des 17. Jahrhunderts, welche zur Obsorge für das Bildungs- und Unterrichtswesen den Staat berief. Es gibt keine staatliche Aufsicht über Schulen und Talente oder sie ist dürftig und wird unwissenden und sorglosen Leuten anvertraut. Deshalb ist Morhof auch nicht damit einverstanden, dass man diese Obsorge Männern aus heiligen Orden ausschließlich anvertraut, die nicht alle gleichmäßig in den Wissenschaften ausgebildet sind. Wenn man dabei auch auf Frömmigkeit und sittlichen Lebenswandel besonders Rücksicht nehmen soll, so sind doch Sprachen und Fertigkeiten, die in den Schulen behandelt werden, ebenso sorgfältig zu berücksichtigen. Morhof erinnert an die Constitution der römischen Kaiser Valentinian und Gratian,[1] welche das Erziehungs- und Unterrichsswesen als ein ihrer Obsorge würdiges Object ansahen. Daher wünscht er, dass die Fürsten seiner Zeit eifriger auf das Schulwesen Bedacht nähmen. Wenn sie den Lehrern anständige Bezahlung gäben, durch Prämien zum Studium und zu gutemBetragen aneiferten, hervorragende Talente auszeichneten, arme unterstützten, so würden sie am besten für das Staatswesen sorgen und ihre Regierung befestigen.

Über die ungünstige Stellung der niederen Lehrer klagt Morhof wiederholt. Es gilt für ein vile officium, die Jugend zu bilden und zu leiten. Man wählt dazu Leute ohne Erfahrung und ohne Urtheil. Niemand will sich dem Lehramte widmen wegen der geringen Achtung und wegen des dürftigen Einkommens in dieser Lebensstellung,[2] während man sie besonders ehren und ihnen ein glänzendes Einkommen geben sollte. Daher greifen die Lehrer auch zu Mitteln, welche dem Erziehungs- und Bildungswesen abträglich sind, zu den Strafen, vor allem den Schlägen, welche die Knaben herabstimmen und zu

---

[1]) Pol., I., 2, 2, 9.

[2]) Vgl. u. a. Karl Schmidts Geschichte der Pädagogik, Bd. 3, S. 142 ff.

knechtischen Naturen bilden. Auch werden dadurch schlechte Leidenschaften, z. B. Trotz, Zorn u. a. hervorgerufen. Denn Strafen dürfen nur vollzogen werden wegen Vergehen gegen Anstand und Gerechtigkeit, nicht aber wegen geringerer Kenntnisse. Darin besteht auch der Vortheil, eine Sprache im Wege des mündlichen Verkehres zu erlernen, weil dabei die Knaben nicht an das Lernen denken und deshalb leichter und mit mehr Lust lernen, ferne von den Schlägen eines Orbilius[1]), ferne von Furcht oder Schmerz. Die Einschüchterung der Knaben in den Schulen und die Behinderung ihrer Freiheit schadet auch der natürlichen Regsamkeit, die durch den Vorgang bei der conversatio leichter erhalten wird.

Dass auch die Erziehung neben der Bildung von Morhof in Betracht gezogen wird, beweisen verschiedene Stellen. So unterscheidet er auch die *εὐμαθία* von der *εὐφυΐα* und sagt, man dürfe die beiden nicht ganz voneinander trennen; nam boni mores cum omni disciplina coniungendi.[2]) Er bestätigt die allseitigen Klagen über die Sittenverderbnis an den Universitäten.[3]) Aber diese wird nicht erst auf den Hochschulen erzeugt, sondern da nur fortgesetzt. Wenn bei der Knabenerziehung zuhause die Eltern, im Staate die Obrigkeiten, in den Schulen die Lehrer ihre Pflicht thäten, so stünde es nicht so schlimm. Da aber schon in der ersten Werkstatt (officina) sowohl in Bezug auf den Unterricht als auf die Sitten die Grundlage verfehlt ist, so kann man nicht hoffen, dass die Jünglinge aus der zweiten Werkstatt vollkommener hervorgehen, zumal da die übermäßige Freiheit an den Universitäten, die sich nicht gut einschränken lässt, schon einen reiferen Charakter verlangt. Morhof räth daher, die Jugend entweder daheim unter einem guten Lehrer oder in guten Schulen bis zu den akademischen Jahren zu belassen, damit sie nicht in Trägheit oder schlechte Sitten verfalle, außer wenn die Eltern so reich sind, dass sie den Söhnen an der Hochschule einen ephorus halten können, dessen gerade die talentierteren sehr bedürfen.

In diese Kategorie sind auch zu rechnen die Bemerkungen über Körperpflege und Gesundheit, deren sich aber bei

[1]) Hor. Ep. 2, 1, 71.
[2]) Pol. I., 2, 1, 9.
[3]) Vgl. u. a. Schmidt, Bd. 3, S. 199 ff.

Morhof nur wenige finden. Von einer systematischen Betrachtung, wie sie bei anderen Didaktikern der Zeit, vor allem bei Comenius und bei Locke sich findet, ist keine Spur. Und wir würden hier gar nicht darauf zurückgekommen sein, wenn nicht die betreffenden Bemerkungen im Polyhistor merkwürdig in ihrer Art wären.[1])

Unterricht und Bildung sind aber auch etwas Natürliches. Wissenschaften und Künste zu lernen liegt in der menschlichen Natur. Dem Menschen wohnt nach Plato eine *ὁρμὴ πρὸς πάντα μαθήματα* inne. Hervorragende Talente haben für die *ἐγκυκλοπαιδεία*, worunter die Griechen auch den gewissen Zusammenhang und die Verwandtschaft der Wissenschaften verstanden, eine besondere Eignung, während die minder Begabten oft nur für eine bestimmte Wissensrichtung Befähigung besitzen. Daher soll man nicht in allen Wissenszweigen hervorragend sein wollen, schon der Umfang der Wissenschaft schließt dies aus; auf gleiche Weise in allen zu arbeiten, verbietet auch die Beschränktheit des menschlichen Geistes. Haben doch die ausgezeichnetsten Männer niemals alle Wissenschaften so umfasst, dass sie nicht in einzelnen Mängel gehabt hätten. Polymathie ist aber nach Morhof nur aliquis scientiarum complexus.[2]) Man darf also das Gerede unerfahrener Menschen nicht beachten, welche die Polymathie als etwas die Menschennatur

---

[1]) Die Gesundheit muss man nur erhalten, um den Studien um so besser obliegen zu können. Dabei muss man auf Alter und Anlage Rücksicht nehmen. Anders ist es bei Jünglingen und Greisen, anders bei verschiedenen Völkern. Immer muss man ein bestimmtes Maß halten. Man soll die richtige Zeit zum Studieren wählen, den Körper gut nähren, spazieren gehen, spielen, schmausen und sich auf andere Weise erholen. Dabei soll man viel schlafen, dies gibt Munterkeit und Erleuchtung. An einer anderen Stelle wird dies widerrathen. Lange Ruhe schwächt den Körper. Daher hat man empfohlen, dass Studierende eherne Kugeln bis zur Ermüdung schwingen und drehen. Da aber diese Übungen, heißt es bei Fortius, zu viel Zeit in Anspruch nehmen, so hat er eine andere Übung erdacht. Er näht in die Unterkleider Bleikugeln, so dass er sie nur mühsam mit den Armen emporheben kann. Diese Kleider zieht er morgens an und trägt sie durch acht Tage, während die Gewichte bald vergrößert, bald verkleinert werden, bis die Glieder hinreichend abgemüht sind. Um nicht zu lange zu schlafen, legt er sich Steine oder Hölzer quer unter den Rücken. Man sieht, bis zu welchen Übertreibungen es einzelne brachten und Morhof selbst nennt diese hier nur skizzierten Vorschläge *παραδοξότερα*. (Pol. I., 2, 8, 36 und 40 ff.)

[2]) Pol. I., 1, 1, 1.

Überragendes, Nutzloses oder für Thätigkeit Hinderliches bezeichnen.

Es besteht eine gewisse innige Verbindung der Wissenschaften, so dass man in einer nicht vollkommen sein kann, wenn man die übrigen nicht wenigstens einigermaßen kennt. Unter allen Wissensgegenständen aber nehmen die Sprachen die erste Stelle ein. „Prima, quae disci debent, linguae sunt", sie nennt er auch scientiarum vehicula.[1]) Die Sprache unterscheidet uns von den Thieren, und es schien dies so sehr ein Vorzug des Menschen zu sein, dass viele heidnische Völker an ihren göttlichen Ursprung glaubten.[2])

Auf die Sprachen verwenden wir viel Mühe und Zeit, bevor wir etwas Selbständiges leisten. Natürlich ist es vor allem die lateinische Sprache, deren Bedeutung für jene Zeit noch sehr groß war. Andererseits verkennt Morhof nicht die Bedeutung der griechischen Sprache. Er nennt sie omnis eruditionis ac sapientiae nutrix. Von ihrem Nutzen und ihren Vorzügen müssen alle überzeugt sein, die in den Humanitätsstudien einigermaßen hervorragen wollen. Alle Wissenschaften schöpfen aus dem Griechischen, so dass Erasmus (im zehnten Buche der Briefe) mit Recht schreiben konnte: Hoc unum video nullis in litteris nos esse aliquid sine Graecitate.[3])

Neben der Sprache kommt in besonderen Betracht die Schrift. Um seine Gedanken anderen mitzutheilen, dazu dient außer der Sprache die Schrift.[4]) Wenn auch für gewöhnlich die Sprache mehr anregt und belehrt, so übertrifft doch in gewissen Fällen die Schrift die Kraft der Rede, und das geschriebene Wort geht dem lebenden vor. Durch die Schrift reden wir zu Abwesenden und verkehren mit ihnen trotz des Zwischenraumes, wie wenn sie mit uns lebten. Mit der Schrift zeichnen wir Zeitgeschichte auf, die im Wege der mündlichen Überlieferung vieles Falsche aufnähme, ja es

---

[1]) Pol. I., 1, 2, 9, 1.

[2]) Pol. I., 4, 1, 4 und I., 1, 12, 7.

[3]) Ähnliche Äußerungen finden sich vielfach bei Morhof, u. a. Pol. I., 6. 1, 2: Communis omnis sapientiae artiumque omnium fons e Graecia arcessendus est. — I., 6, 2, 1: Oratorum magnam vim olim Graecia tulit, omnis eloquentiae si cuiusquam alius artis certe mater.

[4]) Pol. I., 4, 1, 8 ff. Prima mentis porta verbum et scriptura est, quā se in aurium oculorumque sensus ingerit.

schwände überhaupt das Andenken an die Vorzeit, bestände nicht die Schrift. So steht es auch betreffs der Wissenschaften. Heute wäre von den Namen großer Männer, geschweige von ihren Lehrsätzen, kaum etwas vorhanden, wenn uns nicht die Schrift so viele berühmte Werke der Alten zu unserer Bildung bewahrt hätte.[1]

Zur Erlernung der Sprachen gibt es nun vielerlei Wege und Methoden. Morhof handelt darüber im Polyhistor methodicus, der ein sehr reiches Material zur Geschichte der Methoden bietet. Von den ältesten Zeiten an beginnend, gibt Morhof eine Übersicht des Unterrichtsbetriebes unter verschiedenen Völkern und Zeiten. So wie derjenige, der ein Haus bauen will, zunächst das Material zusammenbringt, dann eine Idee für den Ausbau fasst, so darf man auch in Wissenschaften und Büchern nicht wie in einer wüsten Masse herumarbeiten, sondern muss nach einer bestimmten Methode vorgehen. Wie ferner der Bildhauer nicht genug hat an Werkstätte und Instrumenten, wenn er nicht ein passendes Material hat, so muss der Lehrer zunächst auf die Auswahl der ingenia bedacht sein. Man muss die Vielseitigkeit der geistigen Anlagen in Betracht ziehen, die ebenso zahlreich sind als die äußeren Züge des Menschen.

Bei den geistigen Anlagen sind nach Morhof in Betracht zu ziehen die *εὐφυΐα* oder *εὐμαθία*. Der erstere Begriff ist aber weiter und erstreckt sich auch auf das Moralische; der zweite Begriff ist enger und umfasst vor allem den Grad des Verstehens. Beide Begriffe dürfen aber nicht vollständig getrennt werden, sowie man bei allem Unterrichte gute Sitten im Auge behalten muss. Schon bei den Anfängen der *παιδαγωγία* muss man dies genau erwägen und darnach die Grenzen der künftigen Unterweisung ziehen. Die *εὐμαθία* lässt sich bestimmen nach der Schnelligkeit und Schärfe der Auffassung und nach dem Behalten (Gedächtnis). Wer diese drei Richtungen vollkommen besitzt, ist zum Lernen am besten geeignet, aber sie sind nicht in jedem gleichmäßig vorhanden. Aus diesem Grunde kann man

---

[1]) Morhof wundert sich daher, dass manche die Schrift als etwas Verderbliches aus der Gesellschaft verbannt wissen wollten, und schließt sich jenen verständigen Männern an, welche die Schrift bis in den Himmel erhoben und ihren Ursprung auf die Gottheit zurückgeführt haben. A. a. O.

die Entwicklung des Talentes nicht der Natur allein überlassen, sondern die εὐμαθία muss durch die Unterweisung eines Lehrers unterstützt und gepflegt werden. Dies kann nun entweder einem einzelnen Schüler oder einer Mehrheit von Schülern gegenüber geschehen, und dadurch kommt Morhof auf die beiden Richtungen des Unterrichtes im Polyh. methodicus zu sprechen. Da aber das Schulwesen weit ausgreifender und allgemeiner ist als der Einzelunterricht, so wollen wir auch mit jenem beginnen.

Am wenigsten zieht Morhof die Elementarschule in den Kreis seiner Erörterungen, behandelt dagegen ziemlich ausführlich den niederen und höheren Schulcursus in den Capiteln de curriculo scholastico und academico.[1]) Morhof bespricht die verschiedenen Schulcurse, welche die bedeutenderen Pädagogen der nächst vorangehenden Zeit zur Heranbildung für die Universität entsprechend hielten u. a. von Pierre Ramé, Michael Neander, Jeremias Holtzlin, Joh. Caselius, Nicodem Frischlin, Wolfgang Ratich, Joachim Beccher, Edmond Richer, Johann Sturm u. s. w.[2])

Wir wollen hier nur erwähnen, dass er die zu jener Zeit hochangesehenen und vielfach als Muster genommenen Schuleinrichtungen des Johannes Sturm in Strassburg sehr ausführlich behandelt, und gewinnen daraus die Erkenntnis, dass Morhof diesen Schulplan, welcher die Knaben innerhalb neun Jahren (vom 6. bis zum 15. Jahre) an die Schwelle der Akademie führt, noch immer für den besten hält. Sturms Schulplan ist fast ausschließlich dem Latein und Griechisch unter Heranbildung einer starken Gedächtniskraft gewidmet. Aller sonstige Lehrstoff wird an die Autorenlectüre geknüpft. Mathemathik und Geschichte sind der Universität vorbehalten, die mit allgemeinen Studien beginnen soll. Morhof schließt seine ausführlichen Mittheilungen über Sturms Schulplan mit den Worten: Quae omnia egregia sunt optimoque consilio instituta.[3])

---

[1]) Es erklärt sich dies aus der Art der Entstehung des Polyhistors, dessen einzelne Theile als Vorlesungen vor akademischen Jüngern gehalten wurden.

[2]) Die Bestrebungen dieser Männer finden in der Geschichte der Pädagogik ihre Behandlung. Für die vorliegende Arbeit könnte es höchstens von Interesse sein, welche Stellung Morhof ihren Bestrebungen gegenüber einnimmt. Darauf ausführlicher einzugehen, hindert uns aber der Rahmen der vorliegenden Abhandlung.

[3]) Vgl. Pol. I., 2, 2, 20 und 1., 2, 10, 21.

Auch Ratichs Methode[1]) billigt Morhof, wenn man nur immer einen Lehrer von der Erfahrung und Geduld fände, den sie verlangt. Ratich betonte zuerst den Unterricht auf Grundlage der Muttersprache und griff im Lateinunterrichte sobald als möglich zum Autor, vor allem zu Terenz. Als bemerkenswert hebt Morhof die täglichen Redeübungen unter Anleitung des Lehrers hervor, die er nächst der Autorenlectüre als das beste Mittel zum Sprachenlernen bezeichnet. Weniger zufrieden ist er mit dem Vorgange des Comenius und der verschiedenen atria, portuli u. s. w. Daraus wird nichts Gediegenes gelernt, alles ist voll von Barbarismen. Auch soll man eine Sprache nicht aus einzelnen, sondern aus zusammenhängenden Sätzen lernen. Macht dies auch im Anfange Schwierigkeiten, so haftet es doch bald durch Übung in Ohr und Gedächtnis.

Am Ende seiner Ausführungen über das curriculum scholasticum, die man als eine kritische Betrachtung der Lateinschulen des 16. und 17. Jahrhunderts bezeichnen könnte, gibt Morhof seine eigenen Wahrnehmungen und Vorschläge, die er zu einem richtigen Vorgange beim Unterrichte für vortheilhaft hält.[2])

1. Lese- und Schreibübungen sind zu verbinden.

2. Die Hauptlehren der Grammatik sind so kurz als möglich vorzunehmen. Sogenannte philosophische Grammatik ist von den Schulen fernzuhalten.

3. Mit der lateinischen Sprache ist gleich vom Anfange die griechische zu verbinden, was bei richtigem Vorgange keine Schwierigkeiten bietet.

4. Schon im jüngeren Alter können die Grundzüge mathemathischer Wissenschaften mit Erfolg gelernt werden, z. B. Arithmetik, Geometrie, Geographie und Zeichnen.[3])

5. Man gehe ohne jede Übereilung vor. Jeder Fehler in dieser Richtung rächt sich später.

6. Sobald die Knaben einige Fähigkeit im Prosaausdrucke besitzen, mögen sie an die Lectüre der Dichter schreiten

---

[1]) Pol. I., 2, 10, 28.

[2]) Pol. I., 2, 10, 47 ff.

[3]) Hierin können wir einen Fortschritt gegen die Sturm'schen Schulpläne finden.

und Gedichte auswendig lernen. Dies bietet großen Nutzen für geistige Erhebung und feine Darstellung in jeder Art von Prosa.

7. Längere und kürzere Sentenzen sollen nach moralischen Eintheilungsgründen eingeprägt werden.

8. Diejenigen, welche die Jugend vor gründlicher Sprachenkenntnis höhere Wissenschaften lehren wollen, treiben etwas Verkehrtes. Wollen sie schon in niederen Schulen Lehrer bilden, so werden sie in den Akademien untaugliche Knaben haben.

9. Diejenigen, welche statt der alten Autoren neuere dem Unterrichte zugrunde legen, sei es aus religiösen Gründen oder einem anderen Vorwande, verderben den Studienerfolg in den Sprachen.

10. Gespräche der Knaben untereinander zu veranstalten verurtheilt Morhof.[1])

11. Auch in der ersten Jugend soll man die besten Lehrer wählen, nicht allein gelehrte, sondern auch mit einem richtigen praktischen Verstande ausgestattete, deren Leitlinien den Knaben durch das ganze Leben begleiten werden. Mehr wird ein Knabe unter einem tüchtigen Lehrer Fortschritte machen, als wenn er von einem schlechten Grundsätze annimmt, die er das ganze Leben hindurch nicht mehr ablegt.

12. Endlich bemerkt Morhof auch, dass man sich bei der Länge oder Kürze eines Schulcursus nach der Beanlagung der Schüler richten müsse. Die Zeit soll so bestimmt werden, dass die langsamer Fassenden bei gleichem Eifer mit den übrigen ans Ziel gelangen können.

IV.

Alle Art des Wissenserwerbes richtet sich nach den Personen und nach ihrer Bestimmung; daher muss man *τὰ ὑπάρχοντα* von dem Nebensächlichen trennen. Mit diesem Gedanken kommen wir zu einer anderen Art des Bildungserwerbes, zum Einzelnunterrichte.[2])

Jeder Mensch hat seine affectus und defectus, und diese beim Schüler richtig in Betracht zu ziehen, muss die Haupt-

---

[1]) Von ihnen urtheile Caselius, dies heiße Herden von Kranichen und Pygmäen unterrichten.

[2]) Pol. I., 2, 1, 53 ff.

aufgabe des Lehrers sein. Dies lernt man aber nicht so sehr durch Vorschriften und Regeln, sondern durch Erfahrung. Deshalb können aber auch Schüler von verschiedener Begabung von einem Lehrer nicht auf gleiche Weise behandelt werden. Da dies aber in den öffentlichen Schulen gewöhnlich doch vorkommt, so sind auch die Fortschritte langsamer als beim Privatunterrichte, wo von einem Manne, der sowohl im allgemeinen als in didaktischer Beziehung wissenschaftlich und praktisch gebildet ist — was allerdings nicht leicht und geringfügig ist —, eine bei weitem fruchtbarere Ausbildung des Geistes erzielt werden kann. In der Privaterziehung gelangt alles schneller zu einer gewissen Reife und Ausbildung, so wie die Bäume, die wir mit besonderer Obsorge schützen, die übrigen bald überragen, welche ihre Nahrung aus dem gewöhnlichen Boden ziehen müssen.

Aber der Privatunterricht hat auch seine Klippen und unterliegt Fehlern in Bezug auf Geist und Körper. Morhof meint damit den Egoismus und die Genussucht. Allerdings muss das jugendliche Gemüth durch eine gewisse Ehrbegierde angeregt werden und man darf diese nicht austilgen, wenn man nicht geradezu eifrige Individuen hemmen will. Aber oft geht aus der Ehrsucht eine Verachtung anderer und eine dünkelhafte Überhebung hervor. In Sprachen, Geschichte, in Wissenschaften überhaupt lassen sich bei solchen Zöglingen wunderbare Erfolge erreichen, aber an Einsicht und Urtheil nehmen sie weniger zu. Solche Jünglinge verachten die Ermahnungen älterer Berather und deshalb ziehen sie keinen Nutzen aus dem gelehrten Verkehre, der doch nach Morhofs Ansicht sehr groß ist. Auf der anderen Seite sind solche Jünglinge den Lockungen des Vergnügens mehr ausgesetzt, und gerade je gelehrter sie sind, desto findiger werden sie darin. So gerathen sie leicht in Unthätigkeit und entfernen sich vom Wege der Tugend. Jene freilich, die infolge ihrer glücklichen Naturanlage Maß zu halten wissen und den Mahnungen eines verständigen Lehrers folgen, können sich zum Höchsten emporringen. Morhof gibt für seine Bemerkungen zahlreiche Beispiele und handelt in einem eigenen Capitel des Pol. meth. von der Prinzenerziehung. Das ausführlichste Beispiel aber gibt er in seinen Mittheilungen von der Unterrichtsmethode des Tanaquil Faber, welche dieser an seinem eigenen Sohne zur Durchführung

brachte und selbst in einem Buche: Methode pour commençer les humanités Greques et Latines, Saumur 1672,[1]) durchgeführt hat.

Auch die praktische Unterweisung, die im Ganzen des Bildungswesens als „Ergänzung der schulmäßigen Lernarbeit" eine Stelle hat, kommt bei Morhof zur Besprechung. Die Gelehrtengeschichte berichtet uns von verschiedenen Männern der Wissenschaft, die ein Handwerk erlernten und betrieben. Die Stoiker lehrten, ein Philosoph müsse Wissenschaften und Fertigkeiten besitzen, so dass er in mechanischer Arbeit nicht unbewandert sei und die Hilfe anderer für seine bürgerlichen Bedürfnisse nicht nöthig habe. Morhof meint, es sei eine verkehrte Ansicht, dass die Bethätigung mechanischer Fertigkeiten für einen Philosophen nicht passe. Gerade darin müsse die Erkenntnis der Natur gefestigt und die Resultate der Versuche müssten allgemeiner Gewinn werden.[2]) Aus diesem Grunde soll sich der Gebildete eine möglichst genaue Kenntnis mechanischer Fertigkeiten erwerben. Dies sah schon Aristoteles ein, der für seine Naturgeschichte Künstler zurathe zog. Aber nicht bloß in den Naturwissenschaften, sondern auch für die Ausbildung des Verstandes nützt eine solche Kenntnis; daher räth Morhof, man möge Knaben, solange sie den Gebrauch der Vernunft erst lernen, Kunstwerke der Mechanik vorführen, damit sie den Vorgang sehen und die Namen der Werkzeuge kennen lernen. Man glaube nicht, wie sehr dies die Auffassungsgabe hebe. Dadurch gewinnt man lebendige Vorstellungen, Schlüsse und Principien und gelangt oft zu Erfindungen und Entdeckungen, die von großem Nutzen sind. Man soll sich aber an die Werkmeister selber wenden und auch ihre geheimen Vortheile lernen.

Für den Jugendunterricht wünscht Morhof auch eine schola naturae, artis et actionum humanarum.[3]) Unter Schule der Natur wollte er ein vollständiges und gut geordnetes System von Naturkörpern verstanden wissen, wo durch die lebendige Vorweisung auch die Namen und Begriffe fester

---

[1]) Es wäre lohnend, auf dieses Buch, das äußerst selten, durch seinen Vorgang aber für den Einzel- und besonders den Sprachenunterricht interessant ist, näher einzugehen. Wir müssen aber davon aus Rücksicht auf den verfügbaren Raum abstehen.

[2]) Pol. II., 2, 1, 1 ff.

[3]) Pol. I., 2, 4, 38 ff.

haften würden. Unter **Schule der Kunst** versteht Morhof alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler, die den Knaben gezeigt werden sollen. In den mechanischen Künsten wäre es aber besser, zu den **Handwerkern** selbst zu gehen, da würde man das Wesen der Instrumente aus dem Gebrauche unmittelbar lernen. Becher wollte es sogar in seiner methodus mechanica practica dahin bringen, dass die Knaben innerhalb Jahresfrist genauer als die Handwerker selbst alles verstünden. Eine solche Schule der Natur und Kunst könnte bei der Jugend viel Nutzen bringen für Einsicht, Urtheil und Aneignung gewisser Wissensstoffe.

Rede und Vortrag, die im gelehrten Bildungswesen auch in Betracht kommen, behandelt Morhof zwar nicht als Vehikel des Bildungserwerbes und als Zweig geistigen Lebens, wohl aber lassen jene Stellen, in welchen er von der Wichtigkeit und Bedeutung der **Redekunst** spricht, besonders auch von der **geistlichen Beredsamkeit**,[7] erkennen, dass ihm eine Belehrung der Zuhörer auch in dieser Richtung vorschwebt. Die geistliche Beredsamkeit unterscheidet sich nur im Inhalte von der bürgerlichen. Beide wollen überzeugen, beide folgen der Theorie der Dialektik. Die Predigt kann belehren und **aufmuntern**. Hierin unterscheidet sie sich von der alten **Rhetorik**, die keinen didaktischen Charakter hatte. Auch die Predigt bedarf zur Grundlage bedeutender, wissenschaftlicher und sachlicher Kenntnisse, und die alten Kirchenväter verriethen eine tiefe Gelehrsamkeit und hervorragende Kunst. Die Schriften des hl. Apostels Paulus sind wahre rednerische Kunstwerke. Wenn die natürliche Beredsamkeit in Verbindung mit der Redekunst bei den Heiden so große Fortschritte gemacht hat, so sollen auch wir uns dieses Mittels zur Einwirkung auf die Bildung der Menschheit nicht entschlagen.

Beruhen die bisher betrachteten Arten der Unterweisung auf dem Verhältnisse von **Personen**, so ist dies anders bei dem Wissenserwerbe aus **Büchern**. Vielfache Aussprüche der Alten und Neueren charakterisieren die Bedeutung des Buches[8] als selbständiger Quelle der Bildung. Dieses Verhältnis nimmt auch Morhof in Betracht im lib. I Cap. III über das Bibliotheks-

---

7) P. I. [illegible]

8) Vgl. Willmann, 2, 455 f.

wesen. Dort gibt er als Ursache für die Errichtung von Bibliotheken an: 1. Die Bewahrung von Staatsacten und heiligen Schriften. 2. Die Liebe für die Studien und die Ausbildung des menschlichen Geistes. In letzterer Hinsicht ist es zu entschuldigen, wenn Privatleute sogar ihr ganzes Vermögen darauf verwenden. Ohne Bücher leben zu müssen wäre die schrecklichste Strafe für den Gebildeten, härter als Verbannung. Sueton berichtet im Leben des Tiberius, dieser Kaiser habe den Eingekerkerten nicht nur den Verkehr mit Menschen, sondern auch Bücher verboten. Und Corrasius, ein hervorragender Rechtsgelehrter, sagt, der würde ihm die Sehnsucht zu leben benehmen, wer ihm seine alten Freunde, die Bücher, nähme. Interessant ist das Citat Morhofs aus Lucas de Penna: Liber est lumen cordis, speculum corporis, virtutum magister, vitiorum depulsor, corona prudentium, diadema sapientium, gloria honorum, decus eruditorum, comes itineris, domesticus amicus, collocutor et congerro tacentis, collega et consiliarius praesidentis, vas plenum sapientiae, myrothecium eloquentiae, hortus plenus fructibus u. s. w.

Als dritten Grund der Errichtung von Bibliotheken gibt Morhof den öffentlichen Nutzen an. Wie wir nämlich die Erträgnisse der Äcker aufzuhäufen pflegen, so müssen wir auch die Ernten der Geister in diesen Scheunen aufbewahren. Morhof zeigt nun an Beispielen gelehrter Männer, dass sie ihre großartigen Leistungen vor allem den Bibliotheken verdankten. So hätte uns Plinius nicht eine so reiche Menge von Naturkenntnissen hinterlassen können, wenn er nicht die römischen Bibliotheken gehabt hätte. Selbst Aristoteles hätte nicht so Verschiedenartiges in den Wissenschaften geleistet, hätte er nicht Förderung durch die Bibliotheken gefunden. Unter so vielen Schätzen konnte er bei seinem einzigen Talente und seiner Urtheilskraft die folgenden Jahrhunderte bereichern. Des Salmasius Beispiel allein beweist „klarer als das Sonnenlicht“, dass es kein besseres Mittel zum Wissenserwerbe gibt als eine treffliche Bibliothek.

Gegenüber den vergeblichen Bestrebungen, die Gesammtheit der Wissenschaften durch eine geheimnisvolle Methode zu erfassen, hebt Morhof hervor, dass nur das Bibliothekswesen eine solche vollendete Kenntnis bieten könnte. Solange dies nicht ganz ausgebildet ist, kann man auch keine um-

fassende Kenntnis der Wissenschaften aller Zeiten erhoffen. Morhof hält dies für durchführbar und verlangt die Mittel hiefür von den Fürsten und Großen der Erde, ferner eine Anzahl gleichstrebender Gelehrten und die oberste Leitung eines tüchtigen Mannes. Würde man für jede Disciplin tüchtige Fachmänner auswählen und die Arbeit nach Materien richtig vertheilen, so könnte diese Arbeit in einigen Jahren fertiggebracht werden.

Damit hängt wohl auch zusammen der Vorschlag Morhofs, einen Universalkatalog[1]) aller Wissenschaften auszuarbeiten. Durch diese Arbeit, von der Morhof meint, sie könnte mit Unterstützung der Städte und Fürsten innerhalb zehn Jahren durchgeführt werden, gewännen wir endlich vollendete Systeme aller Wissenschaften, die in ein Gesammtsystem vereinigt werden könnten, zum Nutzen sowohl der Lehrenden als der Lernenden. Dann hätte man in allen Wissenschaften nur ein einziges Buch als Bibliothek und es verschwänden alle jene Schwierigkeiten, welche aus der ungeordneten Schriftenlectüre hervorgehen.

Damit sind wir zu einer weiteren Frage gelangt, wie man Bücher mit Nutzen lesen und Bibliotheken benützen soll, worüber bei der ars legendi und ars excerpendi abgehandelt wird.

Im Pol. lib. II. c. VIII. de variis in doctrina puranda compendiis citiert Morhof unter den Specialmethodikern auch J. Fortius Ringelberg und Alexander Fichet. Im Punkt 4 seiner arcana studiorum methodus sagt Fortius: Wissen soll erworben werden durch Lesen, Hören, Lehren und Schreiben. Aber das Lesen für sich allein ist im allgemeinen nicht zu empfehlen, es erregt Überdruss und stumpft den Geist ab. Man soll womöglich in Gesellschaft lesen, durch die Theilnahme eines Zweiten wird unser Urtheil und unsere Einsicht geschärft. Daher räth er den Reichen, mit den Augen anderer zu lesen, d. h. sich Vorleser zu halten, die ihnen das Lesenswerte aus den Büchern mittheilen sollen.[2])

---

[1]) Pol. I., 1, 20, 22 ff.

[2]) Interessant ist das Citat Morhofs aus Baco von Verulam sermo fid. 48: Temporis nimium in lectione et studiis terere speciosa quaedam socordia est. Libros non legas animo contradicendi neque rursus omnia pro

Für das Lesen mit Nutzen gibt Fichet folgende Vorschrift:[1]) Multum legamus, non multa; festinemus lente: obruitur enim memoria multitudine, festinatione iudicium ingeniumque corrumpitur . . . Non est interrumpenda lectio notis exscribendis. Bis et ter quod pulchrum est, imo libri praecipui terendi et prae manibus habendi sunt semper . .

Aber viel lesen nützt nichts, wenn nicht mit Nutzen gelesen wird. Wer ein Haus aufbauen will, bedarf des Holzes und der Steine; wer in einem Wissenszweige etwas Gediegenes leisten will, muss dazu Stoff suchen und ihn zu seiner Verwendung aufsparen. Für diese Art der Vorbereitung zum Wissen leistet am meisten Nutzen die ars excerpendi. Morhof handelt darüber sehr ausführlich im Buch III des Pol. lit., welches er daher auch παρασκευιαστικός nennt. Die Nothwendigkeit des Excerpierens ist von vielen Männern erwiesen worden. Das Excerpieren schärft die Aufmerksamkeit beim Lesen, das Schreiben selbst unterstützt das Verstehen und bildet ein sicheres Mittel gegen das Vergessen. Wohl hat es auch bedeutende Männer gegeben, die in der Jugend diese Arbeit nicht gemacht haben, wie z. B. Sturm von sich das Geständnis macht. Auch Morhof will wenig Mühe auf dieses Excerpieren verwendet haben und bedauert dies. Er verließ sich auf sein außerordentliches Gedächtnis.

Die Art des Excerpierens wurde damals von den meisten Methodikern behandelt. Dasselbe kann entweder ohne bestimmte Gesichtspunkte geschehen, so dass man alles beim Lesen Auf-

---

concessis accipiendi neque denique in sermonibus te venditandi, sed ut quae addiscas ponderes et iudicio tuo aliquatenus utaris. Sunt libri, quos leviter tantum degustare convenit, sunt quos deglutire cursimque legere oportet. Sunt denique, sed pauci admodum, quos ruminare et digerere par est; alii perlegendi quidem, sed non multum temporis in iisdem evolvendis sumendum; alii autem pauci diligenter evolvendi et adhibita attentione singulari. Invenies etiam libros haud paucos, quos per alios et vicaria opera legere sufficiat eorumque compendia tantum desumere. Lectio copiosum reddit et bene instructum, disputationes et colloquia promptum et facilem; scriptio autem et notarum collectio perlecta in animo imprimit et altius figit . . . Historiarum lectio prudentes efficit; poëtarum ingeniosos; artes mathematicae subtilitatem donant; naturalis philosophia iudicium profundum parit; moralis gravitatem quandam conciliat; dialectica et rhetorica pugnacem reddunt et ad contentiones alacrem; abeunt studia in mores.

[1]) Pol. I., 2, 8, 22 ff.

studierende verzeichnen. Damit ist Morhof aber nicht einverstanden, weil dies verwirren könnte. Auch würde sich das Exzerpieren nach dem Grade des Wissens richten. Oder man könne, wie z. B. Sturm und [illegible], eine bestimmte Ordnung nach Wörtern und Sachen einhalten. Morhof selbst wünscht keine fixe Methode des Exzerpierens. Jeder soll sich dabei nach dem Zwecke und Ziele seiner Arbeit richten. So wenig als dasselbe Kleid oder Haus [illegible] für alle passt, sondern nach den Verhältnissen ausgewählt wird, so kann auch die Art des Exzerpierens ganz verschieden sein. [illegible]

[illegible] Exzerpte [illegible] Bemerkungen [illegible]

[illegible]

[illegible]

Zeitschriften, bespricht u. a. das Journal de savants in Paris, die Giornali de litterati in Florenz, die Acta eruditorum in Leipzig, die besonders verdienstvoll sind und den Beifall der gelehrten Welt gefunden haben. Morhof beglückwünscht Deutschland und die Leipziger Universität, da jetzt auch ausländische Zeitschriften diese Berichte übersetzen und berücksichtigen.

Eine Ergänzung des Morhofischen Polyhistors in der Richtung der politischen Zeitschriften hat J. Joachim Schwab gegeben, welche der dritten Ausgabe des Polyhistors vorgeheftet ist.

V.

Gegenüber diesen Richtungen des Wissenserwerbes gibt es auch Arten der Bildungsvermittlung, welche nur indirect, oft unbeabsichtigt, auf den Empfänger einwirken. Willmann nennt sie (B. II. § 89, S. 437) die Arten des freien Bildungserwerbes und zählt u. a. dazu das Gespräch, den Verkehr und den Umgang.

Die Didaktik des 17. Jahrhunderts, auf alle Richtungen eines polymathischen Wissens bedacht, hat auch diese in den Kreis ihrer Betrachtungen gezogen und so finden wir sie auch in Morhofs Polyhistor mehr und minder ausführlich berührt. Durch den freien Verkehr der Jugend wird so manches Bildungselement noch vor dem Beginne des eigentlichen Unterrichtes eingepflanzt, später oft unter Geschwistern, Gespielen der schulmäßige Betrieb im Spiele fortgesetzt. Deshalb soll auch dem Spiele der Jugend eine erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt werden, ohne aber dem wahren Charakter desselben nahezutreten. Da kann der ältere Kamerad den jüngeren oder umgekehrt unterweisen. In das docere verlegt auch Fortius den Hauptheil des besseren Fortschrittes. Daher räth er sogar, dass Knaben dasjenige, was sie eben gelernt haben, anderen beibringen sollten. Morhof selbst erzählt aus seiner Erfahrung, er habe Eltern gekannt, welche bei zahlreicher Nachkommenschaft diesen Vorgang mit bestem Erfolge anwendeten. Durch den gegenseitigen Wetteifer hätten die Geschwister bemerkenswerte Fortschritte gemacht. Daher sagt Fichet:[1]) Ad compa-

[1]) Pol. I., 2, 8, 29.

randam solidam doctrinam via tritissima certissimaque est docere. Signum enim scientis est posse docere, imo et gradus ad scientiam firmissimus. Und Fortius[1]) sagt: Ubi decies eandem rem docueris, plus te senties profecisse, quam si lucem fugiens magno te domi labore confecisses .....

Der Schüler soll auch eifrig sein im Fragen und Zuhören: Accedant ad professores, interrogent libere, sed paucis quaestionem absolvant. Man soll trachten, sobald als möglich zu unterrichten, eventuell soll man sogar jemand bitten oder um Geld werben, dass man ihm vortragen könne. Oft wird man um einen geringen Preis seine Fortschritte im Wissenserwerbe und Unterrichte bemerken. Selbst unvorbereitet soll man sich an den Unterricht wagen.

Besonderen Nutzen kann das Gespräch und der Verkehr mit gelehrten Männern bringen, für welchen die verschiedenen Methodiker besondere Vorschriften gaben. Dies ist die ars conversandi, welche auch Morhof unter dem Titel homiletice erudita ins Auge fasste. Die conversatio nimmt nach der meditatio die erste Stelle ein und bahnt selbst neuen Gedanken den Weg. Daher wollte Morhof unter dem Titel homiletice erudita ein entsprechendes Buch herausgeben, wurde aber durch seine Kränklichkeit und amtliche Thätigkeit verhindert. Die Hauptpunkte hat er im Polyhistor lib. I. cap. 15 zusammengefasst.

Nichts ist zur persönlichen Ausbildung vortheilhafter als der Verkehr mit gelehrten Männern. Dieser geschieht entweder durch Unterredung oder durch Briefe. Durch häufige Unterredung mit gelehrten Männern kann man sich am besten unterrichten, dies wirkt schneller als Lesen und eigenes Nachdenken. Daher citiert Morhof aus Fabri art. stud. meth. cap. 8: Compendium scientiae unicum est vir aliquis eruditus ad [illegible] quem sedulo consulas ut magistrum, qui viam compendiosam [illegible]

[illegible]

cum bibliopolis et bibliothecariis conversatio insignem nobis usum praestabit.

Weil nun durch den Verkehr der Gelehrten die Wissenschaft des Einzelnen und der Gesammtheit sehr gefördert wird, so muss auch eine bestimmte Art dieses Verkehres eingehalten werden. Die Leitlinien findet Morhof bei Aristoteles in der Rhetorik II, 7. Die Hauptsache aber liegt in der Selbsterkenntnis. Es gibt kein größeres geistiges Verderben als zu große Selbstliebe. Wenn auch ein ehrenvolles Selbstvertrauen nicht zu verwerfen ist, da ohne dasselbe nichts Großartiges unternommen werden kann, so ist darin doch Maß zu halten. Und Morhof hält diejenigen Menschen für die unglücklichsten, welche allein weise zu sein glauben und alle Erfahrungen und Lehren der Jahrhunderte umstürzen wollen. Auf der Selbsterkenntnis beruht auch die genauere Kenntnis anderer. Darnach soll man die gelehrten Männer verschieden behandeln nach Temperament, Alter, Stellung, Vaterland, Stand, überhaupt nach ihrem ganzen Charakter. Diese Bemerkungen stellt nun Morhof in einigen Regeln positiver und negativer Natur zusammen.

A. Zunächst sollen wir im gelehrten Verkehre eine gewisse Wohlmeinung über uns hervorrufen. Dies geschieht also:

1. Honestatem vultu, verbis, facto exprime! Nichts gewinnt so als eine gute Gesinnung. Frömmigkeit und Ehrbarkeit stimmen die Menschen zu unseren Gunsten. Lehrer werden solche Schüler mehr lieben und sittlich gute Zöglinge bereitwilliger als schlechte unterweisen. Das ehrbare Wesen erkennt man aber nicht bloß aus den Handlungen, sondern auch aus Sprache, Miene und Benehmen. Daher verlangen schon die alten Rhetoren honestatem vultus.[1])

2. Eruditi famam aucupare et esto! Wer mit Gelehrten verkehren will, darf nicht bloß eine Scheingelehrsamkeit besitzen, mit der man höchstens Unerfahrenen imponieren kann.

3. Viros magnos et doctrina illustres venerare! Dies soll von Lebenden wie auch von Verstorbenen gelten. Das An-

---

1) So heißt es bei Cic. de orat. lib. III, 57: Omnis enim motus animi suum quendam a natura vultum habet et sonum et gestum; totumque corpus hominis et eius omnis vultus omnesque voces ut nervi in fidibus ita sonant, ut a motu animi quoque sunt pulsae.

denken früherer Gelehrten herabzusetzen, ist nicht bloß ein Zeichen von Anmaßung und Bosheit, sondern auch von Unwissenheit; denn ein so vorschnelles Urtheil pflegen nur unwissende oder unüberlegte Leute zu fällen. Nur wer seinem eigenen Können misstraut, pflegt diejenigen zu hassen, die ihn an Talent und Gelehrsamkeit übertreffen.

4. Ostentator modestus esto! Wir sollen nicht zu gering von uns denken, sonst verlieren wir auch bei anderen. Daher ist eine anständige ostentatio zu billigen, aber frei von aller albernen Prahlerei, sondern voll Bescheidenheit, wie es bei Horaz heißt: Quaesitam meritis sume superbiam.

5. Defectus tuos absconde! So wie man zur richtigen Zeit seine Vorzüge aufweist, so wird man eventuell seine Mängel verbergen.

6. Arcana studiorum tibi serva! In den Wissenschaften und Künsten gibt es gewisse Geheimnisse. Diese bringen, wenn man sie für sich behält, größeren Ruhm. Welche Entdeckungen sind schon in alter und neuerer Zeit mit der Mnemonik gemacht worden, bevor ihre Lehren verallgemeinert wurden! Seitdem ist auch ihre Wertschätzung dahin.

B. Die Hindernisse für unseren guten Ruf lassen sich zusammenfassen in die Regel: Ne sis vel verbis vel factis molestus!

Im einzelnen gibt Morhof dafür folgende Normen:

1. Ut homo est, ita morem geras! Wir müssen die Gesinnung derjenigen erforschen, mit denen wir verkehren wollen. Daher sagt schon Baco, der Gelehrte müsse wie der Politiker ein versatile ingenium haben.

2. Obsequiosus esto! Ein gefälliges Betragen erwirbt immer Freunde. Der gelehrte Verkehr meidet alle, die streitsüchtig sind und über andere absprechen.

3. Affabilis esto! Man soll sich gefällig erweisen, das macht uns beliebt. Dies thun selbst Männer, die sonst mürrisch oder hochmüthig sind, selbst strenge Theologen oder Pädagogen.

4. Garrulus ne esto! Von Hor. sat. 1, 9 ausgehend, kennzeichnet Morhof das Lästige der Schwatzhaftigkeit, die am empfindlichsten wird für den Gelehrten durch den Zeitverlust.[1])

[1]) Wie Morhof die angegebenen Grundsätze mit oft drastischen Beispielen aus der Gelehrtengeschichte und aus eigener Erfahrung belegt, so gibt er hier ein köstliches Beispiel aus der Pinakothek des Erythraeus.

5. Curiosior quam decet ne esto! Gelehrte Männer hassen die geschäftige Wissbegierde, eigentlich Neugierde, und daher bildet diese ein Hindernis, unser Wissen zu vermehren.

6. In iudicando praeceps ne esto! Man sei nicht voreilig im Urtheile über andere, weder in Lob noch Tadel, wenn wir diejenigen nicht kennen, deren Verkehr wir suchen.

Sind auch diese Ausführungen Morhofs anscheinend trocken und wenig bedeutend, so ist doch nicht zu leugnen, dass sie einen tieferen Hintergrund haben. Wir sehen, dass die Sucht nach dem Wissenserwerbe alle möglichen Richtungen in Betracht gezogen hat, und die Geschichte der Bildung bietet uns viele Beispiele, dass der gelehrte Verkehr und die Unterredung auf die Entwicklung der Männer und Studien von Einfluss gewesen ist. Es reicht hier nicht der Raum, um verschiedene interessante Winke Morhofs zur Durchführung seiner Normen anzuführen, wohl aber mag hingewiesen werden auf ein nicht zu unterschätzendes Mittel des gelehrten Verkehres, auf die in der Humanistenzeit so eifrig gepflegte Epistolographie, die Morhof als wichtiges Vehikel des Bildungserwerbes behandelt. Hervorragende Männer, z. B. Scaliger und Casaubonus haben einen regen brieflichen Verkehr unterhalten und sich doch nie gesehen. Morhof handelt über das Briefwesen, das er dem Bibliothekswesen anschließt, in drei Capiteln (I. c. 23—25) sehr ausführlich und aus der großen Zahl der angeführten Schriften können wir ermessen, welchen Umfang und welche Bedeutung dieses Mittel des literarischen Verkehres angenommen hatte.[1])

So wie wir aus der conversatio erudita Nutzen schöpfen, also auch aus den Briefen, die eigentlich Gespräche Abwesender sind, zumal da man darin auch geheimere Dinge zu behandeln pflegt. Briefe politischer Persönlichkeiten bieten für die allgemeine und die Literargeschichte interessante Documente und geben uns oft ein klareres und wahrheitsgetreueres Bild als die Geschichtsschreiber. Schon die Alten haben dies erkannt und deshalb sind die Briefe Ciceros immer hoch geachtet gewesen. Im 16. und 17. Jahrhundert wurden sie auch wegen ihrer Sprache im Jugendunterrichte mit Vorliebe verwendet. Aber auch die Briefe der Humanisten-

[1]) Vgl. Willmann I., 321.

[illegible] besonders in Betracht. [illegible] dadurch stark [illegible]. [illegible] gemeinschaftlichen Kreise [illegible] die ganze [illegible], [illegible] Erdkugel mit [illegible] zerstreut sind. [illegible] kann, so möge man sie [illegible]. Die Naturlehre bedarf einer

Werkstätte oder Schatzkammer. So wie wir zum Lernen der Bücher bedürfen, so in den Naturwissenschaften eines gut eingerichteten Museums. Solche sind durch die Bemühungen gelehrter Männer und Gesellschaften vielfach zustande gekommen, sie sind die loci communes der Natur, sie bilden eine Art Index wie bei Büchern. Morhof wünscht dabei ein Zusammenwirken aller gelehrten Kreise Europas und macht Vorschläge für die Anlegung von Thier- und botanischen Gärten. Unter anderem kommt er auf die Utopia des Thomas Morus zu sprechen und macht anschließend die interessante Bemerkung, dass jenem imaginären Gelehrtenstaate der Plan entsprungen ist, eine Gesellschaft nach bestimmten Grundsätzen zu gründen, um die Natur zu erforschen und die Naturwissenschaften auf eine sichere Grundlage zu bauen. Das ist die berühmte Royal society of London, von der Morhof eine ziemlich eingehende Geschichte gibt. Er behandelt aber auch die Bestrebungen der älteren Zeit. Überall in der Welt, heißt es u. a., hatten die Wissenschaften ihre Verkehrsstätten, Museen und Collegien, damit dort gelehrte Männer sich über literarische Gegenstände aussprächen, woher das Wissen unter die Völker kam und wo zum Nutzen des Staates hervorragende Talente ausgebildet wurden. Dies war und wird die Obsorge der Fürsten sein, die schönen Wissenschaften zu pflegen, ihre Lehrer zu fördern und öffentliche Vereine von Gelehrten zusammenzubringen. Hierin ahmen sie gewissermaßen Gott nach, indem sie ihren Völkern die Quellen des Guten erschließen.

Bis auf unsere Zeit erinnert man sich der Bestrebungen der Alexandriner, Karls des Großen u. s. w., und es dauert an der Ruhm der literarischen Vereine in Italien, Frankreich und Deutschland. Das sind die Häfen, aus denen Früchte für alle Nachwelt hervorgehen. Es ist hier nicht möglich, auf die oft ausführliche und interessante Darstellung Morhofs näher einzugehen. Seiner Ansicht nach ist der Nutzen solcher Vereine ganz einleuchtend, weil sie durch das Vortragen und Reden die Sitte der alten Sophisten erneuern. Durch diese Übungen fördern sie auch die Eloquenz. Ferner prüfen sie eigene und fremde Werte strenge, wodurch ein richtiges literarisches Urtheil erreicht wird. Durch die freie Kritik wird aber auch auf die Qualität der literarischen Erzeugnisse eingewirkt. Morhof ist objectiv genug, daran keinen Anstoß

zu nehmen, dass diese Gesellschaften vielfach in ihrer Volkssprache verkehren, da doch Latein die Gelehrtensprache ist. Aber man soll auch auf die Pflege der vaterländischen Sprache Sorgfalt verwenden nach dem Beispiele der alten Römer, die ihre Sprache trotz des Übergewichtes der griechischen Sprache nicht verachteten, sondern zu bereichern und zu verfeinern suchten. Man hat immer auf diese gelehrten Gesellschaften große Hoffnung für das Gedeihen der Wissenschaften gesetzt und das ist nach Morhofs Ansicht auch richtig. Denn man glaubt nicht, welcher Nutzen aus dem Wechselverkehre gelehrter Männer hervorgeht. Morhof merkt aber auch schon die Schattenseiten. Eine Verwirrung der Meinungen bleibt nicht aus und die Verhandlungen sind hie und da der Wahrheit hinderlich. „Gewiss kann derjenige, der ein geordnetes Wissen hat, sich zurecht finden, minder Gebildete aber können dies schwer. Auch kann durch Abstimmungen nichts Gediegenes erzielt werden, der scharfsinnige Geist wird über alle Majoritäten den Sieg davontragen. Die vielen Meinungen sind auch einer einheitlichen Auffassung hinderlich. Gleichwohl überwiegt der Nutzen dieser gelehrten Gesellschaften bei weitem.

Neben diesen Arten des Bildungserwerbes, die auf einer persönlichen oder schriftlichen Vermittlung beruhen, gibt es auch noch andere, die in den Bereich unserer Sinne, vor allem des Gesichtes und Gehöres, fallen oder beides vereinigen. Hieher gehören die so wichtigen Bildungselemente der Kunst, an denen der Einzelne und die Gesammtheit eine Quelle der Erhebung und Bildung findet. Die Kunstwerke der Plastik, Malerei und Architektur erfreuen unser Auge; die Tonkunst ergötzt unser Ohr. Beide können ihre Befriedigung und Ausbildung finden im Theater, das seit alten Zeiten als eine Veredlungsstätte der Menschheit galt und, richtig gehandhabt, eine Erziehungsstätte des Volkes werden kann.

Morhof zieht auch diese Vehikel der allgemeinen Bildung in den Kreis seiner Erörterungen. Die Musik hat etwas Göttliches an sich, sie erregt und besänftigt die Leidenschaften, sie ist voll poetischer Elemente und reißt die Gemüther mit sich fort. Sie hat selbst auf die unteren Volksmassen und auf Thiere Einfluss. — Die Lebensbeschreibungen hervorragender Künstler sind wertvoll für die Ausbildung einzelner Künste. Jeder Künstler hat doch etwas Eigenes, seinem Genius

Entsprossenes. Wird dies mit Auswahl und Richtigkeit benützt, so bietet es manchen Nutzen.

Das Theater erscheint Morhof als ein wichtiges Bildungsmittel und verdient auch im Jugendunterrichte Beachtung. Eine Schola actionum humanarum würde Mittel zum Wissenserwerbe bieten, was durch Theatervorstellungen erreicht werden kann. Nur alberne und mürrische Menschen können diese scenischen Übungen der Jugend vorenthalten oder das Theaterwesen, das bei allen cultivierten Völkern daheim ist, aus dem Staate verbannen wollen. Wie die Komödie eine Schule des Volkes ist, so kann man auch auf die Jugend durch das Theater einwirken. Die Darstellung wird Charakterzüge in der zarten Jugend besser festhalten, und Tugendbeispiele, auf der Bühne vorgeführt, werden vielfach wirksamer sein. Auf diese Weise wollte Comenius, auf Anschauung jederzeit bedacht, die Geschichte der Philosophen den Schülern einprägen, der auch beispielshalber den Kyniker Diogenes auf die Bühne brachte. Deshalb haben einsichtige Schulvorsteher[1]) theatralische Vorstellungen nicht nur nicht missbilligt, sondern sogar empfohlen. Ein Gleiches hat auch Baco von Verulam gethan. Aus dieser Anschauung erklärt sich auch theilweise die Bedeutung des Terenz im Unterrichte jener Zeit, obwohl man gewöhnlich sprachliche Gründe, die leichte Conversationssprache, dafür angibt. Während die Geschichte wirkliche Thatsachen darstellt, führt die Komödie etwas als wahr auf dem Theater vor. Darin ist mehr Gelegenheit, Charaktere kennen zu lernen, mit Menschen zu verkehren, als in allen Lehren der Moralphilosophie.

Schon oben wurde angedeutet, wie die Welt, beziehungsweise die Erdkugel, Object unseres Forschens geworden sei und welchen Aufschwung das Wissen von der Natur genommen habe. Aus der Natur und ihrem stillen, gesetzmäßigen Walten lernen wir so vieles; die Natur ist für uns eine Quelle der Beruhigung für unser Gemüth und der Abwechslung für unseren Geist. Nach anstrengender geistiger Thätigkeit flüchten Lehrer und Schüler zur Allmutter Natur und suchen in ihr körperliche und geistige Gesundheit. Die Natur ist uns aber auch eine Quelle der Beobachtung und Belehrung, vor der wir staunend stehen. Auch hierauf hat Morhof seine Aufmerksam-

[1]) Besonders die Jesuiten.

keit gerichtet. Es gibt mehr Wunder in der Natur, als man gemeinhin glaubt. Wohin wir unser Auge wenden, unseren Fuß setzen, überall lernen wir. Selbst im geringsten Insect sehen wir Gottes Hand. Jener Bau des Körpers und der Glieder, jener Mechanismus des Universums und aller Lebewesen verräth Vorsehung und weise Einsicht. Sieh einen Maulwurf! Alles ist zu seinem Gebrauche bestens eingerichtet: die Augen, Ohren, Krallen und alle Glieder. Daher brach einmal Cardanus in Enthusiasmus aus mit den Worten: „Es ist offenbar, dass die Natur in allen Dingen wunderbar umsichtig gewesen ist und dass sie nicht im Vorübergehen, sondern wohlüberlegt alles besorgt hat.“ Ähnliche Gedanken finden sich auch bei Comenius.[1]

Wer die Natur und ihre Schönheiten sehen, wer die Schöpfungen der Kunst bei verschiedenen Völkern kennen lernen will, kurz wer die reichen Bildungsmittel der Ferne in sich aufnehmen, seinen Blick und seinen Gesichtskreis erweitern will, der begibt und begab sich zu allen Zeiten auf Reisen.

In der Renaissancezeit entstand eine eigene Literatur, die Apodemik,[2] die sich damit beschäftigte, wie man mit größtem Nutzen reisen solle. Auch Morhof hat auf den Wert des Reisens für den Bildungserwerb nicht vergessen. Bei der conversatio erudita bemerkt er u. a.: Auch auf Reisen kann man durch Verkehr mit vielerlei Menschen, durch Betrachtung der Natur, der Gegenden, Bewohner u. s. w. seine Kenntnisse erweitern. Hiefür empfiehlt Morhof das Fragen nach allem, was uns auffällt. Auf diese Weise haben gelehrte Männer vielfach ihr großes Wissen erreicht. Um zu Erfahrungen zu gelangen, ist das Reisen der beste Weg. Wer seine Beobachtungen auf Reisen herausgibt, macht sich um die Wissenschaft verdient. Dies gilt auch für das Bibliothekswesen. Auf Reisen soll der Gelehrte besonders im Auge behalten, hervorragende Männer und deren Arbeiten kennen zu lernen. Auch die [illegible] kann sich von Reisen viele Vortheile versprechen.

Wer nicht selbst reisen kann, muss seinen Wissenserwerb aus Reisebeschreibungen, itineraria, schöpfen. Diese bilden einen

---

[1] Vgl. [illegible] II. pag. 441.
[2] [illegible] I. pag. 442.

wichtigen Theil der Geographie und können mit Nutzen gelesen werden, wenn man alle wichtigeren Dinge auszieht. Da gibt es Bemerkungen für Geographie, Naturwissenschaften, Politik, Ökonomie und Handel.

Gegenüber diesen verschiedenen Arten des Bildungserwerbes, welche den Menschen als Object der Unterweisung im engeren und weiteren Sinne in Betracht ziehen, steht aber eine allerdings seltene Art selbständigen Bildungserwerbes, wie wir ihn bei den Autodidakten vorfinden. Schon das Alterthum hat diese Richtung gekannt, und es ist interessant, wenn Morhof dabei sogar auf den Citharoeden in der Odyssee hinweist.[1]) Daran schließen sich Mittheilungen über Philosophen und Gelehrte, die als Autodidakten in alter und neuer Zeit hervorragten. So war u. a. Tanaquil Faber Autodidakt im Griechischen.

Es gibt, wie Morhof bemerkt, Leute, welche es ohne Regeln und Vorschriften, bloß durch ihre geistigen Anlagen in Wissenschaften sehr weit gebracht haben; aber im allgemeinen sind doch nicht alle so geartet, dass man sie ihrer Natur allein überlassen könnte.[2]) Auch haften diesen Autodidakten manche Mängel an. Sie schließen sich nicht gerne den Rathschlägen anderer an, weichen fremdem Urtheile aus und suchen oft in Irrthümern ihre Zuflucht. In der Philosophie sind sie selten ohne Eigendünkel. Aber auch in anderen Wissenschaften fehlen ihnen vollständige Kenntnisse, weil sie gewöhnlich nur das Angenehme zu beobachten pflegen. Sie sehen nur auf das, was ihnen Freude macht, nicht auf das, was von Nutzen ist, und doch soll vernunftgemäß beides verbunden werden.

---

[1]) Od. 22, 447 ff. *Αὐτοδίδακτος δ' εἰμί, θεὸς δέ μοι ἐν φρεσὶν οἴμας παντοίας ἐνέφυσεν* . . .

[2]) Pol. I., 2, 1, 17 ff. Vgl. Cic. pro Archia c. 7.

VI.

Ueberblicken wir unsere Ausführungen — die sich freilich mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum manche Beschränkung auferlegen mussten —, so erkennen wir vor allem die Vielseitigkeit der Angaben Morhofs zum Bildungswesen. Wie er universell ist, so gibt er auch nach allen Richtungen des Bildungswesens Anregungen und verdient auch in dieser Richtung den Namen eines Polyhistors. Der wahrhaft Gebildete darf sich nicht auf Einzelnes in den Wissenschaften beschränken, sondern muss sich thunlichst mit allem befassen und so zur Encyklopädie derselben fortschreiten. Darin liegt zugleich eine Reaction gegen die utilitaristischen Bestrebungen seiner Zeit, vor allem der sogenannten Pansophie. Insofern steht Morhof auch den Bestrebungen des Comenius nicht besonders sympathisch gegenüber.

Im ganzen müssen wir auf Grund des Polyhistors in Morhof einen Mann erkennen, der die Gesammtheit des Wissens zu erfassen und der Menschheit durch Bildung zu vermitteln suchte. Mit Rücksicht auf den regen Eifer, der zu jener Zeit auf didaktischem Gebiete herrschte, können wir auch den Enthusiasmus begreifen, mit dem das Werk bei seinem Erscheinen aufgenommen wurde. Die hervorragendsten Gelehrten zollten ihm rückhaltlose Anerkennung.[1])

Die vorliegende Abhandlung hat nur eine Richtung der Lehre vom Bildungswesen in Betracht ziehen können. Eine Erweiterung der Arbeit, beziehungsweise eine vollständige Würdigung Morhofs für die Lehre vom Bildungswesen soll in einem späteren Zeitraume erfolgen.

[1]) Vgl. u. a. die Prolegomena von Moller und die Abhandlung von Pietschke a. a. O.

III.

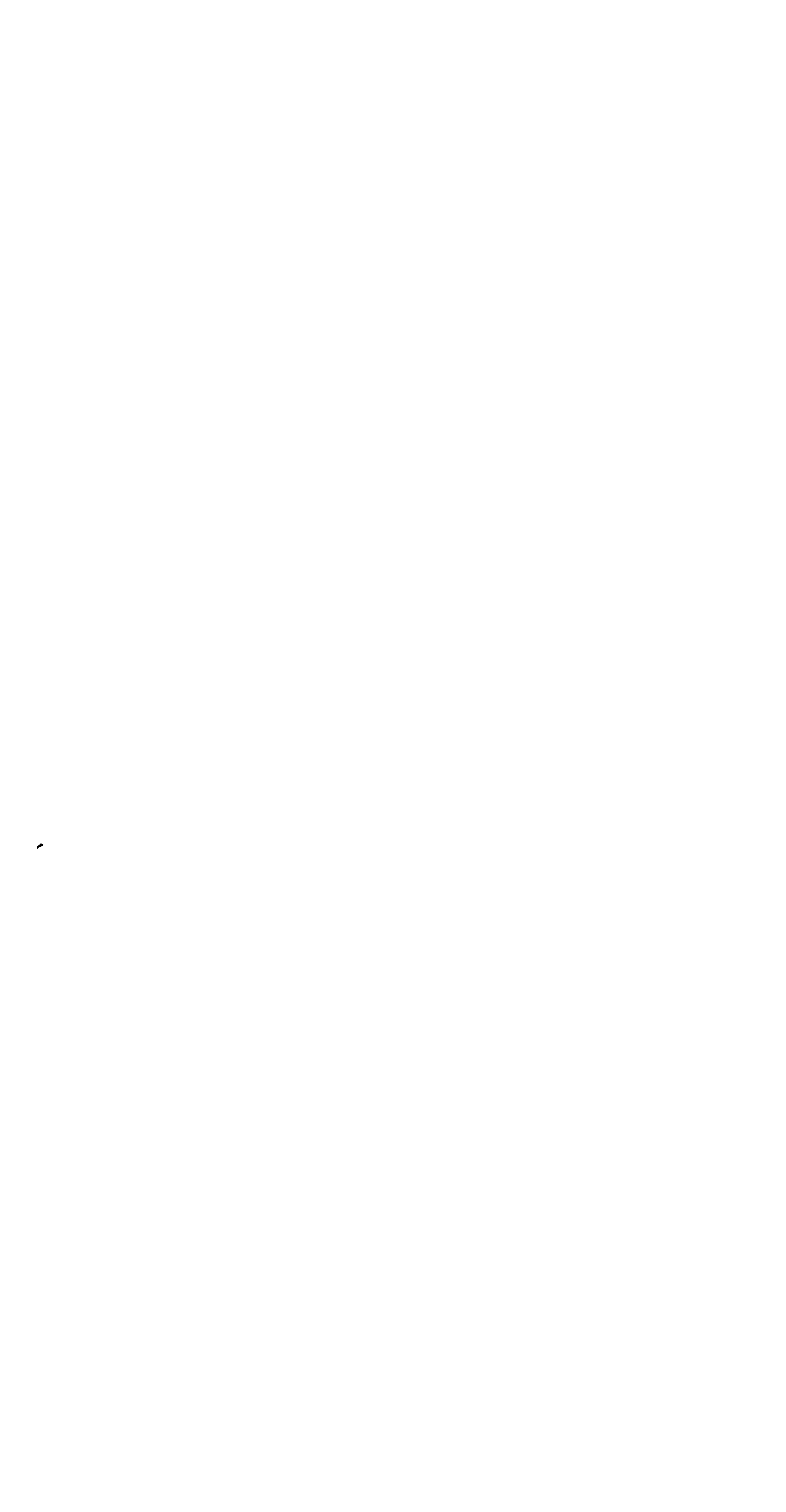
Zur Methodik des geographischen Unterrichtes

(Der Umriss Asiens im Unterrichte der zweiten Gymnasialclasse).

Von

Dr. Wilhelm Schmidt,

Professor am k. k. Staatsgymnasium im IV. Bezirke in Wien.



Vorbemerkung.

Der Verfasser hat vor geraumer Zeit in einem Programme den Umriss von Europa eingehender als hier den von Asien besprochen.[1]) Der vorliegende Aufsatz gibt nur das wieder, was in der Schule vorgebracht wird, und ungefähr auch in derselben Fassung. Es ist eine Art Anschauungsunterricht in der Schulstunde. Ein solcher sucht durch Auffassung des Kartenbildes nach verschiedenen Beziehungen dessen Züge von selbst dem Gedächtnisse einzuprägen und soll für den Schüler wie ein Zeichnen mit dem Auge sein. Es sei hier ausdrücklich bemerkt und ist auch im Verlaufe der Darstellung betont, dass das Folgende nicht einen Memorierstoff vorstellt, und dass manches aus dem späteren nur gelegentliche Bemerkungen wiedergibt. Einzelnes davon mag vielleicht in diesem Curse entfallen und erst in der Folge, beim Vergleiche mit anderen Welttheilen, zu dem Bilde hinzugefügt werden. Damit soll etwaigen Einwendungen begegnet werden, welche aus der neuen Instruction für diesen Unterricht und ihrer Absicht, die Schüler zu entlasten, genommen werden könnten.

---

[1]) Im Programme des k. k. II. Staatsgymnasiums in Graz vom Jahre 1873: „Zum Umriss von Europa. Eine Übung im Kartenlesen“.

War es Sache des ersten Curses, die Schüler in das erste Lesen der Karte, in die Auffassung jener kleineren Gestalten einzuführen, aus denen sich das Bild der Welttheile zusammensetzt, wie der Gebirge, Flüsse u. a. m., so erhalten die nächsten Curse die Aufgabe, die Welttheile als selbständige Ganze zu nehmen, das Kartenbild derselben und dessen Bedeutung dem Schüler zu erschließen, um dann in der Betrachtung Europas und zumal unseres Staates sich mit erweiterter Auffassung wieder dem Einzelnen zuzuwenden.

Die Welttheile sind aber durch den Küstenumriss als Ganze abgesondert und zunächst durch ihn in ihrer Eigenthümlichkeit bestimmt.

Schon in der Beschreibung der ersten Reliefgestalt, die im früheren Jahre den Anfang machte, des nächstliegenden Berges, folgte auf die Betrachtung der Lage die des Grundrisses (nach Gestalt und Ausdehnung), dann des Reliefs, endlich die des Landschaftlichen (Pflanzenkleid, Bewohnung u. a.). So hielten wir es dann in der Beschreibung der Gebirge, so nun in der Betrachtung einer so umfassenden Reliefgestalt, eines ganzen Welttheiles.

Um die Schüler in die Auffassung des Grundrisses von Asien einzuführen, greifen wir zu einem einfacheren Beispiele, welches dieselbe Karte bietet (dies Beispiel bringt, in Bezug auf Borneo und Celebes, Peschel in seinen N. Problemen). Es sind die drei nebeneinander liegenden Inseln **Sumatra**, **Borneo** und **Celebes**, welche sich charakteristisch voneinander unterscheiden. Die eine einfach und langgestreckt, die andere verbreitert, nach mehreren Richtungen ausgespannt und in Hörner und Ecken endigend, das kleinere Celebes aber durch Meerbusen in Halbinseln gegliedert. Sumatra erinnert an das einfachere und langgestreckte Amerika, an Nordamerika auch in seiner Richtung gegen Südosten, Borneo ganz entschieden an Asien, das ebenso seine Haupterstreckung gegen Nordosten hin hat, Celebes aber an das vielgegliederte Europa.

Den ersten Begriff für die Betrachtung des Umrisses erhalten die Schüler durch die Frage, welche Gestalt man einer

in sich geschlossenen Schnur geben müsste, um mit derselben möglichst viel Fläche zu umspannen. Es ist offenbar der Kreis. Unter den Viereckgestalten aber besitzt bei gleichem Umfang die größte Fläche die am wenigsten gestreckte, das Quadrat. Ein gleich großes, aber zweimal längeres Rechteck zeigt dies deutlich; es ist weniger zusammengefasst, hat größere Entfernungen seiner Theile voneinander, geringere vom Rande, größeren Umfang: eine Insel von solcher gestreckteren Gestalt hat mehr Küstenland, weniger Meerferne. Durch die Wegnahme eines der vier Quadrate, in welche wir bei dem Vergleiche jenes größere Quadrat getheilt haben, erscheint seine Form gegliedert, mit zwei Halbinseln und einer Bucht dazwischen: seine Fläche ist verringert, wenn auch der Umfang gleich blieb. Ähnlich ist die Grundgestalt von Afrika ein Kreis, mit dem Ausschnitte eines Quadranten (durch den Meerbusen von Guinea). Jener gestreckten Gestalt aber entspricht Amerika, der massigeren Asien, freilich nicht ohne bedeutende Gliederung.

Wir setzen diese Formen zur Kreisgestalt ins Verhältnis durch die Frage, ein wie großer Kreis sich zunächst in Asien einschreiben lasse, so dass er nach verschiedenen Seiten ans Meer nur hinanreicht. Wir finden seinen Radius zu $23^1/_2$ Erdgraden. Der größte aber, der sich im Innern Afrikas ziehen lässt, erstreckt sich im Halbmesser nur über $17^1/_2$ Erdgrade und umfasst an Fläche nicht viel mehr als die Hälfte des Kreises von Asien, der von Nord- oder von Südamerika nur ein Drittel. Uns die Meerfernen, welche in diesen Zahlen liegen, zu vergegenwärtigen, nehmen wir auch die von Wien, drei Grade, und fragen uns, ob wohl viele von den Bewohnern des innersten Asiens das Meer erblickt haben oder von demselben mehreres wissen mögen.

Von der Euphratmündung zum Gangesdelta und über die Mündung des Jangtsekiang zu der des Amur, von da über die Lenamündung und das Taimyrland zum Weißen, dann zum Ostrande des Schwarzen Meeres und am Tigris zum Ausgange zurück, lässt sich ein dem Kreise sehr genähertes Oval beschreiben, welches, vielfach der Küste folgend, gerade die Masse, den Stamm des Welttheiles umfasst, freilich auch den ganz continentalen östlichen Theil von Europa mit einschließt. Was von Europa Halbinsel ist, bleibt ebenso wie die Halbinseln Asiens

und das syrische Vorland außerhalb der Linie. Die Mittellinie des Ovals geht, wie die des Welttheiles nach Ostnordosten, von der Euphrat- zur Amurmündung.

Die Gliederung des Welttheiles ins Auge fassend, messen wir, den Erdgrad als Maß, die Basis und die Länge der einzelnen größeren Halbinseln. Meist wird die Wurzelbreite von der Länge übertroffen. Dekan allein und so ein Vorland wie China und das mandschurische sind Ausnahmen. Auch die europäische Halbinsel vergleichen wir so mit den anderen, die vom Stamme Asiens ausgehen. Ihr gegenüber gilt uns auch die ganze Nordosthalbinsel als solche, mit der Basis von der Lenamündung zum Westende der Ochotsker See. Diese langgestreckte Spitze des Welttheils ist als Halbinsel genommen nicht nur wegen ihrer langgedehnten Gestalt, sondern auch wegen ihres Ansatzes, im Winkel, sowohl an der Ochotsker See als an der Janabucht. In denjenigen aus diesen Gebilden kommt die Halbinselnatur am stärksten zur Erscheinung, bei welchen der Ansatz an das Festland im Vergleich zur Länge, zur Masse und zur eigenen Küstenentwickelung der Halbinsel am schmalsten ist. Wir bemerken die Gliederung mehrerer derselben durch Nebenhalbinseln. Vor allen würde auch hier Europa hervorragen, wenn nicht neben der Größe auch die so reiche Gliederung ihm fast schon durch den bloßen Umriss die Bedeutung eines selbständigen Welttheiles gäbe.

Auch ihre Richtung ins Auge fassend, lesen wir die heraus, welche einer der Hauptweltgegenden folgen, wie Kleinasien, Dekan und Korea, die Nordost- und die Samojedenhalbinsel.

Außer der Gestalt fordert die so verschiedene Größe zum Vergleiche auf: wir zählen sie, das Augenmaß übend, von der größten bis zur kleinsten herab, die noch genannt wird, auf.

Im Bilde des Welttheiles ziehen vor allem die drei mächtigen Südhalbinseln (ähnlich wie ihr Gegenbild in der Gestalt Europas) durch ihre Größe und ihre ausdrucksvolle Eigenheit das Auge auf sich: Arabien, schmäler beginnend, dann breit ausladend, im Rechteck abschließend; Dekan, dessen einfache Gestalt vom Beginne an schon der Spitze zustrebt, und das zierlicher geformte Hinterindien, das sich in Halbinseln zertheilt und in der schlanksten derselben die Südspitze des Welttheiles enthält.

Den Halbinseln entsprechen die *Meerbusen*: die einen entstehen durch die anderen. Den Halbinseln mit breiter Basis gleichen weitgeöffnete Meerbusen wie die zu beiden Seiten Dekans; solchen mit eingeschnürter Basis Binnenmeere mit schmalem Eingang, wie die beiden, welche Arabien zur Halbinsel machen. Auch von den Meerbusen sind manche durch ihre Gliederung von Interesse, wie der verästelte obische, das Rothe Meer mit dem Gabelende, das seltsam gewundene Ende des Gelben Meeres. Man ist versucht, um den Gegensatz der beiden Arten von Gestalten deutlicher zu erfassen, sichs einmal so vorzustellen, als wären die Meerbusen die Halbinseln, die Halbinseln aber Meerbusen. Das Ungewohnte und Seltsame würde gleich in die Augen springen: die Meerbusen wären oft merkwürdige Halbinseln, mit schmalem, gewundenem oder schrägem Ansatz und so oft rundlich endigend.

Mit einer anderen Betrachtung richten wir das Auge auf die Bildung des *Gesammtumrisses*, indem wir die einzelnen *Küstenstrecken* heraussuchen, welche völlig oder fast genau *westöstlichen* und welche *nordsüdlichen* Verlauf haben. Die Schüler erinnern sich, dass die letzteren dem Auf- oder Untergang der Sonne gerade gegenüberliegen, sie aus der hohen See auftauchen oder hinter ihr hinabsinken sehen; Südküsten aber sind den Tag über die hellsten. Auch die Inseln ziehen wir in diese Betrachtung, so genau südlich verlaufende wie Sachalin oder westöstliche wie Flores oder Celebes in seinem Nordrande. Die durch solchen Verlauf ausgezeichneten Küsten, es sind ihrer nicht zu viele, bleiben dem Schüler wohl eingeprägt, ein Halt für die Orientierung, da Süden und Süden in verschiedenen Theilen des Kartenbildes durch das Auseinanderweichen der Meridiane sehr verschiedene Raumrichtung hat.

Allgemeiner überschauen wir nun die Küsten mit einer Zwischenrichtung gegen *Nordosten* oder *Nordwesten*. Jene herrschen im ganzen mehr im Osten, diese im Südwesten des Welttheiles vor. Auffallend ist das Vorwiegen der meridionalen vor den westöstlichen Küsten, da die Halbinseln, entgegen dem Zuge des ganzen Welttheiles, sich meist nach Süden oder auch Norden erstrecken.

(Nebenbei bemerkt, ist die Summe der nordsüdlichen Küstenstrecken und der nordsüdlichen Componenten der schräg zu den Meridianen liegenden, also die Gesammtheit aller von den ein-

zelnen Küsten umfassten Breitenunterschiede weit größer als die der westöstlichen Küsten und Componenten, trotz des mehr westöstlichen Zuges des Welttheiles; noch mehr, wenn die Inseln und Inselreihen, die fast alle sich der südlichen Richtung nähern, dazugenommen werden. Es trägt dies nicht wenig zur Vermannigfaltigung der Küstenbilder in landschaftlicher Hinsicht bei. Im Umrisse Europas halten sich die beiden Richtungen ungefähr das Gleichgewicht; auf der ganzen Erde überwiegen entschieden die nordsüdlichen. Das hier Bemerkte ist aber nicht für die Schüler.)

Ein neues Interesse gewähren, zur Betrachtung auffordernd, regelmäßige, der geometrischen sich annähernde Formen, völlig gerade oder in gleichmäßigem Bogen ziehende Küstenlinien, paralleler Verlauf von Küsten, von Halbinseln, von Inseln, Inselketten, von Meerbusen.

Bogenlinien, ein- und ausspringende, mitunter eine Folge von gleichartigen Bogen, oder den Anschluss eines ausladenden an einen einspringenden, zu einer geschwungenen Linie, oder gegenüberliegende Bogen, die bei Kamtschatka, Malakka, Kleinasien eine bauchige Gestalt einschließen, zeigt der Umriss Asiens in reicher Fülle. Man möchte diese Form für denselben charakteristisch nennen, wenn sie nicht auch im Bilde anderer Welttheile hervorragte.

Es sei hier noch an den seltsamen Umriss der Ochotsker See und des Indisch - arabischen Meerbusens erinnert, der von lauter flach in das Meer vorspringenden Bogen gebildet wird, und an die schöne Form, zu welcher die Ost- und die Westküste Hinterindiens in gleichem Bogen sich ausweiten und wieder zusammenziehen; der westliche Bogen ist freilich, da die Küste bald abbricht, von einer Inselreihe, den Andamanen und Nikobaren, zu Ende geführt; der östliche aber ist in der Ferne selbst von einem Inselbogen begleitet.

Der ganze Ostrand des Welttheiles ist durch eine Reihe solcher Linien gebildet, und ihr liegt jene bekannte Reihe von Inselbogen wie eine Guirlande vor, eine der auffallendsten und schönsten Formen im gesammten Erdbilde. Vor allem merkwürdig ist die Theilung der Reihe an den Philippinen in vier Bogen, von welchen zwei unmittelbar, der dritte über das gebogene Nordhorn von Celebes nach den Spitzen Borneos hinzieht, der äußerste die Molukken erreicht. Und indem die groß-

artige Reihe mit dieser Verzweigung endigt, legt sich als größter Bogen die Sundareihe abschließend vor; sie selbst knüpft an jenen Bogen der Andamanen und Nikobaren an, der noch in den Norden Sumatras vordringt. Die Sundareihe, in ihrem westöstlichen Zuge das Bild des Ostrandes Asiens quer abschließend, wendet sich in Timor nach Nordosten und biegt endlich zu den westwärts ziehenden Amboninseln um.

So sehr jene Inselketten des Ostrandes, von den Aleuten her, als eine in sich fertige Reihe erscheinen, so nimmt doch fast jeder dieser Bogen nicht da seinen Anfang, wo er sich anschickt, an das frühere Glied der Reihe sich anzuschließen, sondern an Halbinseln oder festlandsnahen Inseln, und erst dann kreuzt ihn der frühere Inselbogen. So kreuzen die Aleuten die Linie, welche der Ostrand von Kamtschatka mit den Kurilen bildet, die Kurilen wiederum den Bogen, der von Sachalin über die japanischen Inseln zieht; der japanische Bogen schneidet den nächsten, welcher vom Ostrande Koreas zu den Liu-Kiu-Inseln führt.

Schon im früheren Jahre bemerkten wir, wie die Inseln einer Reihe meist gegeneinander gestreckt sind. Der heimische Archipel der dalmatinischen Inseln bietet das schönste Beispiel dafür unter allen Inselgruppen der Erde. Aber da, wo Inselketten sich treffen, liegen anders gestaltete Inseln, dreieckige oder im Haken gekrümmte oder mehrästige, die eben ihre Enden nach den sich kreuzenden Reihen hin richten. Davon sind Jeso, Kiusiu, Luzon und Mindanao, besonders aber Borneo und Celebes recht merkwürdige Beispiele, selbst auch das gegen Nordosten sich krümmende Formosa.

Das erinnert aber an die Lage und Gestalt des Welttheiles selbst. Wir verglichen ihn schon mit Borneo. Und wie in den Ecken und Vorsprüngen dieser Insel mehrere Reihen sich vereinen, so ziehen an die weit hinausgedehnte Nordost- und Südostecke des Welttheiles zwei große Reihen her, die den Stillen Ocean umschließen: die von Amerika, welche bis zur Südspitze dieses Welttheiles sich erstreckt, und die australische, zu welcher die Sundainseln hinüberführen. Auch am Westende Asiens findet sich ein kleineres Abbild davon in Kleinasien, der Brücke nach Südeuropa, und dem Inselbogen von Kreta. Asien kommt eben dadurch den anderen Welttheilen so unmittelbar nahe, weil es nach drei Seiten sich in Halbinseln soweit ausdehnt, die Reihen vereinigend.

[illegible] ist eine andere Erscheinung im Bilde des Weinlaubes wurde schon erwähnt. Es ist der so häufige parallele Verlauf von Küsten, nicht nur [illegible] die beiden Küsten einer lang-gestreckten Insel, wie [illegible] oder [illegible] wie das Band, welches Malakka vom Festland [illegible], als der Fall einer und derselben Bergkette erscheinen; auch wo die beiden Ufer einer Meeresstrasse sich als der Saum eines vom Meere ausgefüllten Thales offenbaren, wie am [illegible] Meerbusen und seiner Ver-zweigung [illegible] Meerbusen [illegible] zu seinem Ein-gang [illegible] [illegible] am Rothen Meere, [illegible]

[illegible] dass [illegible]

[illegible] das [illegible]

einander gesellt, sich auf seine verschiedenen Seiten vertheilen, so dass diese durch ihre Gestalt sich aufs entschiedenste voneinander abheben: die beiden großen, offenen Meerbusen im Süden, mit breiter Basis senkrecht gegen den Continent vordringend, zwischen ihnen, ebenso aus dem Welttheil senkrecht hinaustretend, die einfache, dreieckige, wurzelbreite Halbinsel, und an sie angeschlossen, die Richtung vom Continent weg beibehaltend, die Inselreihe der Laccadiven und Malediven. Ähnlich verhält sich die östliche Inselreihe, welche von der Küste Arakans ausgeht, und so Tenasserim mit Malakka. Der westliche Meerbusen, der indisch-arabische, geht in die zwei in manchen Zügen einander so ähnlichen Gestalten des Rothen Meeres und des Persischen Golfes über, beide mit gleichem Vorhof und engem Eingang. Sie gehören einer geselligen Schar von solchen Binnenmeeren mit engem Eingang an, die von der Straße von Gibraltar aus als eine Zone den Continent von einem Ocean zum anderen durchsetzt und in die drei Welttheile sondert. Unter ihnen zeichnet sich das Rothe Meer durch scharfe Enden und scharfe Ansätze aus, wie es sich an den Golf von Aden und wie sich ans Rothe Meer der von Akaba anschließt. Nur das Mittelmeer endigt, in seiner Nähe, gleich scharf abgeschnitten.

Die Ostseite des Welttheiles hat eine andere Bildung. Ihre Halbinseln und Inselreihen ragen nicht senkrecht vom Continent in den offenen Ocean hinaus, die schlanken Halbinseln schmiegen sich vielmehr an und lassen zwischen sich und dem Continent schmälere Meerbusen übrig. Jene Inselzüge schließen sich an. Wir wurden schon auf die lange Bogenreihe dieser Küste und auf die vorliegende Reihe der Inselbogen aufmerksam. Nun sind jene inneren und diese äußeren Bogen einander nicht parallel. Die Kreuzungen der letzteren, die Einschnürungen ihrer Reihe liegen immer in großer Nähe den Ausbauchungen der inneren, der Küstenbogen gegenüber, dann weichen die Bogen auseinander. So entsteht eine Reihe von sack- oder schlauchartigen Binnenmeeren („Randmeeren“), die sich an den Continent anlegen, ihre Mittellinien und Tiefenrinnen dem Zuge der Küste parallel, auf gleicher Linie sich folgend. Es setzt sich diese Bildung fort in einer Art von abgesonderten oder Binnenmeeren, die rings von Inselketten eingeschlossen sind, die Sulu-, die Celebes-, die Bandasee: eben da, wo jene

Inselfolge in Ketten sich vertheilt und diese sich wieder zusammenschließen.

Auch der Norden des Welttheiles hat, schon vom Ochotsker Meere an, seine eigenthümlichen Formen: Buchten mit parallelen Ufern, quer abgeschnitten oder in scharfe, schmal eindringende Spitzen, diese oft gepaart, endigend; so der Westen und Norden der Ochotsker See, die Anadyr- und die Janabucht, die Chatanga- und die Taimyrbai, die des Jenissei und Ob.

Bei solcher Geselligkeit der Formen fällt im Anblick des Welttheiles ein so vereinzeltes Gebilde wie die Insel Ceylon um so stärker in die Augen. Doch ist sie fast ans Festland angeschlossen — nur eine seichte Straße trennt sie — und ihr Umriss wiederholt fast das stumpfe Ende der Halbinsel, zu der sie gehört, wie Sumatra ein Gegenbild in Malakka hat. — Das ähnlich vereinzelte und doch festlandsnahe Hainan hat doch Formosa nicht allzuweit entfernt, Cypern, das mit seinem Nordufer den Bogen der gegenüberliegenden Küste nachahmt, weist auf Kreta.

Nicht, dass diese Betrachtungen mit den Schülern in einer Folge angestellt würden: die Beobachtung des Einzelnen wird vielmehr in gelegentlichen Andeutungen noch fortgesetzt, wenn wir längst zur Behandlung des Reliefs fortgeschritten sind. Auch sind diese Dinge durchaus nicht Memorierstoff für die Schüler. Solche Beobachtungen schaffen ihnen ein Auge für Linien, für Beziehungen und Anordnung. Sie freuen sich an denselben, fühlen sich durch sie geistig gewachsen, behalten sie von selbst gut im Sinne und der ganze durch sie geordnete Stoff haftet um so anschaulicher und fester im Gedächtnisse. Auch wird der Lehrer das Meiste von dem, was hier in bloßen Worten ausgedrückt ist, in der Schule eben anders vor Augen führen, mit der Hand auf der Karte weisend und Linien führend oder in einfacher, oft schematischer Zeichnung an die Tafel: sei es die Linie einer Küstenstrecke, der Umriss einer Halbinsel, Insel, eines Binnenmeeres, die Umgebung nur angedeutet oder in geschriebenen Namen hinzugefügt; oder sei es die Anordnung von Inselzügen, wie ja auch bei Betrachtung des Reliefs die Anordnung einzelner Gebirgsgruppen oder die der Gesammtheit von Gebirgen in einfachen Strichen entworfen wird. Jene Bogenlinien, die einen so bedeutenden Theil der Umrisse bilden,

werden als solche, nicht durch die kleinen Einzelheiten gebrochen ausgeführt; die Hauptform, die Stärke der Krümmung und die Lage des Bogens tritt um so bestimmter hervor.

Das Auge der Schüler noch bestimmter auf einzelne Punkte des Umrisses zu richten, sind ein gutes Mittel die Städtelagen. Kommt ihnen doch an sich schon solche Bedeutung zu. So sind es denn die wichtigsten Küstenstädte, welche vor denen des Innern gleich mit der Behandlung des Umrisses oft genannt und aufgezählt, von den Schülern auf ihrer Karte oder an der Wandkarte gezeigt werden. Bald haben sich die Schüler ihre Lage aus dem Kopfe zu vergegenwärtigen und die nächsten Meerestheile, Inseln, bald auch die nächsten Gebirge und Flüsse wie die ungefähre Breitenlage dazu anzugeben; sie versuchen wohl auch von der einen oder anderen dieser Städtelagen aus die benachbarten Küstenstriche aus dem Kopfe zu zeichnen.

In der Betrachtung des nächsten Berges, als jener Reliefgestalt, deren Beschreibung wir auch auf den Welttheil anwenden, folgte auf die Gestalt des Grundrisses dessen Ausdehnung.

So messen wir die Ausdehnungen Asiens: die größte, vom Südwest- zum Nordostende; ferner die vom Westende gerade ostwärts zur chinesischen Küste, also die größte westöstliche, und die von der Nord- zur Südspitze, die größte meridionale Erstreckung des Welttheiles: durch das langgestreckte Malakka kommt sie der westöstlichen gleich; ebenso die Breite des Welttheiles vom Taimyrland bis Tonking.

Als Maß dient uns wieder der Erdgrad, der Grad eines größten Erdkreises. Er gibt unmittelbar in einfachen Zahlen das Verhältnis einer Strecke zum Erdumfang, den Betrag der Wölbung an, über welche sie sich erstreckt. Die Schüler werden angeleitet, nebeneinander eine Anzahl von Kreisbogen, alle mit gleichem Halbmesser zu verzeichnen und auf jedem eine der gemessenen Entfernungen nach der Zahl der in ihr enthaltenen Erdgrade, also nach der von ihr umspannten Erdwölbung so aufzutragen, dass immer der Bogen mit seiner Sehne horizontal liegt; so auch die Strecken von Aden nach Ceylon und andere, in welchen wir den Umriss Asiens — zugleich in Tagen Dampfschiffahrt — von Suez über Aden, Ceylon, Singapore, Hongkong bis Japan hin messen; ebenso, im Ver-

gleich zur Ausdehnung des Welttheiles, die Weite des Großen Oceans von der Gelben See bis nach Arica in Peru, über den halben Erdumfang ausgebreitet. Wenn mit der Vorstellung von größeren Strecken sich möglichst klar und unmittelbar die von der darin enthaltenen Erdwölbung verbindet, knüpft sich das Verschiedenste und Wichtigste daran: die Verschiedenheit der augenblicklichen Sonnenstände, die Bedeutung geographischer Breite und Länge, die beschränkte Aussichtsweite von Gebirgen, das Verhältnis des ebenen Kartenbildes zur Lage der Erdräume auf der Kugelfläche, also zum Bilde auf dem Globus.

Durch die Vorstellung von der Erdwölbung und die Zeichnung davon wird dem Schüler deutlich, dass, wenn ein Ort von dem Punkte, der eben senkrechten Sonnenstand hat, z. B. um 30 Erdgrade absteht, jener Ort die Sonne 60 Grad hoch am Himmel stehen hat; und ist dabei der Punkt senkrechten Sonnenstandes gegen Südwesten gelegen, so steht über dem Orte die Sonne so hoch im Südwesten. So ist es denn ein Einfaches, hat man nur den Punkt senkrechten Sonnenstandes bestimmt, die augenblickliche Stellung der Sonne über den verschiedensten Küstenpunkten oder Gebirgen durch bloßes Messen der Abstände nach Richtung und Höhe anzugeben und deren Beleuchtung sich zu vergegenwärtigen.

Noch vor solcher Übung fassen wir die geographische Breite ins Auge. Die nordsüdliche Ausdehnung des Welttheiles, die starke Abwölbung seiner Fläche nach Norden hin wird besonders bedeutsam und eindrucksvoll durch die Abänderung in der Mittagshöhe und in der Schräge der Sonnenaufgänge, also der täglichen Sonnenbahnen, welche dadurch erzeugt wird. Die Schüler bringen sich diese Unterschiede in kleinen, selbstgefertigten Modellen zur Anschauung. Verstärkt wird dieser Gegensatz zwischen niederen und höheren Breiten durch die mit der Breite wachsenden Unterschiede der Tageslänge, den wachsenden Gegensatz zwischen den Jahreszeiten. Eben jener Kreisbogen, auf welchem die südnördliche Erstreckung des Welttheiles aufgetragen wurde, bringt den Schülern durch hinzugezeichnete Sonnenstrahlen die Ursache dieser verschiedenen Mittagshöhen zu klarer Einsicht.

Wir lesen aus der Karte die Stellen, wo die von zehn zu zehn Graden verzeichneten Parallelkreise die Küsten Asiens und die vorliegenden Inseln treffen, um sie wohl einzuprägen

und daran Maß und Richtschnur für die Vorstellung vom Bilde des Welttheiles zu haben: ein Maß für die Küstenstrecken und Entfernungen, eine Richtschnur, um die westlichen und die östlichen Küstenlagen zueinander in ein sicheres Verhältnis zu bringen. Es vermag der Schüler dann aus dem Kopfe die ungefähre Breite der einzelnen Punkte, seien es Städte oder Inseln, sich zu vergegenwärtigen und ihre Mittagshöhe, zunächst im Äquinoctium, anzugeben. So verfolgen wir später den Verlauf der Parallelen im Innern des Welttheiles. — Schon jetzt bringen Landschaftsbilder (aus der Sammlung der Hölzel'schen Charakterbilder) die Bedeutung dieser Breitenlagen zu beredter Darstellung.

Ähnlich eindrucksvoll gestaltet sich dem Schüler die große westöstliche Ausdehnung Asiens in der Vorstellung von der großen Verschiedenheit der örtlichen Tageszeiten. Es umfasst ja der Welttheil in jedem Augenblicke eilf Tagesstunden. Das Bestimmen und Vorstellen der augenblicklichen Tageszeiten hat großen Reiz, ebenso an jenem Modelle die Sonnenstellungen über verschiedenen Orten nachzuahmen. Die Schüler bezeichnen am unteren Rande der Karte die Meridiane, welche eine, zwei, drei u. s. w. Stunden gegen uns in der Zeit voraus sind; von dem einen der drei, dem anderen, der sechs Stunden voraus hat, prägen sie sich den Verlauf durch Asien ein. Der letztere geht von der Sundastraße nahe an der Südspitze des Welttheiles vorbei zur Nordspitze.

Bei der Größe der Kugelwölbung, über die sich der weite Erdtheil ausbreitet, leuchtet ein, dass sich sein Bild nicht anders als mit einiger Verzerrung in der Kartenebene darstellen lässt. Die Schüler werden auf dieselbe aufmerksam gemacht. Sie fällt ihnen selbst auf in der gestreckten Form, die Scandinavien oder das östliche Afrika auf der Karte von Asien angenommen hat. Der Betrag dieser Verzerrung lässt sich unmittelbar an der Abweichung der Gradvierecke von der symmetrischen Trapezgestalt, die sie am Globus haben, abmessen: an der Abweichung ihrer Winkel vom rechten die Winkelverschiebung, an dem Überwiegen der einen Diagonale vor der anderen die Abweichungen vom mittleren Maßstabe der Karte. Die Schüler erkennen, dass die richtige Größe der Fläche durchaus gewahrt ist, da die seitlichen Gradvierecke einer Zone den mittleren an Größe gleichkommen; dass ferner am mittleren Meridian, aber auch am mittleren Parallel die Abweichung von

der wahren Form am geringsten ist und erst in der Nähe der Kartenecken eine beträchtliche Größe erreicht.[1])

Wir haben den Welttheil in seinen linearen Ausdehnungen gemessen. Das unmittelbare Maß der Fläche aber ist wieder die Fläche. Ein bequemes Grundmaß, den Flächenraum des Welttheiles zu ermessen, bietet eine jener Inseln, von welchen unsere Betrachtung ausgieng. Denken wir uns und zeichnen mit dem Finger in die Karte eine Insel von der Gestalt Sumatras, aber zehnmal so lang, somit auch zehnmal so breit, so würde eine solche an Geräumigkeit dem Welttheile etwa gleichkommen. Sie besäße aber das Hundertfache der Größe Sumatras. So enthält Asien auch etwa das Hundertfache der Fläche des Schwarzen Meeres oder des Caspischen Sees. Zum Abschätzen der Flächen vergleichen wir auch ein Zehngradfeld am Äquator mit unserer Monarchie; sie enthält (ohne Bosnien) die Hälfte eines solchen Feldes.

Schon haben wir auch, nach dem Augenmaße, die bedeutenderen Inseln nach ihrer Größe aufgezählt, die, welche Großbritannien, dann die, welche Sicilien (oder das Kronland Tirol) übertreffen, herausgelesen; wir zeichnen den Umriß von Ceylon im Maßstabe der Karte von Österreich-Ungarn: es umfasst das Dreifache von Niederösterreich.

Vergleicht man Asiens Flächenraum mit jenem von Afrika und Europa, so verhalten sich die Zahlen, $44^1/_2$ gegen fast 30 und fast zehn Millionen Quadratkilometer, wie $4^1/_2 : 3 : 1$. Da die Karten im gleichen Maßstabe gezeichnet sind, mögen die Schüler auch versuchen, Nord- und Südamerika damit zu vergleichen, indem sie das Bild von Asien durch eine gedachte Querlinie in zwei Hälften theilen: diese Hälften werden schon im Augenmaße die beiden Welttheile überwiegen.

---

[1]) Die in den letzten Jahren vielfach abgünstig beurtheilte Bonne'sche Projection besitzt für die Schule große Vorzüge. Diese liegen nicht nur in der Flächentreue, die vor allem wichtig ist, sondern auch in der Deutlichkeit, mit welcher die Abweichungen von der wahren Gestalt in ihrem Wesen und ihrem Betrage sich kundthun und abmessen lassen. Ein Hauptvorzug ist auch die Einfachheit und Klarheit der Construction, welche die nachahmende Darstellung durch den Schüler, sollte einer Lust haben, die Karte nachzubilden, zu einer einfachen macht.

Wir sahen im Umrisse selbst und seiner Ausdehnung die Beziehung zur Wölbung der Erdoberfläche. In anderer, gestaltender Beziehung steht zum Umrisse das Relief. Jener stellt ja eine Linie gleicher Höhe (Isohypse) dar, gebildet durch den Schnitt des Reliefs mit der wagrechten Meeresfläche.

In den Inseln tritt freilich das Verhältnis zwischen Relief und Umrissbildung viel einfacher und deutlicher vor Augen; so an Sumatra mit dem Längsgebirge, das die Westseite seiner einfach gestreckten Gestalt begleitet (das Gebirge erinnert, um den früheren Vergleich heranzuziehen, an die Cordilleren Amerikas); so bei Borneo, wo dem ausgebreiteten Umrisse mit seinen Hörnern und vorspringenden Ecken das fächerförmige Ausstrahlen der Höhenzüge von der Mitte der nördlichen Küstenkette entspricht. Die Gestalt von Celebes aber drückt am vollkommensten das Gebirgsrelief aus, da hier nicht die Thalungen zwischen den Höhenzügen durch Ebenen ausgefüllt sind. Halb im Scherze kann das Beispiel es bezeichnen, dass sich Borneo in der Gestalt zu Celebes verhalte, wie etwa ein Fuß mit Schwimmhäuten zu einem anderen Vogelfuße. — Allenthalben bilden an den Inseln des Welttheiles Gebirgserhebungen unmittelbar den Umriss des Landes und geben ihm die Weise und Regel der Gebirgsbildung, in Bogen, Fortsetzungen, Reihen, in parallelem Verlaufe, Verzweigung.

So sehen wir auch am Festlande die regelmäßigen, bogenförmigen Küsten von Gebirgen begleitet, durch diese gebildet; wo die Gebirge, fehlt auch solche Bildung. Und wie an den Inseln tritt auch im Umrisse der Halbinseln die unmittelbare Bildung durch Gebirge hervor: an einer einfachen wie Korea, aber auch an einer solchen wie Hinterindien, und sie wäre hier noch ausgeprägter ohne das Schwemmland zwischen den Ketten; Hinterindien würde da in fingerartige, schmale Halbinseln ausgehen. Den Rand von Kleinasien bilden zwei Gebirge, die ein Hochland einschließen, und geben dem Umriss die in schönen Bogen verlaufende Form. Eine andere Gestalt ist Dekan mit seinem dreieckigen, gebirgsumrahmten Hochland; auch die Küsten Arabiens sind von Gebirgen begleitet, welche dieselben Bogen bilden, und die Nordosthalbinsel ist bis an ihr Ende von einer Kette durchzogen, deren Lauf sich in der Küstenlinie nachbildet.

Ein Hauptzug im Bilde Asiens ist die große Gebirgsreihe, welche es vom äußersten Westen bis zur Ostküste

durchzieht, auf der Linie, wo der Welttheil seine größte west-östliche Erstreckung hat; ein anderer hervorspringender Zug, dass vom Pamirplateau, dem Knotenpunkte der Erhebungen aus die großen Gebirgsreihen und [illegible] eine davon in der Achse jenes eingangs beschriebenen Ovals und auf der Linie der größten Ausdehnung Asiens, nach den drei Ecken, der West-, der Nordost- und der Südostspitze des Welttheiles hinziehen, um sich von da aus nach anderen Welttheilen fortzusetzen; derselben Anreihung gemäß, wie sich dieselbe schon in der Lage und den Umrissen der Welttheile zeigte. Vom Pamirplateau messen die Schüler dieselbe Entfernung nach dem Ende des westlichen Zuges im Atlas und cantabrischen Gebirge wie nach dem äußersten Ende asiatischen Gebirges im Südosten, in Timor, und wieder zur Tschuktschenhalbinsel im Nordosten. — Da erinnert Asien von neuem an die Insel Borneo.

Ein dritter Zug im Bilde des Welttheiles tritt deutlicher hervor, vergleichen wir ihn mit dem am einfachsten gestalteten, mit Südamerika. Die drei großen Gebirge bilden den Rand des Dreiecks, welches die Form dieses Welttheiles ausmacht; das Innere breitet sich dazwischen beckenartig aus. Ähnlich zeigt sich die Hauptgestalt von Nordamerika, Afrika, zum Theil von Australien gebildet. In Asien ist aber der Gebirgsrand des großen inneren Landes, des centralen Hochlandes, der sich im Bogen vom Pamirplateau über den Himalaja zum Chingan erstreckt, nicht auch der Rand des Welttheiles. Ein zweiter, paralleler, wenn auch unterbrochener Gebirgsrand ist vorgelagert, der mit seinen Bogen die Küste bildet. Selbst das Küstengebirge des Persischen Golfes, Randgebirge eines anderen, niedrigeren Hochlandes, zieht dem westlichen Himalaja parallel. Dieser äußere Rand fällt mit der einen Hälfte jenes Ovals zusammen, mit dem wir im Anfange den Stamm des Welttheiles umgrenzten. Ein äußerster, bereits im Meere liegender Hochrand aber ist die Reihe jener Inselketten im Osten, welche durch Tiefenrinnen die Randmeere vom Continent geschieden, doch an jene Küstengebirge sich mehrfach anschließend (so liegt auch Japan im Streichen des südchinesischen Gebirges), den Welttheil gegen die Tiefen des Oceans abgrenzen.

Dieser Rand liegt dem großen westöstlichen Zuge in der Quere. Hier wieder gehen von dieser mittleren und Hauptreihe an [illegible] Gebirge quer nach Süden ab, nach den drei

großen südlichen Halbinseln hin: das syrische Gebirge, welches in das westliche Küstengebirge Arabiens übergeht; das Gebirge, das den Indus südwärts begleitet: seinem Zuge parallel streicht dann das westliche Küstengebirge von Dekan; am Ostende des Himalaja aber bricht eine ganze Schar paralleler Ketten südwärts hervor, um die Ränder und vorgestreckten Spitzen der hinterindischen Halbinsel zu bilden.

Wir beobachteten früher die Halbinseln auf ihren Umriss hin, ob ihr Zusammenhang mit dem Ganzen des Welttheiles ein breiter oder schmaler sei; nun schauen wir, wie sich in ihrem Gebirge der Zusammenhang mit dem Hochrelief des Festlandes darthue. Von den am innigsten verbundenen, wie Kleinasien, dem vorspringenden Ende des großen Gebirgs- und Hochlandzuges, oder Hinterindien, dessen Gebirge so tief in das Innere des Continentes eindringen, stuft sich das ab bis zu dem selbständigeren Arabien, dessen Gebirge aber doch denen des Hauptstammes parallel ziehen und sich anschließen, und zu Dekan, das wie ein eigenes Ganzes dem Hochland des Continentes gegenüberliegt; aber doch ziehen seine Gebirge am West- und Ostrande und die vom Continent, am Indus und Brahmaputra, sich entgegen.

Im Norden Asiens aber liegen dem Rande des Gebirgs- und Hochlandes niedrige Ausläufer und weite Ebenen vor. Da hat auch die Küste jene regelmäßigen und charakteristischen Formen eingebüßt, ähnlich wie der neusibirischen Inselgruppe jene klare Anordnung der östlichen Inselketten fehlt.

Denkt man sich das Meeresniveau um wenige hundert Meter gestiegen, so wären die Umrisse des Welttheiles weit mehr noch als jetzt die seiner großen Hochländer und durchaus durch den Zug der Gebirge bestimmt. Die Karte stellt es im Farbentone dar, mit dem sie das Tiefland bezeichnet. Hinterindien wäre in Gebirgshalbinseln fingerartig zertheilt, Dekan eine Insel (im Süden hätte sich ein zweites Ceylon gebildet, wie aus Malakka ein anderes, kleineres Sumatra geworden wäre), der Himalaja ein bogenförmiges Küstengebirge und Mesopotamien wäre der verlängerte Persische Golf. Das nördliche Meer wie der Indische Ocean würden an den Gebirgs-Isthmus des Hindukusch vordringen, der das vordere und das große centrale Hochland aneinander knüpft.

Wird die Anordnung des Gebirges auf der Tafel

entworfen, so entsteht daraus das deutlichste Bild vom Umrisse des Welttheiles. Wir gehen im Zeichnen von den Randgebirgen des Hochlandes von Tibet, dann des großen Hochlandes aus, fügen daran die große westliche Gebirgsreihe mit den anscharenden Gebirgen, die Züge, die quer nach Süden auslaufen, ferner den nordöstlichen und noch vorliegende Küsten- und Halbinselgebirge. Der vereinsamte Ural vollendet das Bild im Norden, so dass es auch hier keine Lücke lässt, zumal wenn das niedrige Gebirge der Taimyrhalbinsel und jenes, welches die Lena nordwärts begleitet, hinzugefügt wird. Wir deuten noch die östlichen Randmeere durch einige horizontale Schraffen an und grenzen sie durch die als Bogenlinien verzeichneten Inselketten ab.

Vom Umriss aus erstrecken sich in das Innere, vom Relief abhängig und ein Ausdruck desselben, die Flusslinien.

Nach den innersten Küstenpunkten ist im allgemeinen das Gefälle des Landes stärker und dahin pflegt die Thalung des Landes zu gehen, der Fluss sich zu wenden: sind ja die Meerbusen mit ihrer Eintiefung meist das fortgesetzte Thal. Auf die Frage nun, welchen Flüssen das Meer in Buchten entgegenkommt, erblicken wir die Erscheinung recht ausgeprägt am Persischen Golfe, dessen gerade Fortsetzung die beiden Flussläufe sind, am Golf von Akaba, den aber der Fluss nicht erreicht, am Obischen Meerbusen, wo Golf und Fluss sich einander entgegenwenden; aber auch an einem so weiten offenen Meerbusen, wie der von Bengalen, in dessen innersten Winkel zwei mächtige Ströme sich ergießen. Selten erblicken wir tief eindringende Golfe ohne bedeutenden Zufluss, wie die der Ochotsker See. Doch sehen wir den Golf von Tonking, die Bucht von Iskenderun von den nahen größeren Flüssen, dem Jangtsekiang und dem Mekong, dem Euphrat und Kisil-Irmak erst aufgesucht, dann wie geflohen, jene beiden östlichen Ströme vielmehr an die Spitze eines Vorlandes und einer Halbinsel hinausziehend. Im ganzen scheinen die Meerbusen weniger Zusammenhang mit dem Relief des Welttheiles in seinen Thalungen zu haben, als die Halbinseln ihn besitzen mit seinen Gebirgen.

Küstengebirge sind es, welche den Jangtsekiang und den Mekong vom Meere von Tonking abhalten und nach einem

anderen Meere hinausweisen; so auch den Euphrat vom Mittelmeere. Wir fragten schon im früheren Jahre, in der Übersicht über die Flüsse der Erde, nach der Lage derselben zu Meeren: welche in das nächste Meer fließen, welche in ein entfernteres; einige, wie der Niger und der Kisil-Irmak, wenden sich vom Meere weg und dann demselben Meere wieder zu. Da sehen wir alle größeren Flüsse des Welttheiles, mit Ausnahme des Ob, vom nächsten Meere durch Gebirge abgewiesen und dadurch einer größeren Stromentwicklung theilhaftig werden. In solchem Maße tritt aber die Erscheinung nicht auf wie bei den afrikanischen Strömen oder zumal beim Amazonenstrom, der aus unmittelbarer Nähe des Meeres quer durch den Welttheil nach dessen gegenüberliegendem Rande fließt. Wie es Asiens Relief, der centralen Lage seines großen Beckens entspricht, gehen seine Ströme mehr radial von der Mitte aus und der Welttheil gelangt nicht zu Stromentwicklungen, die seiner Ausdehnung entsprechen würden, verglichen mit den Strömen anderer Welttheile, bei denen der Rand des inneren Beckens zugleich den Festlandsrand bildet.

Die Flüsse selbst sind es übrigens, welche durch ihre Anschwemmungen die eigene Mündung ins Meer hinausschieben und das Eindringen der Meerbusen in das Land verwischen. Das Delta des Mekong und der Lena sind sogar als Halbinseln ins Meer hinausgebaut; durch das Gangesdelta ist der Bengalische Meerbusen abgestumpft, durch die Anschwemmungen der beiden chinesischen Ströme Schantung landfest gemacht. Die Flüsse ändern wie am Relief, so am Umriss. Zumal im Süden des Welttheiles, wo die Erosion so bedeutend ist und die Pflanzenwelt die Schwemmstoffe leicht an den Küsten festhält, ist diese Wirksamkeit sehr eingreifend; daher stammen auch die feinen ein- und ausgehenden Bogenlinien der Küste in der Nähe von Flussmündungen, die Abrundung der Meerbusen. Manchen Küstengebirgen ist Schwemmland vorgelagert, die Zahl der guten Landungsstellen dadurch vermindert.

Nicht nur sind aber jene Flussniederungen die wichtigsten, volk- und geschichtsreichsten Gegenden des Welttheiles, die Ströme und ihre Thäler sind es auch, welche das Innere des Welttheiles zugänglicher machen, die fühlbare Meeresferne der inneren Gegenden vermindern, während Küstengebirge sie, nicht bloß für den Verkehr, vergrößern: als ob durch beides die Gestalt des Umrisses verändert würde.

Wir fragen uns, wie weit die längsten Flusssysteme in das Innere des Welttheiles vordringen. Keines erreicht die Mitte desselben. Das unterscheidet diesen Welttheil von den anderen. Hier wirkt nicht so sehr die Weite seiner Fläche unmittelbar mit, als (außer der Natur der Hochebenen) die durch den mehrfachen Gebirgsgürtel vergrößerte Abschließung gegen die Seewinde; die in gewissen Breiten vorherrschenden Winde werden durch die Größe der Landfläche und jene Gebirge zu trockenen continentalen. So erblicken wir im Innern des Welttheiles, ja auch in der Nähe von Küsten eine weite Zone ohne Abfluss nach dem Meere.

Beim Vergleiche der Halbinseln werden wir auf solche aufmerksam, deren Flüsse vom einen höheren Rande zum anderen quer abfließen, wie Dekan und die Nordosthalbinsel. Dekan steht wie in allem übrigen auch hier die Nachbarhalbinsel charakteristisch gegenüber: die Flüsse strömen in dieser der Länge nach, den Küsten und Gebirgen parallel. Betrachten wir den Welttheil auf dieses hin, so erkennen wir ein solches Querabfließen nur auf der Nordseite, von der gebirgigen Mittellinie jenes öfter erwähnten Ovals aus. In der Südhälfte des Ovals herrscht die Längsrichtung gegen Osten, den Gebirgen nach, vor.

Eine andere Gestaltung, welche das Kartenbild des Welttheiles unmittelbar darbietet und an deren Abgrenzung sein Umriss den entschiedensten Antheil hat, sind die Staatsgebiete. Es leuchtet aus der Karte selbst deutlich hervor, wie sie an der Küste sich am leichtesten ausbreiten oder sich auszubreiten streben. So zeigt es das Übergreifen des russischen Reiches auf die mandschurische Küste, des indo-britischen auf die Küste von Tenasserim, des türkischen Reiches auf die arabischen Küsten, Siams nach Malakka hin. Die Küste Asiens ist, mit Ausnahme des wüsten Mekran, des durch eine Wüste geschützten Südufers Arabiens und des fast wie eine Insel isolierten Malakka oder Korea ganz von größeren Staaten besetzt.[1])

---

[1]) Es ist nicht für die Schüler, sonst wiese nicht nur die Karte von Asien, sondern auch die alte Geschichte des Orients darauf hin, dass nicht leicht ein größerer Staat einen kleineren zwischen sich und der Küste duldet. Die Vasallenstaaten Indiens sind, Cotschin ausgenommen, im Inneren des Landes.

Wir sehen in Nordamerika die Staaten über alle Hindernisse der Gebirge hinweg sich von Ocean zu Ocean spannen, in Europa mehrere, nicht nur am schmalen Ende, einen auch in dessen größter Breite, vom südlichen, inneren, zum nördlichen, äußeren Meere hinüberreichen. Bei der gewaltigen Breite Asiens und den großen Hindernissen, welche sein Relief bietet — jene dreifache Gebirgslinie, die vom Pamirplateau ausgeht, ist auch eine Hauptgrenzlinie der Staaten —, gelingt dies nur gegen die schmäleren Enden hin; das russische Reich langt vom Eismeer zum Großen Ocean hinüber, das türkische von den Binnenmeeren des Atlantischen Oceans zu jenen des Indischen. Von diesem zum Großen reicht das indo-britische Reich nicht hinüber, an der anderen Seite der trennenden Halbinsel hat sich ein anderer europäischer Staat festgesetzt. Nur Singapore an deren Spitze ist in englischem Besitz.

Wir fragen uns, wie zum Theil schon im früheren Jahre bei Europa, welche von den Staaten des Welttheiles ganz von Meer umgrenzt sind, welche andere wieder das Meer nicht erreichen; bei welchen hinwieder die Land-, bei welchen die Seegrenze überwiege, bei welchen sie sich ungefähr das Gleichgewicht halten. Bei einem der großen Staaten, dem chinesischen Reiche, überwiegt die Landgrenze bei weitem, bei Russisch-Asien und Britisch-Indien herrscht fast Gleichgewicht. Sieht man von den Inselstaaten (dem niederländischen und spanischen Besitz und Japan) und dem kleinen Halbinselstaat Korea ab, so kennzeichnet in dem Erdtheile kaum ein Gebiet ein entschiedenes Vorwiegen der Küstengrenze.

Kein Welttheil, auch Nordamerika nicht, enthält so gewaltige Staatsgebiete wie Asien. Fast zwei Drittel seiner Fläche sind von zwei Staaten eingenommen, die vom Meere in das tiefste Innere hineinreichen, ja bis in einige Nähe des fern gegenüberliegenden Meeres vordringen (11—14 Gerade vom Indisch-arabischen Meere entfernt). Sie breiten sich dort aus, wo der Welttheil im Umriss am massigsten und in den inneren Formen am großartigsten ist. Das übrige ist an eine Reihe anderer Staaten von bedeutender Größe vertheilt; und hier zeigt sich, bei stärkerer Gliederung, die Küste in höherem Maße staatenbegrenzend.

Die europäischen Besitzungen haben sich von der Küste ins Innere hinein ausgebreitet und der Sitz der Regierung ist

am Meere gelegen. Doch auch im einheimischen, vom Innern des Erdtheiles aus gegründeten chinesischen Staate hat die Hauptstadt eine ähnliche Lage.

Es wurde früher angedeutet, wie die große nordsüdliche Erstreckung des Welttheiles in der Stellung der Sonnenbahnen in der Gestaltung des Jahres zu gewaltiger Wirkung komme, und wurde auf Landschaftsbilder hingewiesen, welche, gegeneinander gehalten, diese Abstufung der Klimate verschiedener Breiten in schöner Weise zeigen. Gleich eindrucksvoll werden aber ein paar Linien, welche das Bild des Welttheiles auf der Wandkarte durchziehen: die Polargrenze des Baumwuchses, die des Getreidebaues, des Weinstockes, der Palmen. Auch die Südgrenze des Schnees, die Nordgrenze des Regens sind eingetragen. — Die Schüler erinnern sich der ersten Schulstunde des früheren Jahres, als Gruppen von Gegenständen der Geographie aufgestellt wurden und wir von dem Berge und seinen Höhenregionen die Hauptformen des Pflanzenkleides, von den Höhen des nackten Felsens bis zu den Weingärten am untersten Abhange entnahmen. Der Erdtheil bietet ein solches Bild wie ein Berg, an dem die Schneebedeckung mit den Jahreszeiten hinabrückt und zurückweicht, dessen Höhen baumlos sind, an dessen mittlerem Abhang der Weinbau beginnt, der mit dem Fuß in die Region tropischer Gewächse hinabreicht. Nur dass am Berge die rasche Temperaturänderung der Luft, die Wirkung der Kälte des nahen Weltraumes, die Vegetationszonen einander so nahe rückt, zum Überblicken mit dem Auge, während in horizontaler Ausdehnung nur die Abwölbung des Welttheiles von den Sonnenstrahlen weg (ähnlich der Abschattierung einer Kugel dem Lichte gegenüber) eine ähnliche Wirkung hat, aber in Räumen, deren Erstreckung die Erhebung des höchsten Gebirges um das Tausendfache übertrifft.

An demselben Beispiele vom Berge nahmen wir in jener ersten Schulstunde auch die Abstufung der menschlichen Ansiedelung wahr: von den Hütten auf den Höhen herab zu den Einzelhöfen, den Weilern, zu den Dörfern und der Stadt am Fuße. Daran erinnert die Einsamkeit Nordasiens, die Kleinheit der nördlichsten Ansiedelungen, das Nomadenleben in jenen Strichen, die nach dem Süden hin wachsende Anzahl und Größe der Städte, der zunehmende Verkehr.

Die Vereinsamung sehen wir aber auch von der Küste nach dem Innern hin zunehmen. Den reichsten Kranz von Städten bietet der Umriss selbst und es sind einige küstennahe und Uferländer im Süden und Südosten, welche weitaus den größten Theil der Bevölkerung Asiens umfassen.

Jene Gebiete des Innern sind es, welche durch ihre Unwegsamkeit die gegenseitige Entlegenheit der Küsten steigern, als ob die Weite der Räume, das Massige der Umrissgestalt dadurch gewachsen wäre. Um so größere Bedeutung haben einzelne Handelsstraßen des Binnenlandes erhalten, die quer durch den Erdtheil nach jenen bevölkerten Ländern ziehen.

An der öden Nordküste ist auch das Meer schwer zugänglich; ein einziges Schiff hat diese Küste ganz umfahren. Für den Welttheil ist es ein entscheidender Umstand, fast ein Verhängnis, dass gerade jener Theil seines Umrisses, nach welchem sich das Binnenland in weiten Ebenen und großen Strömen am meisten aufthut, selbst todt und so wenig wirksam und geeignet ist, dieses Innere zu beleben; nicht einmal befruchtenden Regen kann die Mitte von jenem Meere erhalten.

Alle Gunst scheint sich dagegen auf jenen Südosten zu vereinigen, von Vorderindien bis Japan. Die tiefeingreifenden, reichlichen Regen bringenden Meerbusen und Randmeere zweier Oceane treffen eine günstige Gestaltung des Reliefs, welche diesen Ländern zuwendet, was dem Innern entzogen wird; fruchtbare Stromebenen schließen sich an die Meerbusen an. Durch diese Buchten, durch die gewaltigen Halbinseln und jene Inselwelt hat hier die Küste eine reiche Entfaltung, fast die reichste der Erde, erhalten und ist eine Fülle reicher Uferländer geschaffen. Ist es zwar eine Schmälerung dieser Gaben, dass die Länder abseits liegen, nach zwei weiten öden Oceanen hinausschauen und nur das kleine ärmliche Australien sich gegenüber haben, so ist doch wieder durch jene Zone von Binnenmeeren quer durch den Continent, in welcher das Rothe Meer und der Persische Golf ein so wichtiges Glied sind, ein Weg dahin geschaffen worden, und was das Relief im Innern trennt, findet sich durch diese günstige Gestaltung verbunden: jene Länder im Südosten und die begünstigten europäischen im Westen des Continentes, Nebenbuhler im Reichthum des Küstenumrisses.

So nahm von alten Zeiten an ein reger Verkehr diesen

Weg. Die Europäer fanden dann den ununterbrochenen Seeweg um Afrika herum. Nun ist aber durch Menschenhand das letzte Hindernis des Seeweges durch den Continent selbst beseitigt und der Suezkanal ist die bedeutungsvollste Strecke im Umrisse Asiens geworden.

Die Europäer haben von den Halbinseln und Inseln Südostasiens Besitz genommen. Aber auch im Norden ist von Europa aus ein ungeheueres Staatsgebiet gegründet worden, eben dort, wo der Umriss Asiens nicht abgeschlossen ist und breit mit dem großen europäischen Binnenreich zusammenhängt. Es ist immer weiter gegen jene reicheren Striche vorgedrungen.

Die Schüler erfahren schon auf dieser Stufe aus der Geschichte die Bedeutung der Landbrücke nach Europa, der Halbinsel Kleinasien: die entscheidungsvollsten Ereignisse knüpfen sich daran; bedeutungsvoll und eine der ereignisreichsten Stellen der Erde wurde auch der Riss, welchen die Meerengen nach dem Pontus in diese Verbindung machen. Auch die Bedeutung der Landenge nach Afrika führen ihnen große Ereignisse vor Augen. Heute sind es jene einzigen Stellen, wo ein asiatisches Staatsgebiet nach Europa und nach Afrika hinübergreift.

Die weite Erstreckung Asiens nach Nordosten hin, nach dem nördlichen Amerika, und gegen Südosten, Australien zu, ist bei der Art jener anschließenden Erdstriche von geringer geschichtlicher Bedeutung geworden, wenn nicht für die Verbreitung der Völker.

Es ist hier, in der Betrachtung des Umrisses, aus der Behandlung des Welttheiles ein Theil herausgegriffen worden, in welchem sich diese neue Stufe des Unterrichtes von der ersten besonders deutlich abhebt. Wir fassten den Umriss zunächst einfach auf seine Linien und seine Ausdehnung hin ins Auge, dann in seiner Beziehung zum Innern, zu Relief und Stromläufen, zu Breitenzonen und Staaten. Jene Linien sollten den Schülern an sich von Interesse werden und sich anschaulich dem Gedächtnisse einprägen, noch mehr aber durch die Bedeutung, welche die gedachten Beziehungen ihnen geben.

IV.

Über systematische Behandlung der Begriffslehre im Logikunterricht.

Von

Gustav Spengler,

Professor am k. k. deutschen Staatsgymnasium auf der Neustadt (Stephansgasse) in Prag.

„Formeln ohne concrete Anschauung sind freilich eine gefährliche Sache, aber andererseits ist es doch Aufgabe des Unterrichtes, zur Formung der gegebenen Anschauung anzuleiten."
Fr. Paulsen, Gesch. d. gel. Unterr. S. 770.

Durch die neuesten preußischen Lehrpläne vom Jahre 1891 hat sich der Gymnasialunterricht im Deutschen Reiche neuerdings in einer Reihe von Einzeleinrichtungen derjenigen Gestaltung angenähert, welche der österreichische Gymnasialunterricht durch den Organisationsentwurf vom Jahre 1849 empfangen hatte. In einem Punkte aber ist die Divergenz noch größer als früher: Die preußischen Gymnasien besitzen seit 1891 keinen Unterricht in der philosophischen Propädeutik mehr. Noch in den Lehrplänen von 1882 war seine Ausscheidung als facultativ erklärt worden, worüber sich Paulsen (a. a. O. S. 772) so äußert: „Ganz mit Recht will der jüngste preußische Lehrplan, so sehr er von Möglichkeit und Nothwendigkeit eines elementaren philosophischen Unterrichtes am Gymnasium überhaupt überzeugt ist, ihn doch lieber gar nicht als von einem unberufenen Lehrer ertheilen lassen." Die „Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen nebst Erläuterungen und Ausführungsbestimmungen" (Berlin 1891) S. 18 sagen dagegen: „Die auf allen Stufen neben der Dichtung zu pflegende Prosalectüre hat den Gedanken- und Gesichtskreis des Schülers zu erweitern und zumal auf der Oberstufe den Stoff für Erörterung wichtiger

allgemeiner Begriffe und Ideen zu bieten. Zweckmäßig geleitet kann diese Lectüre in der Prima die oft recht unfruchtbar betriebene und als besondere Lehraufgabe hier ausgeschiedene philosophische Propädeutik ersetzen."

Wenn man annehmen wollte, dass es die Absicht der preußischen Schulpolitik gewesen sei, dieses Ende eines Jahrhunderte alten Unterrichtsgegenstandes an den höheren Anstalten allmählich vorzubereiten, so könnte man in jenen Verfügungen, welche die Propädeutik zu einem Anhängsel des Deutschunterrichtes machten und ihn so, wie Meinong in seinem Buche „Über philosophische Wissenschaft und ihre Propädeutik" gezeigt hat, in eine Lage brachten, in der auch jeder andere Unterrichtsgegenstand verkümmern und endlich absterben müsste, den planmäßigen Anfang vom Ende erblicken.

Auch die österreichischen Instructionen vom Jahre 1884 haben sich eingehend mit der einstigen und der künftigen Stellung der philosophischen Propädeutik im Gymnasialunterrichte beschäftigt. Oberste Prämisse für die beabsichtigte Reform bildet aber hiebei der Satz:[1] „Dass die Aufnahme eines philosophisch-propädeutischen Unterrichtes in den Kreis der Lehrthätigkeit des Gymnasiums erwünscht sei, darüber herrscht gegenwärtig in den Kreisen derer, die am meisten berufen sind, darüber zu urtheilen, keinerlei Zweifel...." Wiewohl nun jene Instructionen von 1884 immerhin gleichfalls der philosophischen Propädeutik gegenüber eine Ausnahmsstellung einhalten, indem der auf diesen einen Gegenstand bezügliche Theil des Instructionenwerkes sich nur als Provisorium einführte und auch bis zum heutigen Tage nur Provisorium geblieben ist, so haben doch die dort gegebenen Anregungen das Erscheinen von Lehrbüchern veranlasst, welche die in den Instructionen nur angedeuteten Lehrstoffe dem gegenwärtigen Stand der logischen Wissenschaft gemäß und zugleich in schulgerechter Form zu bieten suchen. Zwei von ihnen haben die behördliche Approbation und Eingang in den Unterricht gefunden.

Gegenstand der nachfolgenden Darstellung soll es sein, über die Erfahrungen zu berichten, wie sich der Unterricht in der Begriffslehre, einem von jeher als von beträchtlichen Schwierigkeiten umgebenen Capitel der Logik, gestaltet, wenn er die

[1]) S. 397 der Pichlerischen Ausgabe.

diesbezüglichen Winke der Instructionen (S. 400) befolgt. Es heißt daselbst: „Was die Logik selbst anbelangt, so ist durch die psychologische Einleitung zunächst ein verlässlicher Boden geschaffen für die Lehre vom Begriff. Diese hat, soweit die Verständnisbedingungen vorhanden sind, außer der sorgfältigsten Classification der Begriffe, welche allerdings in den meisten gangbaren Lehrbüchern der propädeutischen Logik nur unvollkommen geboten wird, auch auf die Entstehung des Begriffes näher einzugehen; denn nur so lassen sich die Operationen der Abstraction und Determination in anderem als bloß mechanischem Sinne erläutern. Hand in Hand mit der Aufführung der Begriffsclassen geht natürlich die Demonstration der Begriffsverhältnisse, beziehungsweise Begriffsgegensätze, indem sich naturgemäß eine ganze Reihe von contradictorischen Gegensatzpaaren darbietet. Besondere Beachtung erheischen die wichtigen Grundbegriffe der Naturwissenschaft, wie z. B. Raum, Zeit, Zahl, Veränderung, Bewegung, Kraft, auf welche auch bei der Lehre vom Definieren zurückzukommen ist, ferner die überaus mannigfaltige Classe der Relationsbegriffe (z. B. links — rechts, heute — gestern, klein — groß, Nutzen — Schaden, Ursache — Wirkung, Grund — Folge, Vater — Sohn... u. dgl. m.).

Wie es überhaupt erwünscht ist, dass der Unterricht in der Logik sich ergänzend und vertiefend an das grammatische Wissen der Schüler anschließe, so sind auch schon in der Lehre vom Begriffe ungezwungene Anknüpfungen herzustellen. So werden z. B. bei der Lehre von der Determination die höchst mannigfaltigen Functionen einer und derselben grammatischen Attributspecies, etwa des attributiven Genetivs, vom logischen Standpunkte aus zu würdigen sein, und dies veranlasst zugleich zu zeigen, wie nicht selten Sprache und Grammatik weit hinter dem logischen Gehalte der Gedanken zurückbleibt, wogegen freilich auch jene Fälle zu beleuchten sind, wo das umgekehrte Verhältnis stattfindet. Bei den Classenbegriffen ist die Veranschaulichung der Umfangsverhältnisse durch Kreisflächen sehr zweckmäßig. Ob die Lehre von der Definition und Division (Partition, Disposition) unmittelbar an die Lehre vom Begriff anzuschließen oder in die sogenannte Systematik zu verweisen sei, darüber mag die Wahl und der Takt des Lehrers, beziehungsweise des Lehrbuches entscheiden; beide Wege haben eben ihre eigenthümlichen Vortheile."

Ich habe den Unterricht nach dem einen jener zwei Lehrbücher, den „Grundlehren der Logik“ von Al. Höfler ertheilt und bin in der Lage, im folgenden durchaus praktisch Erprobtes zur Kenntnis der geehrten Fachgenossen zu bringen, da ich mich jenes Buches bereits durch anderthalb Jahre bediente. Daran soll sich gegen Schluss eine Erwägung knüpfen, ob einer derartigen systematischen Behandlung der Begriffslehre und somit wohl auch der übrigen Capitel der Logik in pädagogisch-didaktischer Hinsicht vor der gelegentlichen Angliederung logischer Einzelunterweisungen, wie man sie bis vor den preußischen Lehrplänen von 1891 gepflegt hatte, nicht doch aus allgemein überzeugenden Gründen der Vorzug zuzuerkennen sei.

Die Lehre vom Begriffe bildet den ersten (nicht, wie es z. B. noch von Sigwart verlangt wurde, den zweiten, den Urtheilen erst folgenden) Theil der logischen Elementarlehre. Es geht diesem ersten Capitel gemäß der Forderung der Instructionen bei Höfler eine psychologische Einleitung zur Logik voraus, aus welcher für die speciellen Zwecke der Begriffslehre namentlich in Betracht kommen die Paragraphe 1. Physische und Psychische Erscheinungen. 5. Denken, Vorstellungen und Urtheile. 6. Denkact und Denkinhalt. 8. Aufmerksamkeit. 9. Denken und Sprechen. Die Begriffslehre selbst setzt bei Höfler mit der Frage ein „Was ist ein Begriff?“, auf welche die Antwort lautet: Begriffe sind Vorstellungen von eindeutig bestimmtem Inhalte.

Es folgen die Paragraphe: 15. Analyse der Vorstellungen. Die psychologische Thätigkeit des Abstrahierens, abstracte und concrete, anschauliche und unanschauliche Vorstellungen. 16. Die psychologische Abstraction als Mittel logischer Begriffsbildung; Inhalt des Begriffes. 17. Individuelle und allgemeine Vorstellungen; Umfang der Vorstellungen.

Von diesen Paragraphen empfiehlt Höfler selbst in seinem Aufsatze „Zur Reform der Propädeutik“ [1]) im mündlichen Unterrichte nicht sogleich nach der angegebenen Reihenfolge, wobei die angedeuteten Probleme im synthetischen Wege behandelt werden, sondern nach analytischer Methode, also in annähernd umgekehrter Reihenfolge Gebrauch zu machen.

[1]) Zeitschr. f. d. österr. Gymn. 1890.

Ich habe diesen Rath in folgender Weise verwirklicht:

Ich ließ durch einen Schüler irgend einen elementaren Beweis der Geometrie, etwa den Beweis, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° sei, an einem Dreiecke an der Tafel skizzieren. Von diesem ausgehend, stellt der Lehrer an die Schüler die Frage, wodurch dieselben sich berechtigt sehen, den bewiesenen Satz, dessen Giltigkeit doch nur an diesem bestimmten, mit Kreide gezeichneten Dreiecke erwiesen sei, als für alle Dreiecke giltig zu erkennen. Durch den Lehrer, der ja das Ziel der Unterredung kennt, nach dialogischer Unterrichtsmethode auf die richtige Bahn geleitet, lässt ein intelligenterer Schüler, wie es in der Classe des Verfassers geschah, sich etwa so vernehmen: „Deshalb, weil man während des Beweisführens nicht daran denkt, dass es gerade dieses Dreieck hier auf der Tafel mit diesen Dimensionen, mit diesen Winkeln etc. sei.“ Ob nun die Antwort so oder anders ausfällt, immer wird der Lehrer Gelegenheit haben, den Schülern zu zeigen, dass es dabei auf ein Ablenken der Aufmerksamkeit von bestimmten Merkmalen und auf ein Hinlenken derselben auf andere ankomme.

Leicht wird nun dem Schüler die Antwort auf die Frage, warum man das Wort „Dreieck“ in gleicher Weise von irgend welchem spitz-, stumpf-, rechtwinkeligen, gleichseitigen, ungleichseitigen, ebenen, sphärischen etc. Dreiecke gebrauchen könne. So kommt der Schüler zur Erkenntnis, dass die Allgemeinheit ihren Grund in dem oben bezeichneten Verhalten der Aufmerksamkeit habe, das schon in der psychologischen Einleitung allgemeiner charakterisiert wurde und das sich nun als das Wesentliche des Abstractionsactes herausstellt. Hat nun der Lehrer noch Gelegenheit, die Lectüre des IV. Lesestückes in dem Anhange zu Höflers Logik (zehn Lesestücke aus philos. Classikern) „Berkleys Untersuchung über die abstracten Vorstellungen“ anzufügen, so hat er nicht nur das Verständnis der Abstraction, sondern auch manches Grundlegende für die richtige Erfassung des Wesens des Begriffes bei den Schülern erreicht. Denn nun kann auf den verschiedenen Gebrauch des Wortes „Abstraction“ näher eingegangen, aber auch von der Analyse zusammengesetzter Vorstellungen mit Hilfe der Abstraction gesprochen werden. Jetzt lässt sich auch die concrete im Gegensatze zur abstracten Vorstellung einfach als diejenige bestimmen, an welcher noch keinerlei Abstraction vollzogen

wurde. Dabei sind die concreten Vorstellungen anschaulich, die abstracten unanschaulich, wie durch Vorführung einfacher Beispiele schon jetzt klar wird. Die abstracte Idee des Dreieckes lässt sich nicht anschaulich vorstellen, sondern nur so, dass eine bestimmte anschauliche Vorstellung eines Dreieckes, die neben den Merkmalen des Begriffes des Dreieckes auch noch individualisierende enthält, vorgestellt und hierauf an ihr der beschriebene Abstractionsact vollzogen wird. Also: Ohne anschauliches Substrat ist kein Begriff für sich vorstellbar. Hat der größtentheils erotematisch gehaltene Unterricht bis zu diesem Punkte das Verständnis der Schüler erzielt, so geht er nach diesen vorbereitenden Erörterungen zu der Besprechung der Frage: „Was ist ein Begriff?“ Zunächst zeigt er an naheliegenden Beispielen, dass „Wort“ und „Begriff“ nicht dasselbe sei, weiter, dass der Begriff eine „Vorstellung“ und nicht etwas außer dem Denken Bestehendes sei. Schon jetzt kann man zur Übung verschiedene aus den Schulwissenschaften geläufige Definitionen[1]) zur Veranschaulichung des Gesagten herbeiziehen. An der Hand dieser Beispiele wird auch dem Schüler klar, dass wohl der Inhalt des Begriffes für alle der „gleiche“ aber nicht „derselbe“ ist. Damit nun der Begriff für alle gleich sei, muss er, wie wieder an Beispielen und besonders an den „schwankenden“ Vorstellungen von den einzelnen Gegenständen im praktischen Leben gezeigt werden kann, „eindeutig bestimmt“ sein; womit die eingangs angeführte Definition des Begriffes gewonnen ist. Wodurch aber dieser Vorstellungsinhalt eindeutig bestimmt wird, ersieht der Schüler leicht an einer Reihe von Beispielen unter Hinweis auf das über die Abstraction Erörterte, er erkennt, dass die eindeutige Bestimmtheit durch eine auf dem Wege der Abstraction getroffene bestimmte Auswahl von Merkmalen erzielt wird. Wenn die Auswahl nämlich eine solche ist, dass jedes Hinwegnehmen oder jedes Hinzufügen von Merkmalen den Begriff als eine andere abstracte Vorstellung erscheinen lässt, dann liegt eine eindeutig bestimmte Vorstellung vor.

Der Inbegriff dieser Merkmale ist aber der Inhalt des Begriffes. Auf diesem Wege erfährt der Schüler, dass das Erste, wozu er durch psychologische Abstraction bei der Begriffsbildung gelangt, der Inhalt und nicht der Umfang des Begriffes,

---

[1]) Höfler, Grundlehren der Logik, p. 29.

der Inhalt daher das Primäre sei. — Wie können nun einer Vorstellung z. B. vom Dreiecke mehrere Gegenstände entsprechen, ist die nächste Frage. Diese findet nun, schon einmal im Unterrichte erwähnt, ihre nähere Beleuchtung, indem gezeigt wird, dass dies nur nach vorausgegangener Abstraction möglich sei. Ist die Vorstellung „Mensch“ abstract, so kann sie ebenso aus der individuellen Vorstellung J_1 von A, wie aus J_2 von B etc. gewonnen sein und bezieht sich in diesem Sinne auf die Gegenstände $A, B, C\ldots$; der Umfang ist demgemäß der Inbegriff aller Gegenstände, welche einer Vorstellung vom bestimmten Inhalte entsprechen.

Die Unterscheidung von Individual- und Allgemeinbegriffen und die nochmals hervorgehobene Scheidung der Termini „abstract“ und „allgemein“, die häufig verwechselt werden, schließt die Erörterung über Inhalt und Umfang der Begriffe, so dass das Verständnis ohne jegliche metaphysische Voraussetzung erzielt ist.

Nun lässt der Lehrer von den Schülern die Abstraction, die bisher zum Zwecke der Bildung der Begriffe an Vorstellungen vollzogen wurde, an logischen Vorstellungen (Begriffen) vornehmen und nennt letztere im Gegensatze zur ersteren psychologischen die logische Abstraction. Invers zur logischen Abstraction, durch welche wieder eine Auswahl, somit ein Absehen von Merkmalen erfolgt, ist die logische Determination, durch welche Merkmale hinzugefügt werden.

Durch erstere Operation geht aus der Art die Gattung, durch letztere aus der Gattung die Art hervor. Die so definierte Beziehung zwischen Gattung und Art trifft deren Inhalte, hat aber unmittelbar das Umfangsverhältnis von Unter- und Überordnung zur Folge. Nur darf sich nach den Auseinandersetzungen in Meinongs Humestudien I[1]) der Lehrer nicht mehr mit dem bis in die jüngste Zeit in den Logiklehrbüchern gebräuchlichen Ausdrucke der Beziehung zwischen Umfang und Inhalt zweier Begriffe, wonach diese in umgekehrtem Verhältnisse zu einander stehen, zufriedenstellen. Dass nämlich die Regel „Inhalt und Umfang stehen im verkehrten Verhältnisse“ wirklich nur in der Regel und nicht immer giltig sei, darüber klären folgende von Höfler herangezogene Beispiele auf. Dem Begriffs-

[1]) Sitzungsber. der Akademie der Wissenschaften in Wien 1877, p. 211.

[illegible] überhaupt [illegible] Höfler hat diesen [illegible] in die „Grundlehren“ [illegible] aufgenommen [illegible] aus eigener Erfahrung mitteilen, [illegible] in der Schule unter einiger Anleitung durch die Schüler selbst finden ließ, bei denselben [illegible]

[illegible] Unterschied zwischen der oben skizzierten Behandlung der [illegible] und der herkömmlichen wird darin [illegible] „wesentlichen“ Merkmalen die [illegible] mir ergangen sein, dass [illegible] Lehre vom Begriffe auf die Erörterung [illegible] wurde, statt der [illegible] Logik des Begriffs [illegible] als [illegible] Auswege ge- [illegible]

Gegensatze constitutiver und consecutiver Merkmale. Für die Elementarlehre reicht die Klarmachung des letzteren Unterschiedes völlig aus, indem diese sich nur auf Begriffe mit gegebenem Inhalte beschränkt, und erst in der Methodenlehre, wo sie von der Begriffsbildung handelt, kann und soll darauf eingegangen werden, dass und warum manche Merkmale zu „natürlicheren" Begriffs- und Classenbildungen führen und insofern als „wesentlichere" bezeichnet werden können. Darüber hinaus ist nämlich der Begriff des Wesens ein die Natur der Dinge selbst, nicht bloß die Vorstellung von ihnen betreffender, also ein metaphysischer, der in der Schullogik vermieden werden muss. Gerade die Logiker Herbart'scher Richtung pflegen, wie Höfler an einer Stelle richtig sagt, Metaphysisches in ihre für Schüler bestimmten Auseinandersetzungen „hineinzugeheimnissen".

Es wird demnach der weitere Lehrgang sich so gestalten:

Die verschiedenen Definitionen des Kreises, von denen man ausgehen kann — der Schüler selbst soll sie ja anführen können, — veranschaulichen diesem, dass von einem Dinge mehrere Begriffe mit verschiedenem Inhalte möglich sind. Vorläufig erkennt er auf Grund seiner Kenntnisse aus der Geometrie, dass diese verschiedenen Definitionen des Kreises in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, so dass aus den in die erste Definition aufgenommenen Merkmalen die anderen folgen. Der Schüler begreift also die Ausdrücke „constitutiv" und „consecutiv", sowie, dass die „consecutiven" Merkmale eines Begriffes nicht mehr zu dessen eigenem Inhalte, sondern schon zu dem Inhalte eines von ihm verschiedenen Begriffes von demselben Gegenstande gehören. Allerdings wird es sich empfehlen — die Frage eines intelligenteren Schülers kann eventuell dazu veranlassen — zu constatieren, dass die Frage, welche Merkmale als constitutiv, welche als consecutiv auszuwählen seien, einen Einblick in das Wesen des nothwendigen Folgens voraussetzt, also für später, nämlich für die Methodenlehre, vorbehalten bleibt.

Indem man wieder durch immanente Repetition, zu welcher gerade im Logikunterrichte eine Menge Anlässe sich bieten, auf das über logische Abstraction und Determination Gesagte zurückgeht, wird bei den Schülern das Bedürfnis rege, etwas

über die Begriffe zu hören, zu denen man bei fortgesetzter logischer Abstraction gelangt. Aber auch hier heißt es maßhalten, soll der Schüler nicht in allzuhohe Regionen geführt, das Interesse auch für das Naheliegende verlieren. Es erscheint daher auch die Aufzählung der Aristotelischen Kategorien geradezu als überflüssig, da ja der theoretisch-praktische Charakter der Logik im Auge behalten werden muss. Von diesem Gesichtspunkte aus werden dem Schüler nur diejenigen höchsten Gattungsbegriffe vorgeführt, welche im Leben und in der Wissenschaft von Bedeutung sind, wie Ding, Eigenschaft, Vorgänge, Zustände, Thätigkeit, aber auch bei diesen wird, wenn ich so sagen darf, der metaphysischen Klippe mit großer Vorsicht ausgewichen werden müssen, wie dies nach meiner Meinung Höfler in der bezüglichen Darstellung[1]) vortrefflich gelungen ist.

Meinong hat bekanntlich in seinen Humestudien II[2]) eine Arbeit veröffentlicht, durch welche Licht in jenes unendliche Gebiet der Relationsbegriffe, das bisher, wenigstens innerhalb des Logikunterrichtes, wenig beachtet war, gebracht wurde. Höfler hat die Relationstheorie auch den Schülern zugänglich gemacht und dadurch sich das Verdienst erworben, der Begriffslehre eine Ausgestaltung gegeben zu haben, durch welche den Schülern ein weiterer Ausblick in die Begriffswelt gestattet ist, als es bislang möglich war. Es sind diese Relationsbegriffe nicht nur als eine den Begriffen von Dingen, Eigenschaften und Vorgängen (Zuständen) coordinierte höchste Classe von Begriffen überhaupt bedeutungsvoll, sondern auch deshalb, weil sie durchgängig Beispiele sind von „Begriffen, welche aus der Reflexion auf psychische Erscheinungen hervorgehen“, d. i. von Begriffen, „deren Inhalt sich nicht aus den Elementen der Vorstellungen vom Physischen, sondern nur vom Psychischen abstrahieren bezw. zusammensetzen lässt“.

Wie wichtig es ist, die Aufmerksamkeit auf diese Gruppe von Begriffen zu lenken, erhellt, wenn man sich auf den Standpunkt des naiven Realismus zurückdenkt, der noch vor kurzem der der Schüler war, wonach der naive Mensch gar nicht zweifelt, dass den Gestalten, Farben wirklich etwas entspreche, was „an sich“ unabhängig vom Vorstellen und Urtheilen sei.

---

[1]) Grundlehren der Logik p. 30 f.
[2]) Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. Wien 1882, p. 576 ff.

Aber auch ein solcher muss zugeben, dass Begriffen wie Gleichheit, Ähnlichkeit, Nothwendigkeit ... nichts in der physischen Welt unabhängig vom Vorstellen entspreche. Indes aber auch ganz abgesehen von dieser erkenntnistheoretischen Belehrung ist ein Eingehen auf diese Relationsbegriffe ganz unentbehrlich, weil sie, wie eine eingehende gründliche Analyse zeigt, durchaus constitutiv sind für solche Begriffe, die von jeher einen Hauptuntersuchungsgegenstand der Logik gebildet haben, so z. B. für die Begriffe „conträr“ und „contradictorisch“. Höfler hat hier, abweichend von den meisten neueren Auslegungen dieser beiden Termini, ihren alten scharfen Sinn, wie ihn Aristoteles in dem *ἀντικείμενον ἐκ διαμέτρου* und dem *ἀντικείμενον ἀντιφατικῶς* festgestellt hat, wieder hergestellt und festgehalten. Nun hat aber der erstere Begriff nur Sinn bei Vorstellungs**reihen** (wie z. B. heiß, lau, warm, kühl, kalt; verdienstlich, correct, zulässig, verwerflich), und zwar bei **endlichen** Reihen, deren beide Endglieder dann eben im extremen oder diametralen oder conträren Gegensatze stehen. Der Begriff der Reihe aber setzt voraus den größerer oder geringerer Ähnlichkeit; Ähnlichkeiten aber sind Relationen, und zwar Vergleichungsrelationen, und ebenso ist ja „größer“ eine Vergleichungsrelation. Von diesen also, den Vergleichungsrelationen, müsste schon um des **einen** Begriffes der Contrarietät willen die Rede sein. Es fällt aber bei der Darstellung, wie sie Höfler nach Meinong gegeben hat, noch eine Menge anderer lehrreicher Denkübungen ab. Wir verweisen nur z. B. auf die Unterscheidung im Gebrauche der Wörter „gleich“ und „derselbe“.

Die zweite Hauptart von Gegensätzen aber, der contradictorische, führt ebenso, wie der conträre auf Vergleichungs-, nunmehr auf die Verträglichkeitsrelationen zurück; denn dass wir z. B. „roth“ und „nicht roth“ als im contradictorischen Gegensatze stehend bezeichnen, geschieht ja nur wegen der „**Unverträglichkeit**“ zwischen Bejahung und Verneinung überhaupt. — Wer aber auch nicht auf so strenge Analysen von Begriffen, die der Logiker als solcher fortwährend im Munde führt, Gewicht legen zu sollen meint, wird schon aus anderen Rücksichten auf eine Erörterung der Begriffe von Relationen nicht verzichten können.

Wie gerade die Behandlung dieses Abschnittes von eminent erziehlichem Einflusse auf den Verstand des Schülers ist, zeigt

sich bei dem Paragraphen „Relative Begriffe“. Dies sind solche Begriffe, in deren Inhalt, soll er eindeutig bestimmt sein, der Inhalt anderer Begriffe mitvorgestellt werden muss. Diesen relativen Begriff, z. B. „alt“, welcher eine Beziehung etwa auf das menschliche Durchschnittsalter involviert, von den „nicht relativen Begriffen“ zu scheiden, was eine genaue Analyse des Inhaltes erfordert, gibt dem Scharfsinne willkommene Gelegenheit zu den anregendsten Übungen.

Eine solche Übung ist die Klärung des landläufigen Ausdruckes: „Unverträgliches wie ‚rundes Viereck‘ und dergleichen könne man sich nicht vorstellen.“ Meinong berichtigte diesen Ausdruck durch Heranziehung von Begriff und terminus „indirecter Vorstellung“. Eine „indirecte Vorstellung“ ist eine jede solche Vorstellung, welche (wie etwa „um einen Kopf größer als B“) ihren Gegenstand durch anderweitig gegebene Beziehungen auf einen anderen, als bekannt vorauszusetzenden Inhalt bestimmt. Dass nun eine Vorstellung wie z. B. „rundes Viereck“, wenn auch nicht anschaulich, so doch sonst irgend wie, nämlich eben nur indirect vorgestellt werden kann, geht aus der Erwägung hervor, dass wir doch wohl „rund“ als Attribut zu „Viereck“ dank der allgemeinen Attributsrelation uns vorstellen können und ja erst auf Grund dieser indirecten Vorstellung sagen, dass diese Verbindung eine unausführbare sei.

Wichtiger als alle derartigen speciellen Anwendungen von relativen Begriffen ist die Analyse des (auch in der Theorie der Induction, wohl dem wichtigsten Capitel einer modernen Schlusslehre) so unentbehrlichen Begriffes von **Ursache und Wirkung**. Ich habe schon einmal Veranlassung genommen, dem Recensenten D. (Döring) des Höfler'schen Buches im Lit. Centralblatte ganz in Kürze meine Erfahrungen entgegenzuhalten, und nehme hier Gelegenheit, etwas ausführlicher zu zeigen, dass sich gerade diese Partie wohl für den Unterricht eigne. Da im Unterrichte die correlativen Begriffe, von denen der eine ohne den anderen nicht vorgestellt werden kann, schon Erwähnung fanden, so reiht der Schüler, darum befragt, ohne Schwierigkeit den Causalbegriff in diese Gruppe ein. Von entsprechenden Beispielen ausgehend, gelangt man zu dem Hume'schen Satze, dass wir beim inneren und äußeren Wahrnehmen weder das „Dass“ noch das „Wie“ des Bewirktwerdens wahrnehmen. Der Schüler lässt sicherlich leicht den Standpunkt des naiv Denkenden

nach der Frage, ob bei dem Breitschlagen des Eisens durch den Hammer gesehen oder gehört wird, wie der Hammer das Eisen breitschlägt oder ob man nur das Breitwerden des Eisens sehe. Nach solcher Vorbereitung kann man zur Feststellung der positiven Merkmale übergehen. „Wenn eine Flinte abgefeuert wird, was nennt man die Ursache des Schusses?“ — An den Antworten der Schüler, von denen jeder nur einzelne Theilursachen (Bedingungen) nennen wird, lässt sich zeigen, dass nicht bloß das Niederfallen des Hahnes, die Pulverladung etc., sondern alle Bedingungen zusammen die „Ursache“ ausmachen. Ebenso wird von dem naiv Denkenden gewöhnlich ein Zustand und nicht die Veränderung eines Zustandes oder das Anfangen eines Zustandes als Wirkung angegeben. Aus solcher Erwägung resultiert für die Schüler zunächst die Bestimmung, dass unter „Ursache“ nicht einzelne Thatsachen, sondern der Inbegriff all derjenigen Thatsachen zu verstehen sei, mit deren Completierung zugleich das Anfangen eines neuen Zustandes eintritt, die Wirkung. Ist demnach die Ursache immer das unmittelbare Antecedens, die Wirkung das Consequens, so ist die weitere Frage, ob jedes unmittelbare Antecedens Ursache sei. Genug Beispiele beweisen dem Schüler die Unrichtigkeit des „Post hoc, ergo propter hoc“. Dass aber auch das Attribut „regelmäßig“, zu Antecedens hinzugefügt, nicht genügt, wie man an der Hand einzelner Beispiele glauben sollte, um den Begriff „Ursache“ festzustellen, zeigt die treffende Verweisung auf den regelmäßigen Wechsel von Tag und Nacht. Trotz großer Regelmäßigkeit lässt sich das eine nicht als Ursache des anderen bezeichnen. Von Regelmäßigkeit kann aber bei nur einmal auftretenden Erscheinungen, die doch auch eine Ursache haben müssen, schon gar nicht die Rede sein. Zu dem Merkmale der unmittelbaren Succession muss also das der „Nothwendigkeit des Folgens“ hinzukommen.

Die neu gewonnene Bestimmung der Begriffe Ursache und Wirkung „Ein Inbegriff U von Thatsachen $u_1 u_2 u_3$ etc. wird als Ursache für das Anfangen W eines Vorganges und W als Wirkung von U bezeichnet, insofern in demselben Zeitpunkte, in welchem die $u_1 u_2 u_3 \ldots$ complet werden, mit Nothwendigkeit W eintritt“, findet das volle Verständnis bei den Schülern.

Aus dieser flüchtigen Skizze möge den geneigten Lesern dieser Schrift klar werden, dass dieser Theil des Logik-

unterrichtes eine Bereicherung des bislang in den Logikbüchern Gebotenen und zwar eine solche bietet, welche den Schüler über oft und oft, aber ohne Einsicht gebrauchte Termini in durchaus nicht unfassbarer Form belehrt und daher wert ist, in der Schule behandelt zu werden. Im Anschlusse an die Begriffe Ursache und Wirkung zeigt noch der Lehrer, dass es bei den so häufig im Leben und in der Wissenschaft gebrauchten Causalbegriffen „Fähigkeit, Kraft, Disposition, Vermögen" sich um mehr oder wenig bleibende Bedingungen handelt, die nicht direct wahrgenommen, sondern erschlossen werden.

Mit dem bisher Dargelegten, welches sich hinsichtlich des Lehrstoffes mit den beiden ersten Abschnitten des Höfler'schen Buches (*A*. Die psychologische Entstehung und die logischen Eigenschaften der Begriffe; *B*. Einige Hauptclassen von Begriffen und Namen) deckt, glauben wir die Hauptabsicht dieser Schrift bereits erreicht zu haben, nämlich zu zeigen, wie die theoretische Grundlegung der Begriffslehre im Unterrichte gegeben werden müsste, damit dem ersten Anspruch, der füglich an jede wissenschaftliche Disciplin auch schon im Elementarunterrichte gestellt werden muss, nämlich sachlicher Richtigkeit des Inhaltes Genüge geschehen kann. Die Abschnitte *C*. und *D*. das Definieren beziehungsweise Eintheilen g e g e b e n e r Begriffe, welche in Höflers Buch noch in der Elementarlehre (nicht, wie es beinahe immer gebräuchlich war, erst in der Methodenlehre in einem wenig natürlichen Zusammenhange mit dem Beweise dargestellt zu werden pflegten) unmittelbar als praktische Anwendung jener beiden vorwiegend theoretischen Capitel *A*. und *B*. auftreten, geben zu keinen so principiellen Auseinandersetzungen mehr Anlass. Ich will mich daher hier nur mit der Hervorhebung derjenigen Punkte begnügen, die in der Höfler'schen Logik eine lichtvollere Darstellung erfahren, als es bis jetzt der Fall war, und sonst den Unterrichtsgang in wenigen Strichen zu zeichnen versuchen.

Aus dem reichen Schatze von Beispielen, die im Unterrichte ununterbrochen zu Übungen sich darbieten, entnimmt auf diesem Punkte der Lehrer das Material, an welchem er zunächst Zweck und Art der Definition [illegible]. Da möchte [illegible] als Beweis grosser didaktischer [illegible] bezeichnen, dass Höfler der

sogenannten „Realdefinition“, die in den bisher gebrauchten Logiklehrbüchern viel Geheimnisvolles für das Verständnis der Schüler in sich barg, die richtige Stelle anwies. Der Begriffserklärung, insofern sie den Inhalt des Begriffes angibt, und der Namenserklärung (Nominaldefinition), insofern diese Angabe mittels des Namens des zu definierenden Vorstellungsinhaltes und der Namen der definierenden Vorstellungsmerkmale geschieht, steht die Sacherklärung (Realdefinition), insofern sie auch die Beziehung zwischen Begriff und Ding zum Gegenstande hat, nicht einfach coordiniert gegenüber. Wenn aber trotzdem im wissenschaftlichen Gebrauche zwischen Wort- und Sacherklärung geschieden wird, so wird unter der ersteren jene verstanden, welche eine Verständigung zwischen Sprechendem und Hörendem herbeizuführen sucht, ob das Wort, das der Bezeichnung eines Gegenstandes dienen soll, in diesem oder jenem Sinne zu fassen sei, also die Beziehung zwischen Wort und Begriff trifft, während die Realdefinition die Entscheidung zu bringen hätte, ob es solche Gegenstände gebe oder nicht, und somit streng genommen überhaupt bereits das Gebiet der Begriffslehre als solches überschreitet.

Es kann dann eine Nominaldefinition, die in einem Urtheile wie: „Ich bezeichne mit diesem Worte den Begriff *N*“ den Ausdruck findet, ganz wahr sein, da sie der subjectiven Absicht des Definierenden wirklich entspricht, die sich daran schließende Realdefinition die Beziehungen des Begriffes zum Dinge nicht treffen. Da, wie oben[1]) gezeigt wurde, in der Elementarlehre nur vom Definieren gegebener Begriffe, nicht von der Begriffsbildung die Rede ist, so findet die synthetische Definition ihre genaue Erörterung nicht hier, sondern in der Systematik, und es braucht hier nur der Unterschied derselben von der analytischen durch Verweisung auf Beispiele berührt werden. Um so willkommener werden schon dem Anfänger Regeln für die Definition von „Begriffen mit gegebenem Inhalte“ und von „Begriffen mit gegebenem Umfange“ sein.

Wenn der Inhalt ein einfacher ist, so dass er nicht in Merkmale zerlegt werden kann, dann entfällt nach obiger Bestimmung der Definition dieselbe, der Begriff ist undefinierbar. Die Nominaldefinition im oben bezeichneten Sinne ist nicht

---

[1]) Siehe pag. 113.

möglich, wenn es nicht verständlichere Namen als die für den Begriff bestehenden gibt. Auf dieser Erwägung, die selbstverständlich durch Beispiele gestützt werden muss, baut sich das Verständnis der Schüler für die Undefinierbarkeit mancher Begriffe auf.

Zur Eintheilung übergehend, erinnert der Lehrer an das über Gattung und Art Gesagte, knüpft daran die Darlegung des Wesens und des Zweckes der Eintheilung, wobei Classification als gleichbedeutend mit derselben genommen wird. Aber auch das über die Definition Erlernte bietet manchen Vergleichungspunkt, der die Theorie der Eintheilung beleuchtet. Wie dort der Inhalt, so ist hier der Umfang des Begriffes das, worauf es ankommt. Hier möchte ich die Aufmerksamkeit der Leser dieser Schrift auf die Definition, die Höfler vom Eintheilungsgrunde gibt, lenken. Sie baut sich auf die früher gewonnene Vorstellung von der „Reihe" auf. Habe ich z. B. den Gattungsbegriff Polygon einzutheilen, so theile ich „nach" der Anzahl der Ecken ein. Das kann ich nur, weil „überhaupt Ecken in irgendeiner bestimmten Anzahl zu haben" ein Merkmal M des Gattungsbegriffes ist. Zu diesem M als Gattung ergibt sich nun als eine Reihe von Species m_1 m_2 m_3.... die Zahlenreihe (1, 2), 3, 4... Die Artbegriffe werden aus dem Gattungsbegriffe Polygon gewonnen, in dem anstatt des Merkmals M der Reihe nach die Species m_1 m_2 m_3.. hinzugefügt werden. Der Eintheilungsgrund ist demnach ein solches M des einzutheilenden B, welches in die Reihe seiner specifischen Differenzen aufgelöst, auch die Gattung in ihre Arten auflöst. Von nicht zu unterschätzender Bedeutung für das praktische Leben und für den Betrieb der Wissenschaft ist es auch zu wissen, dass bei vollständiger Durchführung der Eintheilung nach einem und demselben Eintheilungsgrunde unbeschadet der formellen Correctheit der Eintheilung sich Eintheilungsglieder ergeben können, denen weder wirklich noch auch logisch möglich Gegenstände entsprechen. Mit einer Besprechung der Sub- und Codivisiones, der Anweisungen zur Disposition und einer Aufzählung der hauptsächlichsten Fehler gegen, beziehungsweise der Anforderungen an eine strenge Eintheilung schließt die Begriffslehre.

Was insbesondere die Lehre von der Disposition betrifft, war sie es, welche zur Angliederung des ganzen Logikunter-

richtes an den Deutschunterricht verleitet hat. Es steht aber um die Begründung dieses Zusammenhanges nicht besser, als wenn gelegentlich gesagt wurde, zum Ertheilen des Logikunterrichtes sei vor allem der Naturhistoriker berufen. Denn er habe es vor allem mit dem Eintheilen zu thun. Und so steht ja allerdings auch die Disposition eines Aufsatzthemas in nächster Beziehung zur Eintheilung. Man muss sich aber doch sofort fragen: Lässt sich gerade diese Thätigkeit des Eintheilens als die wichtigste aller übrigen Denkthätigkeiten bezeichnen? — Es ist etwas anderes, eine Art von geistiger Thätigkeit, sei es das Eintheilen, wie es in der Naturgeschichte, das Disponieren, wie es im deutschen Aufsatze, das Hypothesenbilden, wie es im Physikunterrichte geübt wird, zum Gegenstande einer nachträglichen logischen Reflexion machen, und etwas anderes, um solcher Beziehung willen den Logikunterricht in die ausschließlichen Dienste irgend eines Gymnasialfaches stellen, in dem er dann, wie das Beispiel des Deutsch-Logikunterrichtes gezeigt hat, im schlimmen Sinne des Wortes „aufgeht", nämlich, gerade so wie ein Stück Holz im Feuer oder wie ein Vermögen.

Wir sind hiemit wieder auf die eingangs angeregte Vergleichung zwischen dem Schicksale, das den propädeutischen Unterricht in Deutschland ereilt hat, und dem Provisorium, in dem er sich zur Zeit noch in Österreich befindet, zurückgekommen. Es könnte geltend gemacht werden, dass, wenn durch ein Angliedern des Propädeutikunterrichtes an andere Fächer er seinem wissenschaftlichen Inhalte nach in gewisse, vielleicht von keiner Seite geleugnete Gefahr geräth, hiefür doch voller Ersatz in pädagogisch-didaktischen Vortheilen, nämlich der Möglichkeit einer äußerst innigen Concentration des Unterrichtes, gefunden werden könne. Um in aller Unparteilichkeit hier die Gründe des wissenschaftlichen Nachtheiles gegen die Gründe des didaktischen Vortheiles abzuwägen, will ich anknüpfen an ein Wort, das der Correferent der ersten Directorenversammlung in der Rheinprovinz[1]) ausgesprochen hat. „Das Eine werden wir festhalten," sagt er an dieser Stelle, „ernste, geistige Arbeit darf dem Schüler in der Logik nicht erspart werden. Mit geistreichen Apperçus wird hier gar nichts erreicht." Zu solchen geistreichen Apperçus aber muss es, meine ich,

[1]) Vgl. Verhandlungen der ersten Dir.-Vers. in d. R. Pr. Berlin (Weidmann.) pag. 91.

kommen, wenn man sich begnügt, durch bloße philosophische Digressionen gelegentlich eines anderen Unterrichtes und ganz besonders des Unterrichtes im Deutschen eine systematische Behandlung der Logik im Unterrichte ersetzen zu wollen. In dieser Meinung, die ja bekanntlich nicht neu ist, wurde ich nur bestärkt, als ich die „Lehrprobe" einer näheren Betrachtung unterzog, welche Hermann Meier[1]) veröffentlicht hat.

Abgesehen davon, dass ich gegen die Ansicht Meiers in vollständiger Übereinstimmung mit Höfler[2]) „die Aufgabe eines Concentrationsprocesses, der in alle Lehrgegenstände eingreift", dem Unterrichte in der phil. Prop. nicht zutheilen möchte, so kann ich in folgerichtiger Consequenz des schon Gesagten durchaus nicht der These I der besagten Lehrprobe beitreten:[3]) „Der Unterricht in der phil. Propäd. ist analytisch, daher gibt es keine system. Darstellung weder der Logik noch der Psychologie." Und wenn ich nun zur Besprechung der eigentlichen Lehrprobe übergehe, so erlaube ich mir gleich im voraus die Befürchtung auszusprechen, dass, so geistvoll auch der von Meier geschilderte Gang des Unterrichtes sicherlich ist, der Unterricht im Deutschen oder vielmehr nach der Lehrprobe der Unterricht auch in anderen Lehrgegenständen bei der Befolgung desselben zu viel Abbruch an Zeit erfährt, andererseits aber zur Erreichung des Endzieles des Logikunterrichtes, wie es unter anderen besonders von Höfler fixiert wurde,[4]) zu wenig geleistet wird.

Wenn ich auch die Versicherung Meiers mir vor Augen halte, dass in dieser Lehrprobe „nicht die Form, sondern der Gang der Behandlung gegeben ist", so scheint mir doch der Umfang des über die drei Begriffe „Begriff, Schönheit, Ehre" in der Schule Gegebenen[5]) zu viel der kostbaren Zeit zu rauben und doch nur ein Stückwerk zu sein, halb dem Unterrichte in

---

[1]) Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis, herausg. von Frick u. Meier. 4. Heft. 1887. pag. 10 ff.

[2]) Vgl. „Zur Propädeutikfrage". Progr. dsr theres. Akademie in Wien, 1884, pag. 31, und „Zur Reform der philos. Propäd." Zt. f. ö. G. 1890. Sept. p. 28

[3]) a. a. O. pag. 13.

[3]) Bökh, Ztschr. f. ö. Gymn. 1884, pag. 538. — R. Lehmann, „Der deutsche Unterricht", pag. 352 ff. — Höfler, „Zur Propädeutikfrage". p. 15.

[5]) In der Lehrprobe selbst füllt es 28 ziemlich große Druckseiten. Wenn nun noch viele andere Begriffe ebenso behandelt werden müssten, was dann?

anderen Lehrfächern, halb dem eigentlichen philos. Unterrichte entnommen. Ähnlich aber dürfte das bei einem solchen Unterrichte resultierende Wissen der Schüler ein Stückwerk sein, mehr oder minder mangelhaft, je nach dem Grade der Vorliebe des Schülers für die eine oder die andere Seite des Unterrichtes.

Ich will mich nun hier, wo wir es nur mit der Lehre vom Begriffe zu thun hatten, nur auf den Versuch beschränken, an dem Theile der Lehrprobe I, welcher im Anschlusse an die griechische Lectüre das „Wesen des Begriffes“ für die Schüler zu entwickeln sucht, die Nachtheile aufzuzeigen, die sich aus der bloß gelegentlichen Behandlung des Gegenstandes nach meinem Dafürhalten ergeben. Sollte es mir gelingen, dieselben an dieser Lehrprobe I darzulegen, dann lässt sich das Urtheil auf die Lehrprobe II und III, welche wieder vorwiegend eine Anlehnung an den Deutschunterricht involvieren, leicht übertragen.

Nach absolvierter Lectüre des „Laches“ und des „Eutyphron“ sucht Meier aus der von Plato gegebenen Entwicklung einzelner Begriffe, wie des Begriffes „fromm, Schnelligkeit“ u. a., die einzelnen Daten zu gewinnen, welche den Schülern das Wesen des Begriffes klar machen sollen. Nun musste, die richtige Behandlung der Platolectüre vorausgesetzt, was Meier wieder herbeizieht, schon besprochen worden sein, nämlich die Frage, worin die Fehler der von Plato gegebenen Definitionen dieser Begriffe liegen. Wenn es nun auch eine bekannte Regel einer methodischen Unterrichtspraxis ist, „an Bekanntes anzuknüpfen“, so scheint es mir denn doch ein Umweg, das Neue, welches durch das Ausgehen von diesem Bekannten gewonnen werden soll, nicht unmittelbar aus diesem, sondern durch Zurückgehen auf noch Bekannteres den Schüler finden zu lassen. Dies thut aber Meier, indem er auf die den Schülern geläufigeren Definitionen von Kreis, Dreieck zurückgreift und erst an der Hand dieser für die Schüler mehr anschaulichen Beispiele dieselben zum Verständnisse des über die Platonischen Definitionen Erörterten gelangen lässt. Ökonomisch geht der Lehrer bei solchem Unterrichte mit der kostbaren Zeit nicht um. Denn wenn er, von den anschaulichen Beispielen des Dreiecks und Kreises ausgehend, auf analytischem Wege zu einleuchtenden Sätzen gelangt, deren Verständnis er durch dem Wissensumfange

des Schülers entnommene Exempel, wie es die von Meier benützten sind, vertieft, dann wird er auf kürzerem und nach meinem Dafürhalten sicherem Wege den Schüler auch auf dem Gebiete der Logik zu einem positiven Wissen hinführen.

Zunächst ist in den Worten, welche zur Gewinnung eines Merkmals des Begriffes „der Allgemeinheit" verhelfen sollen: „der Begriff des Frommen ist also nicht eine einzelne That, sondern er ist in allen Thaten enthalten, von denen man ihn aussagen kann",[1]) den Schülern das gänzlich vorenthalten, von dem man doch wird ausgehen müssen, nämlich von der Bestimmung des „Begriffes" als „Vorstellung". Denn wenn ich das Fromme als das bezeichne, was ich jetzt thue, das Dreieck als das, was hier auf der Tafel gezeichnet ist, so können doch nur die Vorstellungen vom Frommen, vom Dreieck als deren Begriffe bezeichnet werden; wie es ja auch eine Vorstellung ist, wenn ich den wissenschaftlichen Begriff des Dreiecks vor mir habe.

Dann erst ergibt sich die weitere Frage: Sind nun alle Vorstellungen Begriffe? — Durch die Beantwortung dessen erfährt erst der Schüler, wie beschaffen eine Vorstellung sein müsse, die man „Begriff" nennt. Der Fehler, in den Meier bei den dann gegebenen Bestimmungen des Begriffes verfällt, ist, wie Meinong[2]) und Höfler[3]) mit Recht hervorgehoben haben, ein selbst in der neueren Logik wiederkehrender. Indem er nämlich zuerst zu dem Satze gelangt, „der Begriff ist für diese Handlungen das Allgemeine, das, was alle ohne Ausschluss gemein haben, das unbedingt oder absolut Allgemeine,"[4]) stellt er die „Logik des Umfanges" vor die „Logik des Inhaltes", während doch, wie wir im Anschlusse an die Höfler-Meinong'schen Darlegungen gezeigt haben, der Inhalt des Begriffes das Primäre ist. Übrigens ist auch die Herbeiziehung eines „unbedingt oder absolut Allgemeinen" nicht darnach, um den Schüler zu einer klaren Vorstellung von dem Wesen des Begriffes zu führen.

Ganz im Unklaren wird wohl der Schüler über „nothwendige" und „wesentliche" Merkmale bleiben, wenn es nur bei

---

[1]) a. a. O. pag. 15.

[2]) Zur Gesch. u. Kritik des modernen Nominalismus. Hume, Studien I. Sitzungsber. der Akad. der Wiss. Wien 1877. pag. 17 ff.

[3]) Ausführl. Logik, pag. 23.

[4]) a. a. O. pag. 16.

der von Meier gemachten Bemerkung[1]) bleibt: „Was nicht anders sein kann, das ist nothwendig, der Begriff enthält nur die nothwendigen Merkmale, er selbst ist das für alle unter ihn gehörigen Dinge Nothwendige. Die Merkmale, die nicht geändert werden können, ohne dass das Ding in seinem Wesen ein anderes wird, bezeichnet man auch als die „wesentlichen“, ihren Inbegriff als das Wesen der Sache, die οὐσία, wie es Sokrates bezeichnet.“ Ich erlaube mir, um nicht schon Gesagtes hier wiederholen zu müssen, auf die Erörterungen der Mängel einer derartigen Darlegung bei Höfler[2]) aufmerksam zu machen.

Dies möge genügen, um zu zeigen, dass solche gelegentliche Behandlung logischer Dinge in der Schule nothwendig mit einer verderblichen Unklarheit verbunden sein muss, die durch eine systematische Behandlung, wie ich gezeigt zu haben hoffe, behoben werden kann. Dass übrigens mein Zweifel an einem ersprießlichen Erfolge eines solchen gelegentlichen Unterrichtes, in dem ich mich durchaus nicht vereinzelt weiß, zum mindesten nicht ganz unberechtigt ist, geht aus einer Bemerkung hervor, die in einem Berichte Dr. Ed. Martinaks über die Erfahrungen, welche er beim Hospitieren an den Berliner Gymnasien machte, sich findet. Er sagt nämlich[3]): „Dass dem deutschen Unterrichte in Prima die philos. Propäd. facultativ beigegeben ist, finde ich zumal bei der geringen Stundenanzahl des Deutschen ganz unbegreiflich und ich gewann fast den Eindruck, als müssten dadurch beide Fächer in den Augen der Schüler herabgewürdigt werden.“

Es liegt ganz außerhalb der Absicht dieser Zeilen, eine Vermuthung darüber aufzustellen, welches die Zukunft des philosophisch-propädeutischen Unterrichtes an den deutschen Gymnasien sein wird. Dass die Philosophie durch die neuesten Lehrpläne für immer um alle Fühlung mit dem Gymnasialunterrichte gebracht sei, vermögen wir aus inneren Gründen nicht recht zu glauben. Aber allerdings muss die nächste Folge des neu geschaffenen Zustandes sein, dass die Zahl der Lehrer, [illegible] fachmäßig philosophisches Wissen erworben haben, [illegible]tem unter jenen Stand herabsinkt, der zur facul-

[illegible], pag. 16.
[illegible]og., pag. 75.
[illegible]tes Vereines Öst. Mittelschule. VI. Jahrg. 1. H. 26.

tativen Auflassung des Gegenstandes im Jahre 1882 geführt hat. Hinsichtlich der analogen, nur bei weitem nicht so acuten Schwierigkeit, mit welcher der propädeutische Unterricht an den österreichischen Gymnasien augenblicklich noch ringt, sprach sich jüngst K. Mendel (Zeitschrift f. ö. Gymn. 1892, S. 1129 ff.) so aus: „Einen nicht unbedeutenden Einfluss in dieser Richtung übt auch noch das Provisorium aus, das seit dem Erscheinen der Instructionen über dem propädeutischen Unterrichte schwebt. Es wäre gewiss im Interesse der Schule, wenn die Propädeutikfrage einer endlichen Lösung zugeführt würde, da durch diese einerseits geeignete Lehrbücher in Verwendung kommen müssten, andererseits auch eine größere Anzahl von Lehrern sich diesem Studium widmen würden."

Wenn aber hiemit auch vorerst nur ein Wunsch wohl aller, die es mit dem propädeutischen Unterrichte ernst nehmen, ausgesprochen ist, so haben wir doch alle Ursache, schon jetzt dafür dankbar zu sein, dass durch die Instructionen von 1884 bereits in so concreter Weise der Weg gezeigt worden ist, auf welchem vorwärts geschritten werden muss, um dem Schulgegenstande einen der gegenwärtigen Entwicklung der philosophischen Wissenschaft würdigen Lehrinhalt zu sichern.

Diese Zeilen hätten ihren Zweck erreicht, wenn es gelungen wäre, 1. zu zeigen, dass der von den Instructionen empfohlene Stoff in einem sehr speciellen Capitel der Logik, der Begriffslehre, auch strengeren wissenschaftlichen Anforderungen gemäß ist, und 2. dass die am Schlusse jener Instruction ausgesprochene Forderung von Lehrbehelfen, die jenen Stoff in schulgemäßer Form vermitteln, als heute bereits erfüllt angesehen werden darf.

V.

Hygienische Fortschritte

der

österreichischen Mittelschulen

seit September 1890.

Von

Dr. Leo Burgerstein,
Professor an der Communal-Realschule im VI. Bezirke in Wien.

Das „Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Cultus und Unterricht", Jahrgang 1890, Stück XXI, enthält auf S. 277—279 folgenden

„Erlass des Ministers für Cultus und Unterricht vom 15. September 1890, Z. 19097,

an sämmtliche k. k. Landesschulbehörden,

betreffend die Förderung der körperlichen Ausbildung der Jugend an den staatlichen und an den mit dem Öffentlichkeitsrechte beliehenen Mittelschulen.

Die Erfahrung lehrt, dass der Betrieb des Turnens und die Handhabung der Gesundheitspflege im Bereiche der Schulen allein nicht genügen, um die Jugend, an welche namhafte Anforderungen in geistiger Beziehung gestellt werden müssen, auch leiblich genügend zu kräftigen.

Es ist daher eine Pflicht der Schule, darüber hinaus allen jenen Mitteln vollste Aufmerksamkeit zuzuwenden, welche nach Ort und Zeit, sowie nach besonderen Verhältnissen mannigfach gestaltet, geeignet sind, die körperliche Ausbildung der Jugend zu fördern.

Gemeinden und Schulfreunde werden die Schule in diesen Bestrebungen gewiss unterstützen und den Schulleitern und Lehrpersonen die Durchführung der Absichten der Unterrichtsverwaltung durch Entgegenkommen ermöglichen.

Es erscheint mir sonach folgendes Vorgehen der staatlichen und der mit dem Öffentlichkeitsrechte beliehenen *Mittelschulen* zweckentsprechend:

An allen Orten, in welchen sich öffentliche *Bäder oder Schwimmanstalten* befinden, haben sich die Directoren der Mittelschulen an die Eigenthümer dieser Unternehmungen mit

dem Ersuchen zu wenden, der Schuljugend besondere, und zwar möglichst weitgehende Begünstigungen beim Besuche der Bäder und bei Ertheilung des Schwimmunterrichtes gewähren zu wollen.

Die Directoren und Mitglieder des Lehrkörpers werden die Schuljugend ohne Anwendung eines Zwanges zur fleißigen Benützung der Bäder aufmuntern und jene Rathschläge und Belehrungen ertheilen, welche vom gesundheitlichen Standpunkte nothwendig oder nützlich erscheinen.

Ähnliches ist hinsichtlich des Schlittschuhlaufens vorzukehren. Hiebei wird in Erwägung zu ziehen sein, ob es sich nicht — ebenso wie bei Bädern und Schwimmanstalten — empfehlen dürfte, besondere Tagesstunden für die Benützung der Eisbahnen durch die Jugend zu erwirken. Wo Schwimmanstalten oder Eisbahnen nicht bestehen, ist die Errichtung solcher im Interesse der Jugend anzuregen.

Überall, wo es thunlich erscheint, ist die Einrichtung besonderer Spielplätze für die Schuljugend anzustreben. Solche Spielplätze sollen dazu dienen, der Jugend die Möglichkeit zu bieten, sich während freier Stunden gemeinsam in frischer Luft zu vergnügen.

Diese Einrichtung erheischt aber eine besondere Beachtung seitens der Schule, und ich zweifle nicht, dass es die Mitglieder der Lehrkörper, vor allem jene, welche mit der Ertheilung des Turnunterrichtes betraut sind, freudig übernehmen werden, sich — wenn auch nicht regelmäßig, doch häufig — unter der Jugend zu bewegen und ihr bei solchem Anlasse persönlich näher zu treten, als dies in der Schule der Fall sein kann.

An Lehranstalten, an welchen eine hiefür geeignete Kraft vorhanden ist, wird auch die Einführung von Schulspielen zu versuchen sein.

Selbstverständlich ist auch hier keinerlei Zwang zu üben.

Mangels genügender im Inlande gesammelter Erfahrung kann gerade auf diesem Gebiete nur allmählich vorgegangen werden. Ich spreche jedoch gleichzeitig meine Geneigtheit aus, jährlich einzelnen Lehrern Urlaub und materielle Unterstützung zu Reisen ins Ausland zu gewähren, um die für unsere heimischen Verhältnisse verwendbaren Spiele aus eigener Anschauung kennen zu lernen.

Hinsichtlich der Durchführung dieser Anordnungen, welche der Natur der Sache entsprechend zunächst nur in ganz allgemeiner Art erlassen werden können, rechne ich auf den Eifer und die Einsicht sämmtlicher Mitglieder des Lehrstandes, die wohl alles aufbieten werden, um gerade auch hiedurch gegenüber der ihnen anvertrauten Jugend Wohlwollen und freundliche Gesinnung zu bethätigen.

Überdies wird Nachstehendes zu gelten haben:

1. Bis auf Weiteres ist an allen öffentlichen Mittelschulen im Laufe des ersten Semesters jedes Schuljahres eine Conferenz sämmtlicher Mitglieder des Lehrkörpers, jedenfalls unter Zuziehung des mit der Ertheilung des Turnunterrichtes betrauten Lehrers abzuhalten, in welcher darüber zu berathen ist, ob und inwieweit den Anordnungen dieses Erlasses bereits entsprochen wurde, beziehungsweise welche Verfügungen zu treffen wären.

2. In den Jahres-Hauptberichten ist im Einzelnen anzugeben, was im Sinne dieser Anordnungen an den Lehranstalten veranlasst wurde.

3. Die auf diesem Gebiete bestehenden Einrichtungen und getroffenen Verfügungen sind in den gedruckten Jahresberichten (Programmen) in einem besonderen Absatze zu besprechen.

4. Die Landesschulinspectoren werden bei ihren Inspectionen an jeder Lehranstalt sich von den getroffenen Einrichtungen persönlich überzeugen und in ihren Berichten die auf diesem Gebiete gemachten Wahrnehmungen zur Kenntnis der Unterrichtsverwaltung bringen.

Indem ich ersuche, von dem Inhalte dieses Erlasses die Directionen der staatlichen und der mit dem Öffentlichkeitsrechte beliehenen Mittelschulen (Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen) zu verständigen, überlasse ich es dem Ermessen der k. k. Landesschulbehörde, zur Sicherung des angestrebten Zieles etwa noch weiters geeignete Verfügungen zu treffen."

* * *

In den folgenden Blättern soll versucht werden, eine Skizze dessen zu geben, was seit dem Erscheinen dieses Erlasses geschehen ist; die folgenden Mittheilungen beziehen sich also auf Neues. Ausnahmen sind ausdrücklich als solche bemerkt. Die Darstellung beruht fast ausschließlich auf dem Studium von gegen

400 Jahresberichten österreichischer Mittelschulen für die Schuljahre 1890/91 und 1891/92; außer wenigen anderen sind unberücksichtigt die in polnischer und kroatischer Sprache erscheinenden, da der Verfasser diese Sprachen bis jetzt nicht liest. Das Gesammtbild der Sachlage wird durch den Wegfall einer mäßigen Zahl von Berichten nicht alteriert. Nicht berücksichtigt sind ferner die wenigen Internate und, als alter Unterrichtsgegenstand, das Turnen.

Die Internate wurden deshalb nicht in Betracht gezogen, weil sie, das Elternheim ersetzend, naturgemäß auch früher die körperliche Erziehung der Jugend im Auge haben mussten. Es wäre allerdings sehr lehrreich gewesen, in dieser Richtung ein hervorragendes Beispiel zu schildern: die k. k. Theresianische Akademie in Wien. Leider muss darauf verzichtet werden, eine einigermaßen den Verhältnissen entsprechende Skizze in jener Richtung zu geben: dazu würde auch der verfügliche Raum nicht langen. Es kann daher nur auf die bezüglichen Jahresberichte verwiesen werden; die Anordnungen der Akademiedirection betreffend das Jugendspiel (Jahresbericht 1890/91) gehören zu dem besten, was über diesen Gegenstand geschrieben wurde. — An den erziehungshygienischen Einrichtungen participieren vielfach auch die externen Schüler des Gymnasiums der Akademie.

Es ist selbstverständlich unmöglich, die zahllosen Einzelbemühungen und Einzelleistungen aller Gymnasien und Realschulen Österreichs aufzuzählen; man musste sich also mit summarischen Darstellungen, beziehungsweise Beispielen zur Illustration begnügen. Diese letzteren sind oft recht zufällig herausgegriffen. Da die Nachrichten der einzelnen Programme Bilder für die einzelnen Anstalten geben und nicht nach irgend einem Schema gemacht sind, so ist auch die Benützung der vielfach gebotenen Ziffernbelege meist unthunlich gewesen. Ausdrücklich muss hervorgehoben werden, dass zahlreiche vortreffliche Leistungen gar nicht ins Relief treten; die Enge des verfügbaren Raumes ist hiefür mit ein Grund. Absichtlich ist die Nennung von Namen — eine Ausnahme muss natürlich das Capitel „Literatur“ machen — vermieden worden. Es wäre unmöglich gewesen, dabei eine große Zahl von Anstaltsleitern und -Lehrern sowie sonstigen Personen, die sich auf dem fraglichen Gebiete Verdienste erworben haben, bei der Masse des Materials nicht zu verschweigen.

Abkürzungen:
St = K. k. Staats-, L = Landes-. C = Communal-, G = Gymnasium, RG = Real- und Obergymnasium, RS = Realschule (wo nicht näher bezeichnet, Ober-G, bezw. Ober-RS); U = Unter-; Sch = Schülerzahl; I, II etc. bei „Wien" bedeutet den Stadtbezirk; d = deutsch (bei Schulen in Orten mit Anstalten verschiedener Unterrichtssprache.

Baden und Schwimmen.

Wie bei allen den Fragen, welche hier zur Behandlung kommen, stellt sich im allgemeinen auch beim Baden die Sache so, dass die Entfernungen und Preise in großen Städten die Benützung der Bäder relativ erschweren, in ganz kleinen Städten mit Mittelschulen die Frage durch das Vorhandensein eines passenden Teiches oder Flusses — nicht zu kalt, beziehungsweise nicht zu reißend — oft gelöst ist, während größere Kleinstädte insofern am besten vorgesehen sind, als bereits ein gewisser Comfort in bestehenden Vollbädern entwickelt zu sein pflegt.

Außer Zweifel steht, mag die Gelegenheit a priori welche immer gewesen sein, dass an sehr vielen Stellen ein beträchtlicher Fortschritt zu verzeichnen ist; wohl in allen Städten mit Bädern haben die Schulleitungen Preisnachlässe, zum Theil ganz beträchtliche für ihre Studenten erhalten; eine Ausnahme dürfte nur Innsbruck machen, wo eine Ermäßigung nicht zu erreichen war; in den kleineren Städten hat der citierte Erlass manchmal die Frage des öffentlichen Bades erst in Fluss gebracht (Oberhollabrunn, Reichenau in Böhmen), beziehungsweise dahin gewirkt, dass schon bestehende Bäder entsprechend erweitert wurden (Bielitz, St. Pölten, Troppau).

An manchen Orten, ganz besonders dort, wo entsprechende natürliche Wasseransammlungen fehlen (Taus), wird sich die Errichtung der wohlfeil herstellbaren und zu unterhaltenden Brausebäder empfehlen, die ja als Volksbäder überhaupt von großem Belang sind und auch an verschiedenen Punkten (Trautenau etc.) schon bestehen. Sie bieten wenigstens eine wohlfeile Möglichkeit, den Körper gründlich zu reinigen.

Von 74 Städten finden sich Angaben betreffend Preisermäßigungen, beziehungsweise Freikarten für Bäderbesuch

durch Mittelschüler, erreicht über Einschreiten der Schulinstanzen, und die Stelle, welche das Beneficium gab; es sind natürlich manchmal verschiedene Förderer in einer Stadt; die bezügliche Zählung ergibt 91 Gönner, in 35 Fällen Stadtvertretungen, in 27 Private, in [illegible] Militärstellen, in 7 Vereine (Turn-, Schützen-, Bade-, Verschönerungs- und Waisenvereine), in 4 Städten der Unterstützungsfonds der Schule, in einer der Landesausschuss, in einer eine Sparcasse; meist sind die genannten Gönner die Besitzer, beziehungsweise Verwalter oder Pächter der Badeanstalt. Selbstverständlich ist damit nur eine allgemeine Andeutung bezüglich jener Städte gegeben, von welchen Äußerungen vorlagen.

Die Höhe der ermäßigten Schüler-Entrées in Zahlbädern ist nachstehend als Beispiel angeführt: Budweis, Neutitschein, Proßnitz, Tabor, Teschen [illegible] kr., Dornbirn, Jägerndorf, Klagenfurt, Kremsier, [illegible], Troppau, Weidenau [illegible] kr., Brünn, Feldkirch, [illegible] [illegible] Krakau, Laibach, [illegible] Olmütz, Pisek, St. Pölten, Rakonitz, Mähr.-Schönberg [illegible] Eger [illegible] Krems, Saaz, Wien, Wr.-Neustadt [illegible] Königgrätz [illegible] [illegible] die Schüler [illegible] [illegible] steigt der ermäßigte Preis [illegible] Olmütz und Wr.-Neustadt [illegible] Graz [illegible] 2[illegible], Brünn [illegible] 3[illegible], Wien [illegible] 4[illegible] kr. etc.

[illegible] für ermäßigte Preise einer [illegible] [illegible]

[illegible] Preise sind allerdings [illegible] für [illegible] [illegible] meist für eine größere [illegible] von den Schülern [illegible]

[illegible] kann für die [illegible] gestellt werden. [illegible] städtischen [illegible]

[illegible] Schwimm[illegible]

kundig waren — und dass fast alle diese Schüler das Schwimmen auf dem Lande, in den Ferien erlernt, dass aber bisher nur wenige die Zeit gefunden hatten, während des Schuljahres in das Schwimmbad zu gehen, wenn sie ihren Schulpflichten nachkommen wollten, eine Erscheinung, die sich allerdings zum Theil daraus erklärt, dass Wien zu wenig geräumige Schwimmbäder hat, die Strombäder aber, wie gesagt, zu weit außerhalb des Stadtcentrums liegen.

Anders stehen natürlich im allgemeinen die Sachen in den kleinen Städten. In zahlreichen Fällen haben die Schüler die Gelegenheit gratis zu baden, da ihnen in offenen Gewässern passende Plätze abgesteckt, eventuell auch noch schwimmkundige Aufseher beigestellt wurden (Budweis, Ung.-Hradisch, Krems, Pilgram, Pisek, Prerau, Wittingau u. s. f.); die Lehrer richten in solchen Städten öfter ihre Spaziergänge nach den Badeplätzen, stellenweise sorgt die Ortspolizei für eine förmliche Aufsicht. In manchen Städten sind die städtischen Bäder für Schüler an allen oder gewissen Wochentagen ganz frei gemacht worden (Troppau, Salzburg — Brausebad) oder doch für arme (Horn, St. Pölten etc), oder es wurden in städtischen oder privaten Bädern Eintrittsgebüren erhoben, wie sie früher citiert wurden, d. h. mehrfach Preise gemacht, durch welche die von der Schule belebte Badelust der Jungen natürlich nicht herabgestimmt wird.

Es ist selbstverständlich, dass die Gewährung derartiger Beneficien vom Schulerfolg unabhängig sein soll: dass dem so ist, wird auch stellenweise constatiert.

Schwieriger als das Baden ist natürlich der kunstgerechte Schwimmunterricht zu fördern; hier sind die ermäßigten Preise für den ganzen Unterricht (3 fl., 5 fl.), wie sie selbst in kleineren Provinzstädten mitunter vorkommen, vielfach für die Casse der Eltern zu hoch; andererseits gewährten aber sowohl die Schwimmschulbesitzer als andere Wohlthäter zusammen eine große Anzahl von Freikarten für Schwimmunterricht, so dass auch diese Fertigkeit sicher in beträchtlichem Aufschwunge begriffen ist.

Beispiele von ermäßigten Schülerpreisen für Schwimmunterricht sind: Mähr.-Weißkirchen: 1 fl., Brüx: 1 fl. 50 kr., Troppau: 1 fl. 50 kr. bis 2 fl., Prag: 1—3 fl., Pisek: 1 fl. 80 kr., Arnau, Budweis, Mies: 2 fl., Czernowitz: 3 fl., Znaim: 3 fl. 20 kr., Eger, Jägerndorf: 5 fl. — Eine ermäßigte Schwimmlection für Schüler kostet z. B. in Villach: 5 kr., Melk, Mähr.-Schönberg: 10 kr.,

Klagenfurt: 10—15 kr., Görz: 12 kr., Olmütz: 15 kr., Brünn, Graz, Wien: 20 kr.; es ist bei den Preisangaben nicht allerorten klar, ob sie sich auf die Lection allein beziehen oder ob der Eintritt ins Bad inbegriffen sei.

An Orten ohne besonders eingerichtetes Vollbad, beziehungsweise ohne Schwimmlehrer, können allerdings schwimmkundige Väter, Lehrer, Mitschüler die erste Anleitung zum Schwimmen geben, welche von findigen Jungen rasch mit Erfolg ausgenützt zu werden pflegt, die sich dann selbst vervollkommnen. In der That constatiert ein Bericht (Ung.-Hradisch 1891), dass die größere Anzahl der Schüler das Schwimmen erlernt habe, trotzdem eine Schwimmschule fehle; wenn solches Schwimmen auch nicht auf der Höhe stehen kann, wie das von einem englischen Trainer gelehrte, so erreicht es doch öfter einen beträchtlichen Grad von Vollkommenheit und ist jedenfalls besser als keines.

Ein nicht zu unterschätzendes Verdienst um die Verbreitung der Schwimmfertigkeit erwarben sich an einer Reihe von Orten die Militärschwimmschulen durch weitgehende Preisherabsetzung, beziehungsweise Gewährung von Freiplätzen für Schüler. – Recht günstige Verhältnisse bestehen öfter für Schwimmkundige, d. h. für das Üben; so hat z. B. der Amateur-Schwimmclub in Wien Freischwimmern unter den Studenten besondere Vortheile für das Üben eingeräumt.

Dafür, wie günstig die Dinge stehen, wenn alle Betheiligten zusammenwirken, sei hier ein Beispiel (es könnten mehrere angeführt werden) citiert. In Klagenfurt hat die Pferdebahnverwaltung den Schülern gegen Vorweisung der Legimation die Fahrt zum Wörthersee und zurück auf 5 kr. ermäßigt; die Schwimmschulgesellschaft gibt eine derartige Ermäßigung, dass ein Bad im Wörthersee sammt Wäsche und Schwimmunterricht 10 kr. kostet. Wer noch billiger baden will, benutzt die Badeanstalt am Ausflusse des Wörthersees, wo der Besitzer den Mittelschülern den Badepreis auf 3 kr. ermäßigt hat, wobei sie für die Badewäsche selbst zu sorgen haben; der dortige Schwimmmeister hat sich bereit erklärt, 10 Schülern unentgeltlich, 25 um 10 kr., allen übrigen um 15 kr. eine Schwimmlection zu geben (St G 1892).

Auf Grund des Studiums der Jahresberichte ergibt sich, soweit Details über die den Schülern zugestandenen Vortheile und deren Benützung vorliegen, dass eine gewaltige Summe von

Möglichkeit erstrebt, geboten und benützt wurde, wobei sehr verschiedenartige Combinationen hinsichtlich der Art der Beneficien vorkamen.

Die gebotenen Erleichterungen hatten eine entsprechend lebhafte Benützung zur Folge. Es ist gewiss erfreulich, wenn z. B. von Teschen (StRS 1892, 227 Sch) berichtet wird, dass während des Monats Juni nur fünf Schüler nicht gebadet haben, wenn von Brünn (I. d StG 1892, 403 Sch), d. h. einer Stadt, wo die Größe schon bedeutend ins Gewicht fällt, als Summe der Badetage aller Schüler für das ganze Schuljahr (gegen 10 Monate) 5561 angegeben wird, oder wenn in Cilli (St G 1892) 89% der Schüler Flussbäder nahmen. Würden die bezüglichen Ziffern für die Zeit vor drei Jahren existieren, der Fortschritt wäre höchst augenfällig nachweisbar.

Eine förmliche Statistik ist im allgemeinen nicht möglich; nur für Niederösterreich[1]) können hier (und im folgenden) ein paar Ziffernbelege in größerem Stil gegeben werden.

Am Schlusse des Schuljahres 1890/91 waren in Niederösterreich unter

10.297 öffentlichen Schülern an 37 Mittelschulen 5296 (51·4%) Schwimmer,

darunter von

8239 öffentlichen Schülern an 25 Mittelschulen Wiens 4203 (51·0%) Schwimmer.

Am Schlusse des Schuljahres 1891/92 waren in Niederösterreich unter

10.484 öffentlichen Schülern an 37 Mittelschulen 5322 (50·7%) Schwimmer,

darunter von

8380 öffentlichen Schülern an 25 Mittelschulen Wiens 4220 (50·3%) Schwimmer.

Das Publicum steht der Sache im allgemeinen recht freundlich gegenüber; wenn stellenweise (Gr.-or. RS Czernowitz

[1]) Die verschiedenen Landesschulbehörden haben gelegentlich der Intimation des citierten Ministerialerlasses mancherlei Durchführungsbestimmungen und Winke an die Schulverwaltungen herausgegeben und auch sonst die Sache gefördert; der k. k. niederösterreichische Landesschulrath hat die Anführung gewisser statistischer Daten verlangt, weshalb, wie hier beim Baden, so später auch beim Eislauf und Ferienaufenthalt für Niederösterreich Übersichten gegeben werden können.

1892) über das Gegentheil geklagt, aber dabei bemerkt wird, dass die Betheiligung der Schüler trotzdem eine erfreuliche Zunahme zeige —, so wollen wir uns damit trösten, wie die Sache aussehen wird, bis jene Knaben, die heute baden lernen, einst Männer sind!

Eislauf.

Der Eislauf ist natürlich noch weit mehr als das Baden und Schwimmen von den Temperaturverhältnissen des Jahres abhängig und dadurch, dass er überhaupt vom Klima erlaubt sein muss, für gewisse Städte (Triest — Zara) von vornherein unmöglich; von solchen Orten abgesehen, muss aber bemerkt werden, dass er einen ganz bedeutenden Aufschwung unter reger Betheiligung der Jugend genommen hat. Natürlich hängt auch bei diesem Sport vieles von der besonderen örtlichen Lage der Stadt (ungerechnet die klimatische) ab — allein zwischen dem Vorhandensein einer gefahrlosen Eisfläche und deren Benützung liegt eine ziemlich weite Kluft. Es darf gesagt werden, dass es heute nur wenige Eisplätze mit Eintrittsgebür in Österreich geben wird, auf welchen die Mittelschüler nicht Preisermäßigungen, zum Theil recht bedeutende, genießen, beziehungsweise eine größere oder geringere Zahl ärmerer sogar freien Eintritt hat, sei es, dass ihn der Besitzer gewährt, sei es, dass andere Förderer der guten Sache ihn bezahlen.

Wenn auch früher bei kleineren Orten natürliche Eisflächen vorhanden waren, welche man hätte umsonst benützen können, so werden sie öfter zu den verbotenen Früchten gehört haben, während sie jetzt im Gegentheil ausdrücklich empfohlen, eventuell auch auf ihre Gefahrlosigkeit geprüft und überdies öfter mit Bequemlichkeitseinrichtungen versehen werden. In den bezüglichen Städten (Deutschbrod, Elbogen, Kometau etc.) bedarf es natürlich nicht großer Zurüstungen. Lehrer, welche selbst Eisläufer sind, haben sich an vielen Stellen unter der Jugend bewegt, derart eine mühelose Beaufsichtigung ausgeübt und überdies öfter hilfreich Anfängern beigestanden.

Die Dinge sehen auch in dieser Richtung, wie sich aus den Jahresberichten der Mittelschulen ergibt, jetzt ganz anders aus als früher

Um anzudeuten, wie sehr die Benützung von entsprechend gehaltenen Eisbahnen neben der Ermunterung durch die Schule den Schülern erleichtert worden ist, möge hier eine kleine Zusammenstellung Platz finden, so gut sie auf Grund von Berichten gegeben werden kann, die, wie bemerkt, nicht für eine statistische Bearbeitung gemacht wurden. Ist auch derart kein vollständiges Bild zu haben, so wird der Stand der Dinge doch einigermaßen illustriert.

Ermäßigungen für den Eintritt gaben Mittelschülern mindestens die folgenden Eisbahnbesitzer oder -Verwalter: in 64 Städten Eislaufvereine, in 22 Privatbesitzer, in 11 Turn-, Ruder- und sonstige (meist sportliche) Vereine, in je 4 Städten Gemeinden und Militärstellen; nur der Eislaufverein in Königgrätz hat die Gewährung von Ermäßigungen nicht zugestanden.

Die ermäßigte Saisonkarte war für die Schüler in manchen Städten, auf verschiedenen Eisplätzen und für verschiedene Schulen verschieden hoch. Einige Beispiele für den Preis der Schülersaisonkarte:

Krumau: 30—50 kr., **Pilgram**: 40 kr., **Jungbunzlau, Mies, Mähr.-Ostrau, Pisek, Reichenau i. B.**: 50 kr., **Klattau**: 50—60 kr., **Leitmeritz, Linz, Oberhollabrunn**: 50 kr. bis 1 fl., **Budweis**: 50 kr. bis 1 fl. 50 kr., **Tabor**: 60 kr., **Příbram**: 80 kr., **Görz**: 80 kr. bis 1 fl. 50 kr., **Bielitz, Cilli, Freistadt, Gaya, Hohenmauth, Kremsier, Laibach, Radautz, Rakonitz, Ried, Stockerau, Mähr.-Trübau**: 1 fl., **Iglau, Prag**: 1—2 fl., **Pardubitz, Ung.-Hradisch**: 1 fl. 20 kr., **Saaz**: 1 fl. 25 kr., **Eger, Karolinenthal (Prag), Böhm.-Leipa, Pilsen**: 1 fl. 50 kr., **Klagenfurt, Krems, Wr.-Neustadt, Olmütz**: 2 fl., **Wien**: 2—5 fl., **Czernowitz, Smichow (Prag), Troppau**: 3 fl. u. s. w.

Ermäßigte Eintrittskarten für einmalige Benützung waren zu haben in den folgenden Städten zu den beigesetzten Preisen: **Pisek, Troppau**: 1—3 kr., **Jičin**: 2 kr., **Eger, Wr.-Neustadt**: 3 kr., **Jägerndorf, Landskron**: 3—5 kr., **Teschen**: 4 kr., **Bielitz, Budweis, Cilli, Krems, Mies, Neutitschein, Pardubitz, St. Pölten, Proßnitz, Villach**: 5 kr., **Brünn**: 5—8 kr., **Graz**: 5—10 kr., **Wien**: 5—30 kr., **Ung.-Hradisch**: 6 kr., **Smichow (Prag)**: 8 kr., **Baden, Innsbruck, Steyr**: 10 kr., **Iglau**: 10—15 kr., **Olmütz**: 10—20 kr., **Salzburg**: 10—25 kr. etc.

Die Schwankung des Preises in demselben Ort bezieht sich nicht nur auf verschiedene Bahnen, sondern zum Theil auch auf verschiedene Tage und Stunden; daraus erklärt sich stellenweise auch die relative Höhe der Saisonkarte, die ja für alle Tage und Stunden gilt; interessant ist bei der Saisonkarte die häufige Wiederkehr des G u l d e n s in den Preisen;

hoffentlich werden aus diesen Gulden im kommenden Winter Kronen! Der Guldenpreis tritt in Städten mit verschiedener Einwohnerzahl auf. Es mag öfter bei den großen Differenzen der Eintrittspreise überhaupt möglicherweise die Qualität des Eisplatzes wirklich einen entsprechenden Einfluss geübt haben das lässt sich natürlich aus der Ferne nicht beurtheilen; vermuthen darf man nach den Berichten, dass die Preisbestimmung der Qualität der Bahn nicht immer äquivalent war, übersehen darf aber auch nicht werden, welcher Unterschied in den Erhaltungskosten besteht zwischen einem raffiniert gepflegten, getegelten oder gar betonierten, mit Dampfpumpen allnächtlich bespritzten, elektrisch beleuchteten, mit geheizten Garderoben und Buffets versehenen Eisplatz, auf welchem Militärmusik concertiert — und einer durch Stauung eines Baches überrieselten Wiese mit Sitzbänken.

Neben den ermäßigten Preisen wurden mehrfach Freikarten gewährt: so in 29 Städten von Eislauf-, in 3 Städten von anderen Sportvereinen, in 6 Städten von Privatbesitzern, in je 2 von Gemeinden und Militärstellen, in einer vom Schülerunterstützungsfonds; so gut, wie z. B. in Weidenau, wo der Eislaufverein den Studierenden Freikarten in unbeschränkter Zahl bewilligte, oder wie in St. Pölten, wo die Gemeinde einen Eisplatz zur unentgeltlichen Benützung für die Schüler herstellen ließ, geht es diesen vorläufig noch nicht überall.

An einer ganzen Reihe von Schulen ist schon ein Stock von Schlittschuhen für unbemittelte Schüler vorhanden (II. d. St.G. Brünn — 40 Paare); derlei Schlittschuhe sind theils von Privaten oder den Schulfonds angeschafft, theils von Eislaufvereinen geschenkt oder geliehen, theils von Schülern, denen sie zu klein geworden sein mögen, gespendet worden. Zum Ankauf werden sich aus naheliegenden Gründen besonders große Nummern empfehlen. — Über Schlittschuhe verfügen z. B. Schulen in Budweis, Freistadt, Ung.-Hradisch, Jägerndorf, Wr.-Neustadt, Nikolsburg, Prag, Radautz, Reichenberg, Troppau, Villach, Mähr.-Weißkirchen, Wien. Auch die Vereinbarung mit einem Kaufmanne behufs Erlangung herabgesetzter Schlittschuhpreise für Schüler wurde angewendet (Laibach).

Von besonderen Unternehmungen zur Förderung des Eislaufes seien die folgenden erwähnt

In Wien hat das Directoren-Comité einer Anzahl entsprechend gelegener Mittelschulen von Sr. k. u. k. Apostolischen Majestät Obersthofmeisteramte über Ansuchen eine prächtige Wiese in einem der herrlichen Parks 'des Allerhöchsten Hofes („Augarten") zur Benützung für die Schüler zugestanden erhalten. Diese Wiese bietet einen Platz von circa 5500 m^2. Um dort einen Eisplatz zu gewinnen, hat das genannte Comité mit einem Privatunternehmer die Vereinbarung getroffen, dass derselbe diese Wiese durch Bohrbrunnen entsprechend bewässere, mit einem Gitter einfriede und elektrisch beleuchte, wogegen er die Eintrittsgelder des nicht der Schule angehörenden Publicums erhält und die Schüler 2 fl. pro Saison als Erhaltungsbeitrag zahlen, d. h. für 2 fl. den ganzen Winter hindurch den Eisplatz besuchen dürfen. Hiebei sind auch Benützungsbedingungen vereinbart, denen zufolge eine Behinderung des Eislaufes der Studenten durch das übrige Publicum ausgeschlossen ist, und die Schüler erhalten überdies noch Anleitung durch die Turnlehrer. Der Preis ist für die Benützung eines solchen Platzes in Wien recht bescheiden und es ist Aussicht auf weitere Reduction vorhanden. Im Sommer dient die Wiese als Spielplatz.

Von einer Schule (LRS Znaim 1892, 238 Sch) wurde ein Vertrag mit dem Eislaufverein abgeschlossen, laut dessen gegen einen Pauschalbetrag von 80 fl. alle Schüler der Anstalt die Eisbahn besuchen können; die Schule verkaufte die Saisonkarte zu 80 kr., beziehungsweise 40 kr. an die Schüler und gab armen Freikarten; der bei der ganzen Transaction erzielte Überschuss wurde den Zwecken des Jugendspieles zugeführt.

In Krems verpflichtete die Gemeinde den Pächter des Eisplatzes zu ermäßigten Preisen für die Schüler.

Feldkirch hat die Eisbahn auf dem rings abgeschlossenen Schulhofe (2000 m^2).

Stellenweise fand auch das bei den Kleineren so beliebte Fahren mit Handschlitten Förderer; so hat das Bürgermeisteramt in Trautenau den Schülern eine abschüssige Straße zum Befahren mit Handschlitten überlassen, in Oberhollabrunn wird die betreffende Fahrbahn auch mit dem Schneepflug gereinigt.

In manchen Gegenden Österreichs ist das „Eisschießen" (eine Art Kegelspiel mit auf der Eisfläche gleitendem Geschoss) beliebt (z. B. Obergymnasiasten in Oberhollabrunn). Auch Spiele

auf der Eisbahn wurden vorgenommen (Freistadt — schwarzer Mann, Schlangenziehen mit Schleudern, Barlauf). Hie und da wurde Schneeballwerfen und Schneemannbauen betrieben. — Ein beabsichtigter Eiswettlauf in Brüx ist zu Wasser geworden, der Eislaufverein in Villach, sowie der Training-Eisclub in Wien haben Wettlaufen (Schnell- und Kunstlauf) für die Mittelschüler arrangiert. — Von Versuchen, das Schneeschuhlaufen einzubürgern, findet sich noch nichts in den Berichten; dieser Sport wäre von praktischem Wert in Städten, deren Mittelschulen zahlreiche weit von auswärts kommende Schüler haben; in den hochnordischen Ländern laufen thatsächlich Schüler auf Schneeschuhen zur Schule.

An einer Anstalt (CRG VI Wien 1891, 454 Sch) ergab eine Anfrage, dass in dem dem Erlasse folgenden Winter fast 100 Schüler den Eislauf erlernten. (Vor dem Erlass 137, im folgenden Winter 232 Eisläufer). Leider wurden die bezüglichen Daten an anderen Schulen nicht erhoben.

Am Schlusse des Schuljahres 1890/91 waren in Niederösterreich unter

10297 öffentlichen Schülern an 37 Mittelschulen 6203 (60·2%) Eisläufer,

darunter von

[illegible] öffentlichen Schülern an 25 Mittelschulen Wiens 4753 ([illegible]) Eisläufer.

Am Schlusse des Schuljahres 1891/92 waren in Niederösterreich unter

[illegible] öffentlichen Schülern an 37 Mittelschulen [illegible] (60·4%) Eisläufer,

darunter von

[illegible] öffentlichen Schülern an 25 Mittelschulen Wiens [illegible] ([illegible]) Eisläufer.

[illegible] im Winter 1891/92 [illegible] Jahren [illegible] Laibach [illegible]

Winter bedeutend regelmäßiger als in den Vorjahren und die Anzahl der Erkrankungen infolge von Erkältungen hat sich verhältnismäßig bedeutend herabgemindert. Mit der physischen Stärkung nahm auch die geistige Frische der Schüler zu.“

Die Spiele.

Sie sind das wichtigste der hierher gehörigen Capitel; von allem, was zur Pflege des Jugendspieles nöthig ist, war zunächst an den meisten Stellen nur — die Jugend selbst vorhanden; wie wenig ein Spiel, das einigermaßen den Namen „Jugendspiel“ verdient, früher gepflegt worden ist, geht wohl am besten daraus hervor, dass die Berichte theils, d. h. vorwaltend, von Plätzen sprechen, welche die Gemeinde u. s. f. für das Jugendspiel zur Verfügung stellte, theils die Unmöglichkeit eines organisierten Spielens constatieren, weil ein passender Platz noch nicht zu beschaffen war; diese letztere Bemerkung gilt natürlich ganz besonders von großstädtischen Schulen, aber nicht ausschließlich. Überaus selten findet man constatiert, dass Spielplätze bereits früher der Jugend zugewiesen waren (Neuhaus, Weidenau). Besonders verdient an die Thatsache erinnert zu werden, dass in Leitmeritz der (verewigte) Schulrath P. J. Maresch im Verein mit der Stadtgemeinde für die Realschule, die Lehrerbildungsanstalt und die Volksschule 1864 einen Platz widmete; die Gemeinde wird jetzt denselben voraussichtlich noch vergrößern.

Unter solchen Umständen, d. h. den großen Schwierigkeiten, welche vor allem in zahlreichen Städten bezüglich der Platzbeschaffung vorhanden sind, muss man um so freudiger der vielen und schönen Erfolge gedenken, welche in kurzer Zeit bereits erreicht wurden.

In erster Linie haben sich hier die Gemeinden ein großes und anerkennenswertes Verdienst erworben und es liegt nahe, dass dieselben der Jugend ihrer Bürgerschaft den nöthigen Raum zu freier Bewegung schaffen; einige sind mehr oder weniger entschieden im Begriffe es zu thun (Eger, Horn, Saaz). Ein Überblick ergab 41 Fälle, in welchen die Gemeinden den Platz beistellten. Darunter sind respectable Leistungen: Die Gemeinde Brüx z. B. kauft eine Wiesenarea um rund 12.000 fl.,

lässt den Platz herrichten und mit Bäumen bepflanzen u. s. w. Es scheint aber mehrfach selbst in kleinen Städten recht schwer zu sein, einen passenden und nahegelegenen Platz zu beschaffen (Elbogen, Komotau, Marburg, Raudnitz, Reichenau i. B. etc.), oder es sind klimatische Hindernisse ein besonderer Grund (Sonnenbrand und Wind — Zara), oder die besondere örtliche Lage macht die Schwierigkeit begreiflich (Triest). Zu weit vom Orte entfernte Spielplätze sind nicht nur ein Übel wegen des großen Zeitaufwandes, der nothwendig wird, sondern auch deswegen, weil jedes vermuthete Regenwetter die Spielabsicht leicht vereiteln, jedes unvermuthete vielfach später unangenehm treffen wird.

Der ideale, d. h. der von der Schule nicht weit entfernte, ausreichend große, eingefriedete, an der Sonnenseite mit Bäumen bepflanzte, planierte, mit kurzgeschorenem Rasen bewachsene, mit Geräth- und Schutzhütten versehene Spielplatz ist, wenn auch nicht häufig, doch stellenweise schon vorhanden und eine ganze Reihe von großen Städten, beziehungsweise Schulen erfreuen sich bereits solcher Plätze, die wenigstens einige der wichtigsten unter den obigen Bedingungen erfüllen.

Einige Beispiele für die Größe der Spielplätze: Baden bei Wien (225 Sch)[1] hat einen Spielplatz, der 10.000 m^2 misst, mit Bäumen, einem Geschenk Sr. kaiserl Hoheit des Herrn Erzherzogs Albrecht, umfriedet und mit einer Hütte für Geräthe und Gewänder versehen ist; Dornbirn (URS, 48 Sch) hat 1000 m^2 Spielplatz von Waldbäumen umschattet, mit wohlausgerüstetem Requisitenhäuschen, Feldkirch (St RG, 142 Sch) hat 2000 m^2, Freistadt (St G, 165 Sch) 10.000 m^2, Klagenfurt (St G, St RS, 414 Sch) 7970 m^2, Böhm.-Leipa (St G, CRS, 472 Sch) 33.182 m^2, Leitmeritz (St G, CRS, 723 Sch) 11.500 m^2, Mies (St G, 207 Sch) 1554 m^2, St Pölten (LRG, 209 Sch) 23.000 m^2, Teschen (St G, St RS, 518 Sch) 11.500 m^2, Waidhofen a Th. (LRG, 70 Sch) 2420 m^2 u. s. w.

In einer Reihe von Städten sind die Spielplätze bereits recht gut ausgestattet, so eingezäunt oder mit Bäumen umpflanzt, eventuell mit Sitzbänken für Zuschauer und Buden zur Aufbewahrung von Geräth, beziehungsweise zum Ablegen von Kleidungsstücken und Schutz bei Unwetter versehen (Budweis, Ung. Hradisch, Nikolsburg, Reichenberg etc.).

Für die Adaptierung der Plätze haben meist die Gemeinden gesorgt, die den Platz gaben (Bielitz, Czernowitz, Laibach.

[1]) Die Schülerzahlen beziehen sich auf öffentliche Mittelschüler am Schlusse des Schuljahres 1891/92. natürlich werden die bez. Plätze vielfach auch der Volksschulbevölkerung zugänglich gemacht.

Oberhollabrunn, Rakonitz, Trautenau etc.). In Kaaden haben die Schüler — es wurde nur ein Arbeiter engagiert — den Gipfel eines Berges im Ausmaße von 2500 m^2 selbst geebnet; die landwirtschaftliche Mittelschule schenkte Bäume und Sträucher, der Anpflanzungsverein gab die Schutzhütte und Bänke, die Stadt und Private Geld; in B.-Leipa pachtete die Gemeinde auf 12 Jahre den Platz und richtete ihn her; von Geldspenden gab u. a. die dortige Sparcasse 500 fl., die Direction der böhmischen Nordbahn stellte 30 Waggons theils Schlacke, theils Kies bei, der Anpflanzungsverein mehrere Hunderte von Bäumen — man darf sagen: viribus unitis. Es wird weiter darüber berichtet (StG Böhm.-Leipa): „Das Grundstück selbst besitzt ein Ausmaß von 3 *ha* 31 *a* 82·5 m^2 und wird durch eine 200 *m* lange, 7 *m* breite Laufbahn in der Richtung von Süd nach Nord in zwei Abtheilungen getheilt, von denen die östliche für die Knaben, die westliche für die Mädchen bestimmt ist. Der ganze Spielplatz ist mit Bäumen bepflanzt, ebenso die Laufbahn; auch wird der ganze Platz von einer in der Richtung West-Ost gehenden Allee durchschnitten. Durch diesen letzten Weg zerfällt der für die Knaben bestimmte Raum in zwei Abtheilungen, von denen die eine den Mittelschülern, die andere den Schülern der Volksschule zugewiesen ist. An der östlichen und der westlichen Seite sind wieder kleinere Spielplätze, je 18 *m* lang und 13 *m* breit, welche voneinander durch Bäume getrennt und für den Weit-, Tief-, Hoch-, Stabsprung, das Reck, Schwebebäume, Gerwerfen, Rundlauf, Barren und für ein Klettergerüst bestimmt sind. Ausgesetzt wurden über 300 Bäume, darunter etwa 200 Kastanien, 20 Linden, 30 Ahornbäume, 15 Eschen und 30 Eichen; der ganze Platz endlich ist von einem lebenden Zaun eingeschlossen....

Am 21. Juni wurde der Spielplatz in festlicher Weise eröffnet. Die Überwachung bei den Spielen führen abwechselnd Mitglieder des Lehrkörpers.“ —

Hinsichtlich der Localitäten zur Unterbringung der Geräthe u. s. f. haben an mehreren Orten die Besitzer nahebefindlicher Räumlichkeiten durch gefällige Überlassung derselben, eventuell auch Besorgung der Aufbewahrung und Bewachung Verdienste erworben (z. B. k. k. Scharfschützencorps Budweis). In Laibach lässt die Gemeinde die Spielwiese entsprechend mähen u. s. w.

Nächst den Gemeinden leisten sowohl in Bezug auf die Zahl der Orte als auch in Bezug auf die Größe der Flächen höchst Dankenswertes die Commanden von Theilen des k. und k. Heeres (Corps-Commanden, Regiments-Commanden), welche zu Zwecken des Jugendspieles während passender Stunden die Exercierplätze überließen (Brünn, Budweis, Cilli, Graz, Iglau, Jägerndorf, Königgrätz, Krems, Wr.-Neustadt, Olmütz, Pilsen, Prag, Proßnitz, Radautz, Reichenberg, Rudolfswert, Steyr, Mähr.-Weißkirchen, Znaim). Soweit Nachrichten vorliegen, haben nur in zwei Fällen Militärstellen die bezüglichen Ansuchen abweislich beschieden. In einigen Städten wird der Exercierplatz neben dem Gemeindespielplatz benutzt.

Es ist begründet und naheliegend, dass die militärischen Commanden der Jugend die Exercierplätze, wenn dieselben nicht benöthigt werden, zu dem hier besprochenen Zwecke überlassen; das organisierte Jugendspiel mit seinen festen Regeln und seiner lebhaften Körper- und Geistesarbeit eigener Art ist die beste Vorschule des Knaben für eine wichtige Seite des Waffendienstes, für jene Seite, bei welcher das Individuum nicht nur als Maschine auftritt. Der Knabe, welcher auf dem Exercierplatz fleißig das Spiel betrieb, wird als Jüngling zweifellos sich bei den Feldübungen oder im Kriege anstelliger und ausdauernder erweisen als jener, welcher nicht so „spielte“, wie es hier gemeint ist; für das Exercieren, die wesentlich mechanische erste Vorübung, ist das Turnen die beste Vorschule.

Außer den Gemeinden und Militärstellen haben noch eine Reihe von Förderern der guten Sache local durch Zuweisung wertvoller Plätze genützt; vor allem muss in dieser Richtung Sr. k. und k. Apostolischen Majestät Obersthofmeisteramtes gedacht werden, welches in Wien, wo die Platzfrage große Schwierigkeiten macht, Tausenden von Schülern durch Zuweisung von Plätzen in den Parks des Allerhöchsten Hofes (Augarten, Prater, Schönbrunn) das Jugendspiel ermöglichte; in Teschen hat die Cameraldirection Sr. kais. Hoheit des Herrn Erzherzogs Albrecht, in Brünn der mährische Landesausschuss, in Bielitz die evangelische Kirchengemeinde, an anderen Orten verschiedene (Jugendspiel-, Eislauf-, Turn-, Verschönerungs-) Vereine, Sparcassendirectionen, Private die Plätze beschafft, beziehungsweise deren Benutzung gestattet. Auch die Miete durch die Schule selbst ist als benutztes Mittel der

Platzbeschaffung zu nennen (dStUG Smichow-Prag mit Hilfe des Vereines der deutschen Schulfreunde und des deutschen Gesangvereins, II. dStG Brünn). Wahrscheinlich wäre dieses Mittel noch an manchen besonders kleineren Orten anwendbar.

Es wäre recht interessant zu erfahren, wie groß die Area ist, welche bereits zu Zwecken des Jugendspieles in ganz Österreich ausgenutzt wird, in wessen Besitz sie sich befindet, sowie ob die Möglichkeit der Benützung dauernd sichergestellt, wahrscheinlich dauernd oder ganz unsicher ist.

Wo ausreichende und passend gelegene Spielplätze bisher nicht zu erlangen waren, hat man sich mit dem Einüben geeigneter Spiele in Turnstunden begnügen müssen; diese Gelegenheit wurde überdies vielfach benützt, um die nöthigen Vorübungen für den Spielplatz zu machen. So z. B. wurde (Franz Josefs-Gymnasium I Wien) speciell Cricket in den Spielstunden des Turnunterrichtes an eigens errichtetem Zimmergeräth eingeübt; größere Sicherheit und Fertigkeit beim eigentlichen Spiel im Freien war die Folge.

Am schwierigsten ist die Platzfrage natürlich in den großen Städten endgiltig zu lösen; hier sind, abgesehen von besonders günstigen Constellationen, meist nur die peripherisch gelegenen Schulen in der Lage, passende Plätze aufzutreiben, während die centralen für die Kurzsichtigkeit vergangener Jahrzehnte büßen müssen; immerhin muss die Hoffnung nicht aufgegeben werden: In Wien z. B. wird während der nächsten Jahre über Flächen entschieden, welche theils als sogenannte Linienwallgründe die halbwüste Umgebung der ehemaligen Octroigrenze, theils seit 20 Jahren nicht mehr belegte, nunmehr aufzulassende Friedhöfe vorstellen, theils Exercierplätze bei Kasernen sind, deren Verlegung nach der Peripherie der Stadt geplant wird.

Alle diese Gründe repräsentieren natürlich ungeheuere Capitalswerte und es müssten gewaltige Summen in Spielplätzen investiert werden, um dem Bedürfnisse einer rationellen Jugenderziehung hier nur einigermaßen genügen zu können; diese Plätze waren vor 100 Jahren außerordentlich weniger wert und werden nach 100 Jahren außerordentlich mehr wert sein als heute — gerade so wie die bisher nicht entsprechend reservierten Plätze an der heutigen Peripherie; es ist im Interesse der Bürgerschaft nöthig, dass die Vertretung derselben die Bedeutung gesunder Erziehung in einer Millionenstadt so hoch veran-

wichtige als diese Bedeutung veranschlagt zu werden verdient, dann werden auch die vom Standpunkt der Hygiene nötigen großen Opfer als unvermeidlich anerkannt und gebracht werden. — Wenn eine große Provinzgemeinde der Ansicht ist, in der Sache zu nichts verpflichtet zu sein, weil der bezügliche Erlass an die Ministerien gerichtet ist, deren Unterricht dem Staate zufalle, dann — möge sie den nötigen Raum für ihre Volksschüler geben, damit das Gewissen der Schulgemeinde beruhigt sei.

Zum Ideal eines Spielplatzes gehört natürlich auch die [illegible] desselben für die Zukunft. Einzelne Anstalten begannen eigenen Fonds zu sammeln, um mit der Zeit, wenn irgend möglich, einen eigenen Spielplatz käuflich zu erwerben; [illegible] Wohltäter eine Idee, die bereits [illegible] war und — wenn auch bescheiden — [illegible] wurde, [illegible] Legat mit einem Betrage [illegible]. Hier ist noch zu beachten, dass mancher tüchtige Junge eines Lehr[illegible] [illegible] Schule, wo er auch [illegible] wird als einer, wo es nur „Plätzchen“ gab.

Zur [illegible] der Jugendspiele ist außer dem passenden Platz auch Spielgerät nötig und besonders für die ersten Jahre ein [illegible] Spielleiter [illegible], was für die Mittelschüler ganz besonders ins Gewicht fällt — Zeit. Alles das wird aber in der nächsten Zukunft weit weniger Schwierigkeiten machen als der Platz.

Zahlreiche Anstalten besitzen bereits ein reiches Inventar von schönen und wertvollen Spielgeräten; leider fehlen die [illegible] die Höhe als die Beschaffungsart der bezüglichen Fonds [illegible] der Gesamtgeldbetrag von gesammelten Geräten angegeben, macht für jede [illegible] Anstalten nach den Berichten für [illegible] [illegible] 300 fl. Die Anschaffung geschah in einem [illegible] der Fälle durch Sammlung unter den Schülern; [illegible] hatten [illegible] oder Private die Kosten getragen; die Privaten „Schulfreunde“ werden [illegible] wohl vorwiegend die Eltern sein; da diese auch bei den „Schülersammlungen“ [illegible] so waren es [illegible] in der Mehrzahl der Fälle die Eltern; das ist gewiss auch [illegible], da [illegible] jeden Eltern [illegible] für ihre Kinder geben.

werden, Vortheile, zu deren Kosten sie nach Kräften beizutragen mit Recht aufgefordert werden, andererseits diese Beiträge keine obligaten waren; in einigen Fällen gaben Sparcassen beziehungsweise Regiefonds, der Landesausschuss, Schülerbibliotheksfonds Geld; einmal hat auch die zu diesem Zwecke gegen Eintrittsgeld gehaltene Vorlesung eines Turnlehrers (Ung.-Hradisch) ein erkleckliches Sümmchen geliefert. Ein ähnliches Bild geben die Jahresberichte für 1890/91. Natürlich haben wiederholt verschiedene Factoren zusammengesteuert, zu denen auch Vereine gehören. Man darf aus den Beispielen schließen, dass an allen österreichischen Mittelschulen zusammen in Spielgeräthen bereits ein ziemlich beträchtliches Capital investiert ist; mögen einst die Schulen ebenso wie sie ihr eigenes Spielgeräth haben, auch eigene Spielplätze besitzen.

Spiellehrer und gleichzeitig oberste Spielleiter waren gewöhnlich die Turnlehrer; sie haben mit einer überaus dankenswerten, von Seiten der Anstaltsleitungen wiederholt anerkannten Opferfreudigkeit selbstlos für die Entfaltung der Jugendspiele gewirkt, übrigens auch mehrfach Schwimmen und Eislauf gefördert. Eine Anzahl von Schülern wurde als Leiter der einzelnen Spielpartien mit gutem Erfolg bestimmt und vielfach, gewiss mit Recht, die möglichste Selbstverwaltung gestattet. Directoren und Lehrer haben die Spielplätze öfter besucht; die Anwesenheit der Lehrer scheint die Schüler in ihrem Vergnügen durchaus nicht beengt zu haben.

Eine Anzahl der Spielleiter hatte Spielcurse mitgemacht oder die Verhältnisse auf Studienreisen nicht nur in Österreich, sondern auch im Ausland, besonders im Deutschen Reiche (Berlin, Braunschweig, Dresden Görlitz), ferner der Schweiz, größtentheils mit Subventionen besonders der Regierung, zum Theil auch auf eigene Kosten, studiert. — Übrigens hat man die Hilfe genommen, wo sie zu haben war; so verdankt eine Anstalt in Wr.-Neustadt die Einführung des Fußballspieles einem Engländer, Beamten der dortigen Spitzenfabrik, der die Jugend für dieses interessante und abwechslungsreiche Spiel derart zu begeistern verstand, dass es bald das Lieblingsspiel der oberen Classen wurde.

Die für den Spielbetrieb verwendete Zeit war, soweit die Jahresberichte darüber präcise Angaben enthalten, meist zwei Stunden (seltener länger, öfter auch eine Stunde) zweimal

wöchentlich; weit geringer ist die Anzahl jener Schulen, welche einmal wöchentlich 1—2 Stunden spielten; nur wenige Schulen spielten 3—4 mal die Woche (3 beziehungsweise 2 Schulen) und immer, wie in dem ganzen Bericht, von Internaten abgesehen, bloß eine an jedem Werktag (StRG Feldkirch). Einzelne niederösterr. Schulen (StRS VII Wien, StG Wr.-Neustadt) constatieren ausdrücklich die Unmöglichkeit, zwei freie Nachmittage in der Woche für alle Classen zu schaffen.

Ein warmherziger Schätzer und eifriger Förderer des Jugendspieles äußert sich folgendermaßen: „Jetzt bleibt dem Schüler nur folgende Wahl: a) sich an den Spielen nicht zu betheiligen, b) in die Nacht hinein zu lernen, c) sich mangelhaft vorbereitet am nächsten Tage in der Schule einzufinden." Wer die bezüglichen Schwierigkeiten, besonders an Realschulen in großen Städten kennt, darf vermuthen, dass noch andere Schulen, auch wenn sie sich darüber nicht äußern, mit denselben Calamitäten zu kämpfen hatten; die obigen Äußerungen niederösterr. Anstalten geschehen wohl mit Rücksicht auf einen Erlass des k. k. niederöst. Landesschulrathes, dahin gehend, die Unterrichtszeit sei nach Thunlichkeit so zu vertheilen, dass in jeder Classe zwei vom Unterricht, auch in den unobligaten Fächern, freie Nachmittage in der Woche gewährt werden. In einer Grazer Versammlung wurde u. a. auch betont, dass bei den jetzigen Stundenzahlen an Oberrealschulen eine gedeihliche Pflege der Jugendspiele nicht möglich sei. Es dürften übrigens nicht in allen Orten die Zeitschwierigkeiten gleich große gewesen sein; für die Realschulen Steiermarks hat das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht gestattet, dass in den drei unteren Classen drei Nachmittage wöchentlich zum Zwecke regelmäßig betriebener Jugendspiele und anderer körperlicher Übungen freigehalten werden. Dieser Erlaubnis musste offenbar ein Ansuchen vorangehen. Es sind eben die Dinge in der Entwicklung und Klärung begriffen.

Die Theilnahme seitens der Schüler war, wie begreiflich, eine sehr rege, namentlich in den unteren Classen; die oberste wird mit Rücksicht auf die Maturitätsprüfung auch dann schwerlich zu Spielen kommen, wenn die Lust trotz der Classenziele überall entwickelt sein würde. Zur Betheiligung der jüngeren Schüler sei eine charakteristische Äußerung angeführt: Bei den Vorübungen im Schulhause und bei den Spielen im Augarten

kamen die drei unteren Classen jedesmal fast vollzählig und es genügte ihnen weder die Zahl der Spieltage noch die Dauer der Spielzeit“ (St G II Wien).

Dass die Betheiligung von Jahr zu Jahr zunehmen dürfte, erscheint nach der größten Anzahl der Berichte, welche darüber sprechen, wahrscheinlich; um eine solche Stelle zu citieren: „Die Betheiligung der Schüler hat sich gegen das vorige Jahr in erfreulicher Weise gehoben; die Durchschnittsziffer belief sich auf 110 gegen 75 im Vorjahre; namentlich die Antheilnahme des Obergymnasiums hat sich mit der Einführung des englischen Fußballspieles von 50 auf 70% erhöht“ (LRG Baden 1892, 1891 — 214 Sch, 1892 — 225 Sch). Von welchem Einflusse die Nähe des Spielplatzes ist, ergibt sich recht deutlich aus den Bemerkungen eines Brünner Berichtes (II d St G) über die Folgen der möglich gewordenen Benützung eines nahegelegenen Spielplatzes:

1890—91 waren bei 258 Schülern 633 Besuche
1891—92 „ „ 311 „ 2331 „

d. h. eine Steigerung der Besuche um 305% (seitens der Oberclassen sogar 477·8%) — trotzdem die Spielperiode in dem späteren Jahre um 14 Tage früher geschlossen wurde; es ist gewiss für jeden Jugendfreund bedauerlich, wenn die Anstalt bemerkt, dass der Platz wahrscheinlich nur für das eine Schuljahr zu haben sein wird!

Leider ist es nicht möglich, auf Grund der vorliegenden Daten ein übersichtliches, alle Anstalten umfassendes Bild darüber zu geben, wie viele Schüler im ganzen und nach Classen, wie oft und wie lange sie spielten, welche Steigerung die Theilnahme im zweiten Sommer erfahren hat u. dgl. Ein solches Schema wäre beredter als viele Worte. Constatiert darf werden, dass das kurze Bestehen der Einrichtung viele, auch reife Früchte gezeitigt hat und das Beste für die Zukunft verspricht.

Der Versuch, aus der großen Menge vorliegender Ziffernbelege wenigstens für etwa ein halbes Hundert Schulen eine Statistik zu machen, musste fallen gelassen werden, da nicht einmal für diese Reihe die gebotenen Ziffern zu statistischer Behandlung einwandlos brauchbar sind.

Was das Arrangement der Spiele betrifft, werden natürlich im Detail verschiedene Bräuche angeführt. Häufig findet gemein-

samer Abmarsch der Spieler statt, zuweilen (Freistadt, Wr.-Neustadt) von Trommelschlag oder Trompetenschall begleitet.

Auf gut Glück seien hier zur Exemplificierung leitender Ideen zwei Schilderungen, eine von einer niederösterreichischen Schule (L R S Wr.-Neustadt) und einer schlesischen (St G Troppau) beide von 1892, herausgegriffen. — Die Wiener-Neustädter Schule berichtet:

„Am Beginne der Spielperiode wählten sich die Schüler einer jeden Classe je ein Spiel für die ganze Spielperiode, mit welchem sie die erste Hälfte der Spielzeit eines jeden Spieltages auszufüllen hatten; für die zweite Hälfte konnten sie sich beliebige Spiele wählen; die unteren Classen jedoch hatten diese dem Spielleiter in der dem Spieltage vorhergehenden Turnstunde bekannt zu geben. Man ist dabei von der Anschauung ausgegangen, dadurch das Spiel zu vertiefen....

Diese Spielordnung hat sich auch vortrefflich bewährt; denn ihre naturliche Folge war, dass die Spiele mit einer Gründlichkeit und Geschicklichkeit gespielt wurden, die nichts zu wünschen übrig ließen; dadurch wurde bei den Schülern die Spielfreudigkeit und Liebe zum Spiel ungekünstelt angeregt und naturgemäß gefördert.

Wie im Vorjahre konnte man auch in diesem zu öfterenmalen wahrnehmen, dass die Schüler während einer ganzen Spielzeit mit Feuereifer und Lust sich nur einem Spiele hingaben; so wurde auch heuer wieder der deutsche Schlagball u. a. mit besonderer Vorliebe gepflegt."

Die Troppauer Anstalt berichtet:

„Anfangs März, mit Eintritt der günstigeren Jahreszeit, wurde sofort in allen Classen das Jugendspiel auf dem neben der Turnhalle befindlichen Turnplatze zur größten Freude der Schüler anschließend an den Turnunterricht fleißig gepflegt und hierauf in besonderen Stunden an Sonntagen die theoretische und praktische Ausbildung von „Spielordnern" aus den oberen Classen vorgenommen, denen an dieser Stelle volle Anerkennung für all ihre freiwillige Mühewaltung und lebhafte Unterstützung gesagt werden muss.

Seit Mitte Mai nun finden die Jugendspiele auf der eine halbe Stunde von der Stadt entfernten geräumigen „Parkwiese" statt, wohin die Turnschüler sowie andere sich freiwillig meldende Schüler der Anstalt im geschlossenen Zuge geführt werden. Besonders lebhaft und abwechslungsvoll gestaltet sich das Bild am Spielplatze dadurch, dass gleichzeitig mit den Gymnasialschülern sämmtliche Schüler der Staats-Oberrealschule ebenfalls in geschlossener Säule zur Aufstellung nach Classen am Spielplatze erscheinen und nach einem gemeinsamen Aufmarsch zu den eigentlichen Spielplätzen der einzelnen Classen jeder Anstalt — unter der Leitung des Turnlehrers, unterstützt von 30 Spielordnern beider Anstalten, die sich gegenseitig unterstützen und vertreten — die Spiele in 26 Gruppen, gewöhnlich zu je 15—20 Theilnehmern, stattfinden. Die Schüler des Obergymnasiums (V.—VIII.) sind nicht nach Classen geordnet, sondern mit den Oberrealschülern (V.—VII.) ohne Rücksicht auf Anstalt und Classe zu fünf Spielgruppen vereint unter der Führung je eines Spielordners der einen und der anderen Anstalt. Sobald nach kurzer Zeit alle 26 Gruppen

in Thätigkeit sind, fehlt es wohl nicht an lauten Äußerungen der Lust und des Jubels.

Sämmtliche Spielordner tragen als äußeres Kennzeichen roth-weiße Schärpen mit der Aufschrift „Spielordner“. Sämmtliche Theilnehmer an den Spielen legen vor Beginn derselben ihre Kopfbedeckung und die beengenden Oberkleider ab, welche in eventuellen Ruhepausen und am Schlusse der Spielzeit wieder angelegt werden. Für jeden Spieltag sind in jeder Gruppe vier Spiele festgesetzt, deren Reihenfolge allen Spielordnern schriftlich übergeben und deren Wechsel am Spielplatze nach je 25—30 Minuten durch das Hornsignal eines Schülers veranlasst wird, worauf die Gruppen ihre Spielplätze im geordneten Aufmarsch vertauschen. Den Schluss der Spielzeit verkündet ebenfalls ein Hornsignal, die Spielgeräthe werden dann zur Sammelstelle zurückgebracht, die Spielordner formieren rasch ihre Gruppen wieder zu Classen, diese zu Säulen von Vierer-Reihen und als solche classenweise gereiht — am Schlusse die fünf oberen Gruppen — treten die beiden Mittelschulen unter Liederklang in ebenso freudiger Weise als strammer Haltung gemeinsam den Rückmarsch in die Stadt an.“

Vereinzelt hat man auch schon zur Spielkleidung gegriffen; Baden hat (1891) folgende eingeführt:

Doppelfärbige (weiß-rothe) Helmkappe, Tricotleibchen, leinenes, durch einen Gürtel zusammengehaltenes kurzes Beinkleid und schwarze Kniestrümpfe. Der Preis für diese Spielkleidung war ein sehr mäßiger und wurde für die dürftigen Schüler aus dem Unterstützungsfonds bestritten.

Die wohlhabenden Schüler können ein Costüm ohneweiters anschaffen und für die armen wird sich wohl überall eine Quelle eröffnen lassen; die Spielkleidung scheint auch in dem Sinne von Belang, als die Eltern armer Schüler mit Rücksicht darauf, dass Kleider und Schuhe beim Spiel nicht zum Besten wegkommen, eher gegen als für die Spiele sein dürften — des gesegneten Appetits nicht zu gedenken! Erhält das Kind die Kleidung, so wird die Sache schon anders stehen und den Kindern armer Familien ist das Bewegungsspiel umsomehr zu wünschen, als sie zu Hause ungünstigere hygienische Bedingungen zu finden pflegen (Luft!) und ihnen bei schwer verdaulicher Nahrung mit wenig Fleisch umsomehr kräftige Bewegung in freier Luft zu wünschen ist, damit jene Mahlzeiten besser ausgenützt werden mögen.

Welche Spiele die beliebtesten sind, darüber gehen die Aufzählungen ziemlich auseinander; im allgemeinen sind es wohl Ballspiele; am häufigsten werden vielleicht als „beliebteste Spiele“ genannt: Schleuderball, Schlagball, Grenzball, Fußball, Barlauf.

Eine Reihe von Anstalten (z. B. in Budweis, Brünn, Mähr.-Weißkirchen, Wien) veröffentlichen genauer ihre Spielpläne;

beispielsweise sei hier der der Budweiser Mittelschulen für 1892 abgedruckt; den Abdruck der Spielpläne mehrerer Anstalten erlaubt der verfügbare Raum nicht.

Die Schüler werden für die Spiele an manchen Anstalten in drei, an anderen in vier Gruppen getheilt.

Spielplan für die Mittelschulen in Budweis 1892.

Spieltage		Gleichzeitiger Aufmarsch von allen Theilnehmern: I. u. II. Classe	III. u. IV. Classe	Oberclassen
5. Mai	13. Juni	Komm mit! Wanderball (mit 1 Ball). Schwarzer Mann.	Kreismette. Hinkkampf. Schlaglaufen.	Wettlauf. Ringkampf. Reiterball.
9. u. 12. Mai	20. u. 23. Juni	Wettlauf. Gänsedieb. Geier und Henne. Mettenspiel.	Gesellschaft-Bocksprung. Fuchs zu Loch. Wettlauf. Seilziehen.	Gesellschaftsübung im Tragen. Bärenschlagen. Kreismette. Drittenabschlagen.
16. u. 19. Mai	27. u. 30. Juni	Gärtner. Pelzen. Hinkkampf. Schwungseil.	Marschübung mit Schwenkung. Wanderball mit 2 Bällen. Bärenschlagen. Stehball.	Seilziehen. Wettlauf. Steinstoßen. Barlaufen.
23. Mai	4. u. 7. Juli	Schlängellauf. Schnecke. Katze und Maus. Jagd. Ballrathen.	Drittenabschlagen. Mettenspiel. Wächter und Dieb. Schneide- oder Hockezeck.	Wächter und Dieb. Fußball. Fuchs zu Loch. Gerwerfen.
30. Mai 2. Juni	11. u. 14. Juli	Fuchs zu Loch. Plumpsack. Nationalball. Zecke.	Fußball. Seilziehen. Jagd. Topfschlagen.	Ziehkampf. Burgball. Hinkkampf u. Stabringen. Deutsches Ballspiel.
9. Juni		Corporal. Rufmette. Seilziehen. Guten Morgen, Herr Fischer!	Tag und Nacht. Schwungseil. Ziehkampf. Wettlaufen.	Drittenabschlagen mit dem Ball. Barlauf. Steinstoßen und Wettspringen. Reiterkampf.

Um die Ordnung an einer Anstalt darzustellen, welche auch in der kalten Jahreszeit spielt und hiebei Märsche begünstigt, möge hier ein Theil des Spielplanes, October bis März, angeführt werden (StURS II Wien 1892).

Datum	Zeit	Classe	Anwesend	Summa	Anzahl der Gruppen	Anzahl der Spiele	
17. Oct.	2—5	IV.	14	14	1	10	Strammes Marschieren; Weitsprung über ein natürliches Hindernis, Dauerlauf, Weitwurf, den Dritten abschlagen, Sturmlaufen, Suchen des Flüchtlings.
24. Oct.	2—5	III. A III. B	26 14	40	1	12	Strammes Marschieren; wiederholter Dauerlauf, Sturmlauf, leichter Aufmarsch, Suchen des Flüchtlings, Wettlauf, langer Dauerlauf. Zum Schlusse sehr strammes Marschieren durch $^3/_4$ Stunden
7. Nov.	2—5	II. A II. B	8 10	18	1	9	Strammes Marschieren; Geschwindmarsch; Indianer-Kriegsmarsch, Suchen des Flüchtlings, Katze und Maus. Die letzte halbe Stunde strammer Marsch.
14. Nov.	2—5	I. A I. B	33 23	56	1	13	Strammes Marschieren; Dringen durch Dickicht, Wettlauf, Dauerlauf, Sturmlauf, leichter Aufmarsch, Laufen, Suchen des Flüchtlings.
21. Nov.	2—5	IV.	19	19	1—2	7	Strammes Marschieren; Zielwerfen, strammer Dauerlauf, Suchen des Flüchtlings, Überfall, Freund und Feind. Schließlich sehr strammer Marsch eine Stunde lang.
28. Nov.	2—5	III. A III. B	19 15	34	1	7	Strammes Marschieren; Dauerlauf, Orientieren, die drei Flüchtlinge suchen, Indianer. Zum Schlusse strammer Marsch.
5. Dec.	2—$^1/_2$5	II. A II. B.	17 20	37	1	11	Strammes Marschieren; Sturmlauf, Weitwurf, Wettmarsch, Wettlauf, Frontmarsch im Dickicht, Suchen der zwei Flüchtlinge. Zum Schlusse Marsch eine halbe Stunde lang.
12. Dec.	2—4	I. A I. B	22 24	46	1	7	Strammes Marschieren; Marschieren auf ganz unebenem Boden, im tiefen Laube; Besichtigung der Hofseilerei; Abschätzen von Entfernungen, Orientieren, strammer Marsch eine halbe Stunde lang.
26. März	3—6	III. B IV.	13 15	28	1	6	Strammer Marsch; Weitwerfen, Suchen des Flüchtlings, den Dritten abschlagen, Sturmlauf.

Jugendfreunde, besonders Eltern, wohnten natürlich den Spielen öfter als Zuschauer bei und folgten mit Wohlgefallen dem frohen Treiben; an manchen Stellen wurden die Plätze auch von hohen Persönlichkeiten besucht, was nicht wenig dazu beigetragen haben mag, die Institution in den Augen des Publicums zu heben. So wurde 1891 dem Badener[1]) Landes-Real- und Obergymnasium die hohe Ehre zutheil, dass Se. kais. Hoheit Herr Erzherzog Wilhelm gelegentlich den Spielplatz in Augenschein nahm und sich Bericht erstatten ließ; Se. Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht, Dr. Freiherr v. Gautsch, wohnte im selben Jahre zweimal den Spielen bei.

An manchen Orten wurden Wettspiele von Schulen (akademisches Gymnasium — Franz Josefs-Gymnasium, Wien 1891), an anderen Spielfeste (Baden, Böhm.-Leipa 1892) abgehalten.

In Schulen mancher Städte (Iglau, Laibach u. s. w.) wurden förmliche Spielordnungen aufgestellt. Aus den diesbezüglichen Anführungen in Jahresberichten soll hier als Beispiel die von Baden abgedruckt werden.

Spielordnung.

1. Die Spieler haben sich bei Beginn einer jeden Spielperiode bei ihren Classenvorständen an- und im Falle einer dauernden Verhinderung wieder abzumelden.

2. Die Ordinarien geben die Listen der Angemeldeten den Spielleitern bekannt und gehen im Falle, als ein Spieler auffallend lange am Platze nicht erscheint, über Anzeige der Spielleiter der Sache nach, um einen eventuellen Missbrauch mit der Spielzeit hintanzuhalten.

3. Die Spielleiter lassen bei Beginn einer jeden Spiel- (Sommer- und Herbst- Periode von den Spielern je einer Classe die Wahl der nöthigen Spielkaiser und Zeugwarte vornehmen. Von den Spielkaisern übernimmt einer als „Spielführer" die Geschäfte, deren Besorgung in einer Hand liegen muss, als Meldungen, Listenführung, Oberaufsicht über das Geräth etc.

4. Die von den Classen gewählten Spielkaiser und Zeugwarte besorgen an jedem Spieltage vor Beginn des Spieles die Absteckung ihrer Plätze und die Instandsetzung der erforderlichen Geräthe. Den Kaisern obliegt dabei die Anordnung und Aufsicht. Während des Spieles haben sie die Leitung zu besorgen, Unordnung zu verhüten, Streitigkeiten zu schlichten, zu spät Kommende einzutheilen und etwaige Misstände sofort den beiden Leitern des Spieles

[1]) Baden bei Wien besitzt mindestens schon zur Zeit der altrömischen Größe benützte Thermen und ist heute ein fashionabler Curort mit reizender Umgebung; dadurch wird zum Theil die Anwesenheit hoher Persönlichkeiten speciell an dieser Stelle erklärt.

anzuzeigen. Die Zeugwarte entnehmen das erforderliche Geräth der Hütte und versorgen es nach Spielschluss wieder ordnungsgemäß in derselben, wobei etwa vorgekommene Beschädigungen den Spielleitern anzuzeigen sind.

5. Die Spieler sind verhalten, den Spielkaisern unbedingt Gehorsam zu leisten; Beschwerden gegen dieselben werden im allgemeinen nach dem Spiele bei den Spielleitern vorgebracht. Zu spät Kommende haben sich bei ihren Spielkaisern anzumelden, unter dem Spiel Fortgehende melden sich bei ihm ab. Muthwillige Beschädigungen des Geräthes ziehen Ersatzleistung nach sich. Eigenmächtig darf kein Geräth der Hütte enttragen werden.

6. Beginn und Schluss der Spielzeit werden durch ein Signal bekanntgegeben. Nach dem Signal beim Beginn treten die Spielgruppen an, melden sich durch ihren Spielführer beim Spielleiter und verfügen sich, nachdem sie dessen eventuelle Anordnungen vernommen haben, auf ihre Plätze.

7. Der Spielführer jeder Classe hat vor jedem Spieltage die Zahl der zu erwartenden Spieler, sowie die Spiele, welche die Classe an diesem Tage pflegen möchte, den Spielleitern (durch die Hand des Dieners) bekanntzugeben.

Aus einer anderen Spielordnung (Böhm.-Leipa) mag der Passus bemerkt werden, dass während des Spieles niemand Bleistifte, Federhalter, überhaupt spitze Gegenstände bei sich führen darf (dort ist kein Spielcostüm), aus einer dritten (Budweis), dass die Standorte der einzelnen Spielabtheilungen durch Tafeln bezeichnet und beim Abmarsch Turnlieder empfohlen werden, aus einer vierten (LRS Graz), dass bezüglich des Trinkens und der Kleidung Vorschriften, beziehungsweise Empfehlungen gegeben werden; natürlich kann man derartige Spielordnungen recht verschieden auf- und abfassen; die localen Verhältnisse sind auch für manche Einzelheiten maßgebend.

Die Erfahrungen über das Benehmen der Schüler beim Spiele und die erziehlichen Consequenzen sind — es liegen hierüber zahlreiche Äußerungen vor — günstige: die Freude, der Eifer, der manchmal eingedämmt werden musste, die rege Betheiligung, die im großen Ganzen mit der Zeit wuchs, sind wiederholt anerkannt; zu Tadel war selten Anlass, das Spiel hatte zweifellos in mancher Hinsicht — moralisch und physisch — fördernd und veredelnd auf die Schüler eingewirkt; bezeichnend ist bezüglich der erziehlichen Wirkung des Jugendspieles die folgende Äußerung (StG Laibach 1892): „Der Einfluss der vorjährigen Spiele in Bezug auf Spielgeschicklichkeit, Ordnung und Eintracht hatte sich in so erfreulichem Grade gezeigt, dass heuer einige Vereinfachungen im Überwachungsdienste und ein größeres Selbstbestimmungsrecht der Spieler mit gutem Erfolge versucht werden konnten, auf welchen Vorgang — das Princip

der gegenseitigen Selbsterziehung durch das gute Beispiel — die Direction ein großes Gewicht legt, da der ethische und der moralische Einfluss des Spieles, von dem der diesbezügliche Ministerialerlass spricht, thatsächlich zu beobachten war und von der Spielleitung sorgfältig gepflegt wurde.“

Die Erziehung zum vernünftigen Gebrauche der Freiheit hat jedenfalls einen beträchtlichen Schritt nach vorwärts gemacht und der Gesammteffect ist hoch anzuschlagen, wenn man bedenkt, dass ja die Jugend sowohl die Spiele als auch sie ernst zu nehmen erst lernen musste.

Es ist über den hohen erziehlichen Wert der Spiele soviel gesagt und gedruckt worden, dass die Besprechung dieser Seite der Frage niemandem, der der Sache nicht ganz ferne steht, Neues bieten kann. Es mag daher dieses Capitel mit der folgenden Äußerung (StRS Teschen 1892) geschlossen werden:

„Die bisher gemachten Erfahrungen bestätigen bereits den vielfach gerühmten Nutzen der Jugendspiele. Dieselben bewähren sich als vorzügliches Mittel der Gesundheitspflege, indem sie infolge der harmonischen Bethätigung des Geistes und des Körpers der Erholung und der geistigen und körperlichen Kräftigung zugleich dienen. Sie zeigen sich auch geeignet, die gesellschaftlichen Tugenden der Schüler zu entwickeln und der Erziehung für die Gesellschaft zu dienen und werden voraussichtlich künftighin immer mehr als eine Ergänzung unseres bisherigen Erziehungssystemes sich geltend machen und der Schule zum Heile gereichen.“

Wie sehr Vereine verschiedener Art fördernd auf den Fortschritt der körperlichen Übungen unserer Schuljugend eingewirkt haben, wurde bereits mehrfach bemerkt; abgesehen von diesen Vereinen sind speciell zur Pflege des Jugendspieles in jener kurzen Spanne Zeit eine kleine Anzahl Vereine, beziehungsweise Vereinszweige oder Comités entstanden; soweit eine Orientierung möglich war, können folgende genannt werden:[1])

---

[1]) Möglicherweise gibt es noch andere; für diesbezügliche Mittheilungen an den Wiener Verein (s. hier bei „Wien“) wäre Verfasser dieser Zeilen dankbar. Die gedruckten „Mittheilungen“ des Wiener Vereines stehen, soweit der Vorrath reicht, gerne zu Diensten.

Böhm. Leipa: „Verein zur Gründung und Erhaltung von Jugendspielplätzen in Böhmisch-Leipa".

Budweis: „Jugendspielhort".

Czernowitz: „Verein für Jugendspiele".

Freistadt (Oberösterreich): „Jugendspielverein".

Innsbruck: Ein Comité für Jugendspiele.

Prag: „Jugendspielausschuss" des deutschen pädagogischen Vereines und des deutschen Turnvereines in Prag.

Smichow (Prag): „Deutscher Jugendspielausschuss" in Smichow.

Reichenberg: „Städtischer Jugendspielausschuss".

Wien: „Verein zur Pflege des Jugendspieles". Wien, I. Salvatorgasse 8.

Andere Sporte.

Außer dem Schwimmen, dem Eislauf sowie den Jugendspielen und dem, was als damit zusammenhängend zum Theil schon erwähnt worden ist, wird noch der eine oder andere Jugendsport stellenweise betrieben, am häufigsten wohl das Rudern, welches sich auch in der That durch seinen überaus günstigen Einfluss besonders auf die Entwicklung des Brustkorbes zumal für künftige Buchmenschen recht sehr empfiehlt. Das Rudern, respective „Kahnfahren" dürfte wohl an der Mehrzahl der Stellen, wo es häufiger betrieben wird (Budweis, Deutschbrod, Eger, Jičin, Salzburg, Troppau etc.), nicht besonders organisiert sein. Zuweilen werden besondere Bedingungen (Jičin — Kahnfahren nur Schwimmern erlaubt etc.) gestellt; dass es sich hier meist nicht etwa um englische Ruderboote oder Marineruderboote handelt, geht daraus hervor, dass z. B. in Eger eine Stunde Kahnfahren 5 kr. kostet. Immerhin ist auch ein solches Kahnfahren, wenn dabei wirklich gerudert, d. h. nicht die Zeit vertändelt wird, zu empfehlen. Man fördert augenscheinlich die Sache; so will man in Troppau, wo viele Schüler sich betheiligen, denselben einige Kähne anschaffen, ebenso in Zara, wo Verhandlungen mit dem dortigen Ruderverein gepflogen werden, um Boote für Schüler zu kaufen. Man darf erwarten, dass an Orten, wo das Rudern schulmäßig gefördert wird, vielleicht später von den jetzigen Mittelschülern Rudervereine gegründet werden, die dann gewiss für correcte

Sonne sorgen mit ihren Nachkommen [illegible] der Schule selbst die Möglichkeit einer [illegible] Schonung [illegible] werden.

Bisher besitzen, soweit die [illegible] Auskunft geht, wenigstens an drei Stellen Klagenfurt, [illegible] Villach, [illegible] während des Schuljahres [illegible] [illegible] auf [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] von [illegible], die [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Personen im [illegible] [illegible] sind, die [illegible] [illegible] [illegible] Kinderarzt [illegible], aber [illegible] wenigstens [illegible] solcher [illegible] vorhanden ist.

Über die bezüglichen Anmerkungen mit den [illegible] [illegible] und [illegible] an [illegible] [illegible] [illegible] Klagenfurt [illegible] zu finden.

[illegible]

[illegible]

Da diese Abmachungen auch im Jahre 1892 fortbestanden, so ist anzunehmen, dass sie sich bewähren.

In Raudnitz hat (CRG 1891, 1892) der dortige „Český Athletic Club“ den Schülern die Boote zum Üben unentgeltlich überlassen; die Schüler dürfen nicht ohne Aufsicht rudern, Trainer, gleichzeitig Steuerleute, sind Lehrer der Anstalt. Die Schüler ruderten zweimal die Woche, 1891 jedesmal eine halbe, 1892 eine Stunde; sie kommen zunächst auf einen schweren Vierriemer (Schulboot), dann auf einen Sechsriemer mit Gleitsitzen. 1891 waren 32 Schüler (Sch 188) eingeschrieben, 1892 28 Schüler (Sch 221). Der gute Einfluss auf die Gesundheit wird gerühmt. — Von Villach (St G 1892) wird berichtet:

Auf Anregung des Ruderclubs „Villach“ wurde vom Lehrkörper die Zulassung der Schüler als Eleven zu den Übungen des Vereines unter folgenden Bedingungen gestattet:

a) dass die Eltern (Vormünder) der Schüler schriftlich ihre Zustimmung dazu ertheilen;

b) dass die Schüler das 14. Lebensjahr erreicht haben und des Schwimmens kundig sind;

c) dass sie nur an den Übungen des Clubs, nicht aber auch an dessen geselligen Unterhaltungen theilnehmen;

d) dass die Übungen auf der Drau stattfinden. Nur ausnahmsweise dürfen sie während des Schuljahres an Ferialtagen die Übungen auf dem Ossiacher See mitmachen; vom 29. Juni bis zum Schlusse des Schuljahres dürfen sie sich an den Übungen nicht betheiligen.

Die Eleven zahlen monatlich 50 kr. an die Vereinscasse; das Tragen von Sportcostümen ist ihnen gestattet.

Einiges Wenige wird über Versuche, den Radfahrsport zu fördern, gemeldet; auch hier dürfte der Anschluss an geeignete Vereine sich empfehlen; der praktische Fortschritt in dieser, richtig betrieben, gesunden Leibesübung ist insofern relativ schwer, weil beim Rudersport die wertvollen Boote Vereinseigenthum sind, während das vorläufig auch noch nicht wohlfeile Fahrrad Eigenthum des Einzelnen zu sein pflegt; dieser Sport dürfte daher unter den Schülern bis auf weiteres nicht sehr extensiv um sich greifen. In Berichten von Budweis und Raudnitz wird das Bicyclefahren der Schüler gestreift.

Stellenweise (Olmütz, Prerau, Znaim etc.) wurden auch Gelenkübungen, beziehungsweise militärische Bewegungsbehelfe mit den Schülern vorgenommen. Diese Dinge gehören nicht hierher, sie sind eventuell eine Dependenz des Turnens — die sehr vorsichtig behandelt werden will.

An verschiedenen Stellen finden Übungen im [illegible] [illegible] und [illegible] zusammenhängend mit den Spielen statt, an anderen sind diese Übungen in Vorbereitung. — An einer Stelle ([illegible] Flensburg 1892) wurden [illegible] mit einem Flobert-Gewehr auf 10 m Distanz vorgenommen. Von 184 abgegebenen Schüssen waren [illegible] Treffer [illegible] die Scheibe innerhalb der Kreise [illegible] die Scheibe.

Ausflüge.

Ausflüge werden von allen Anstalten unternommen, [illegible] oder der andern dürfen wir hier aber [illegible] Sitte. [illegible] mit Spielen u. dgl. [illegible] [illegible] [illegible] meist nur zum Zwecke der Bewegung in freier Luft, häufiger aber dienen sie auch gleichzeitig [illegible] [illegible] mit [illegible] [illegible], dem Besuche [illegible] u. dgl. An manchen Anstalten findet [illegible] [illegible] [illegible] Ausflügen statt, mit [illegible] [illegible] [illegible] oder aus der [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] die Teilnahme [illegible] die Schüler an den Ausflügen [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der Bewegung [illegible] [illegible]. In manchen [illegible] [illegible] [illegible] Umgebung [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der Schüler [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der Schüler [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Bewegung [illegible] [illegible] [illegible] werden.

[illegible] [illegible] [illegible] der Ausflüge [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der [illegible]

bahnverwaltungen, welche zum Theil kräftig fördernd eingriffen; so gab z. B. in Wien die Nordwestbahn außerordentliche Ermäßigung; die Kahlenberg - Eisenbahngesellschaft gewährte Tausende und Tausende von 50%igen Ermäßigungen und Freikarten für die Wiener Mittelschüler; die Donau-Dampfschiffahrtsgesellschaft förderte gleichfalls durch Fahrpreisermäßigungen die Schülerausflüge von Wien; die Böhmische Nordbahn ermöglichte und erleichterte es Prager Anstalten durch weitgehende Preisermäßigung und Beistellung von Separatzügen, die Schüler ins Freie zu führen; die Staatseisenbahngesellschaft hat ähnliche Verdienste bezüglich der Brünner Studenten; der Umstand, ob eine schulfreundliche Persönlichkeit (Brünn) zu entscheiden hat oder nicht, ist natürlich von bedeutendem Einfluss auf das Gelingen solcher Dinge; es kann nicht verschwiegen werden, dass manche Bahnverwaltungen sich noch spröde verhalten; hoffentlich ist auch hier Fortschritt zu erwarten.

Aus den vielen statistischen Daten der Jahresberichte über Schülerexcursionen sei hier eine Berechnung der Durchschnittsauslagen pro Person, Fahrgeld eingeschlossen (StG Wr.-Neustadt 1891), herausgegriffen: Der wohlfeilste halbtägige Ausflug kostete durchschnittlich 25 kr., der kostspieligste 60 kr. (wobei Eisenbahn und Wagen benutzt wurde); der wohlfeilste ganztägige Ausflug für einen Schüler durchschnittlich 60 kr., der kostspieligste 2 fl. 50 kr.; die Durchschnittskosten einer anderthalbtägigen Excursion waren 3 fl. pro Mann.

Hygienische Belehrungen und Aufnahmen.

Zahlreiche Schulen berichten von hygienischer Belehrung der Schüler; sie geschah, abgesehen von gelegentlichen Auseinandersetzungen, besonders im naturgeschichtlichen Unterricht, an vielen Stellen durch eindringliche Circulanden seitens der Anstaltsleitungen (z. B. StG IV. Wien, fünf derartige Circulanden im Schuljahre 1890/91 allein), oder der Director hielt eine Ansprache an die Schüler (StRS Teschen) oder es wurden Gesundheitsregeln für die Schüler plakatiert, respective den Schülern zum Ankaufe empfohlen (StRS Teschen die der Hygiene-Section des Berliner Lehrervereines). Wieder in anderen Schulen erhielten die Schüler gedruckte Gesundheitsregeln (z. B. StRS

Innsbruck). Die an einer Stelle (StG Villach) an die Schüler vertheilten mögen hier im Wortlaut angeführt werden: sie sind unter Benützung der vom Berliner Lehrerverein herausgegebenen durch die bez. landesschulräthlichen Bestimmungen über das Verhalten bei ansteckenden Krankheiten vermehrt und werden fortan sowohl an die Schüler bei deren Eintritt in die Anstalt vertheilt als in den Lehrzimmern plakatiert.

Gesundheitsregeln für die Schuljugend.

I. Pflege des Körpers.

1. Frische Luft und Sonnenlicht sind unentbehrlich für die Erhaltung der Gesundheit; deshalb ist ihnen freiester Zutritt zu den Wohnräumen und namentlich auch zu den Schlafräumen zu gestatten.

2. Härte dich dadurch ab, dass du den ganzen Körper über kalt wäschest.

3. Während der warmen Jahreszeit bade fleißig im offenen Wasser; dehne das Bad auf höchstens eine halbe Stunde aus, reibe nach demselben die Haut mit dem Handtuche und erwärme dich hierauf durch einen Spaziergang in nicht zu fest geschlossener Kleidung.

4. Bewege dich viel und lebhaft im Freien (Spielen, Laufen, Springen, Turnen, Schwimmen, Schlittschuhlaufen, Arbeiten im Garten). Vor übermäßig langem Schlittschuhlaufen und unnöthigem Erhitzen dabei wird gewarnt.

5. Feucht gewordene Kleider, namentlich auch Strümpfe und Schuhe, ersetze baldmöglichst durch trockene.

6. Sei mäßig im Essen und Trinken. Genieße Speisen und Getränke weder mehr als blutwarm noch eiskalt. Es ist für den Magen schädlich, Wasser unter + 10° C., sowie wenn man erhitzt ist, zu trinken. Iss langsam und kaue gut. Meide starke Reizmittel (Kaffee, Thee, scharfe Gewürze, viel Salz, Tabak, alkoholhältige Getränke). Fleisch geniesse nicht in rohem Zustande.

7. Gehe früh zu Bette und stehe früh auf.

II. Pflege der Athmungswerkzeuge.

1. Athme möglichst mit geschlossenem Munde.

2. Hüte dich vor dem Einathmen von staubiger oder übelriechender Luft. Vermeide das Aufwirbeln von Staub im Zimmer und im Freien.

3. Arbeite im Sommer thunlichst bei offenen Fenstern. Bei ungünstiger Witterung und im Winter erneuere die Zimmerluft mehrmals täglich durch gleichzeitiges Öffnen der Thüren und Fenster. Setze dich nicht dem Zuge aus, zumal wenn du erhitzt bist.

4. Gurgele früh und abends und reinige nach jeder Mahlzeit den Mund mit frischem Wasser.

5. Vermeide es, beim Arbeiten die Brust anzulehnen und den Unterleib zu pressen.

III. Pflege der Augen.

1. Lies und schreibe nie in der Dämmerung.

2. Bei Tage wähle deinen Platz möglichst so, dass du von ihm aus ein Stück Himmel sehen kannst und das Fenster sich zur linken Hand befindet. Die Sonnenstrahlen dürfen nie auf deine Arbeit fallen.

3. Bedecke die Lampe nicht mit einem dunklen Schirme; stelle sie höchstens $^1/_2$ *m* vor dich und schiebe sie dabei etwas zur Linken. Das Arbeiten bei flackerndem Lichte, sowie das Lesen während des Fahrens und beim Liegen ist den Augen schädlich. Cylinder und Milchglasglocke müssen stets auf der Arbeitslampe sein.

4. Beim Schreiben halte den Oberkörper aufrecht, lege die Brust nicht an die Tischkante und neige den Kopf nur wenig nach vorne.

5. Die Schreibseite lege so schräge vor die Mitte der Brust, dass die Abstriche senkrecht zur Tischkante stehen.

6. Bei eintretenden Sehstörungen und Augenleiden wende dich an einen Arzt; ein Arzt kann auch nur entscheiden, ob du eine Brille nöthig hast, ob die Augengläser dauernd, ob sie beim Schreiben oder beim Blicke in die Ferne (an die Tafel) getragen werden sollen und welche Nummer der Gläser zu wählen ist.

IV. Pflege der Ohren.

1. Bewahre die Ohren vor starken Erschütterungen. (Schlage nicht dagegen! Schreie nicht hinein!)

2. Bohre nie mit einem spitzen Gegenstande, wie Feder, Stricknadel, Zahnstocher u. s. w. in den Ohren.

3. In das Ohr gedrungene Fremdkörper dürfen nur durch Ausspritzen mit lauem Wasser entfernt werden. Am besten ist es jedoch, in einem solchen Falle zum Arzte zu gehen.

4. Dringt ein Insect in das Ohr, so neige den Kopf nach der entgegengesetzten Seite und träufle solange Öl in den betreffenden Gehörgang, bis das Thierchen getödtet ist.

V. Über das Sitzen zu Hause beim Schreiben und Lesen.

1. Setze dich so, dass du die Fenster (die Lampe) zur linken Seite hast.

2. Schiebe beim Schreiben den Stuhl soweit unter den Tisch, dass die vordere Stuhlkante etwa 5 *cm* unter die Tischplatte reicht. Bei gerader Haltung des Oberkörpers darf die Brust die Tischkante nicht berühren.

3. Der Stuhl sei so hoch, dass bei herabhängenden Armen die Tischplatte in Höhe der Ellenbogen sich befindet. Da die gewöhnlichen Stühle zu niedrig sind, so lege ein Kissen auf.

4. Die Füße setze mit der ganzen Sohle auf den Boden; erreichst du ihn nicht, so stelle eine Fußbank unter.

5. Setze dich so auf den Stuhl, dass die Brust parallel mit der Tischkante ist.

6. Schlage die Beine nicht übereinander, weder am Knie noch an den Knöcheln, und ziehe die Füße nicht unter den Stuhl zurück.

7. Lege die Unterarme in der Nähe der Ellenbogen auf den Tisch, halte mit der linken Hand das Heft fest und schiebe es während des Schreibens weniger oder mehr auf den Tisch, je nachdem du den oberen oder den unteren Theil beschreibst.

8. Beim Lesen und Lernen schiebe den Stuhl etwas zurück, lehne dich hinten an und halte das Buch schräg mit beiden Händen auf dem Tische fest.

9. Sowohl beim Lesen wie beim Schreiben muss das Auge mindestens 35 *cm* von der Schrift entfernt sein.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Athembeschwerden, Nervosität und Augenübel am häufigsten sind, zumeist bedingt durch Mangel an Bewegung in frischer Luft und ungesunde Körperhaltung der Studierenden; es entfielen, Husten und Schnupfen abgerechnet:

im November	1890	auf 224	Schüler	275	Kränklichkeitszustände
„ Juni	1891	„ 221	„	187	„
„ October	1891	„ 240	„	216	„
„ Juni	1892	„ 228	„	162	„

Es ist hier nicht der Ort, ausführlicher über diese Dinge zu sprechen und zu berichten; im ganzen hat sich der Gesundheitszustand günstiger gestaltet, und zwar wurde dies besonders bei den Schülern der unteren Classen constatiert; es dürfte diese Erscheinung wohl mit der gesteigerten Körperbewegung und der speciellen erhöhten hygienischen Fürsorge der Anstalt zusammenhängen.

Die Erhebungen für mittlere obligatorische Arbeitszeit zu Hause ergaben folgende Durchschnittszahlen für die einzelnen Classen[1]) pro Tag, die Woche zu sechs (Arbeits-) Tagen gerechnet:

Classe	24. Februar bis 16. März 1891	1. bis 30. November 1891
I a	1 St. 39 Min.	1 St. 32 Min.
I b	1 „ 41 „	1 „ 43 „
II	2 „ 15 „	1 „ 41 „
III	3 „ 2 „	2 „ — „
IV	2 „ 33 „	2 „ 28 „
V	3 „ 31 „	2 „ 53 „
VI	3 „ 47 „	2 „ 40 „
VII	4 „ 48[2]) „	3 „ 30 „

Bei den Erhebungen wurde folgender Fragebogen (in entsprechendem Maßstabe) benützt:

---

[1]) Die Realschule ist in Österreich siebenclassig; I a, I b bedeutet Theilung der ersten Classe wegen großer Schülerzahl in zwei gleichwertige Abtheilungen.

[2]) Annäherung an die Maturitätsprüfung!

Classe Name: ....

Zeiteintheilungs-Tabelle
(Daten zur Regelung der Gesundheitsverhältnisse).

Datum	Zeit des Aufstehens	Weg zur Schule (einmal)	Schulstunden ohne Gsg. u. Turnen	Häusliche Arbeitszeit (in Minuten) für														Zeit f. Gsg. u. Musik	Unterricht ertheilt	Turnen u. Spielen	Bewegung im Freien	Waschungen des Körpers	Zahl der Bäder	Dauer der Zimmerlüftung	Zeit des Schlafengehens	Anmerkungen (Unwohlsein etc.)
				Religion	Deutsch	Französisch	Englisch	Geographie, Geschichte	Mathematik	Darst. Geometrie u. geom. Zeich.	Naturgesch.	Physik	Chemie	Zeichnen	Kalligraphie	Summe										

An einer Stelle (St G Weidenau) besitzt die Anstalt seit Jahren einen vom Grafen Liechtenstein gestifteten Fonds, aus welchem mittellose Schüler unentgeltlich ärztliche Behandlung und Medicamente genießen; neuerlich ist auch ein Isolierzimmer für infectionskranke Schüler im Spital eingerichtet und wiederholt benützt worden.

Diese kurzen Bemerkungen über besondere hygienische Arbeiten und Einrichtungen mögen mit dem Wunsche ihren Abschluss finden, dass es bezüglich der Infectionskrankheiten allerorten so gut gehen möge wie an jener Schule St G Jičin, 1892), welche meldet, dass im verflossenen Jahre keine solche Krankheit vorkam.

Fürsorge in den Ferien.

Ein wichtiger hygienischer Factor ist bekanntlich der Ferienaufenthalt und der Ferienzeitvertreib der Schulkinder, besonders in großen Städten. Für Mittelschüler kommt hiebei noch in Betracht, dass sie während des Schuljahres durch Schulstunden und Hausarbeit in Anspruch genommen, nicht viel Zeit behalten, Allotria zu treiben, wogegen besonders bei häuslich wenig beaufsichtigten Schülern während der Ferien mangels fester Beschäftigung manche Gefahren zu befürchten sind. Auch aus diesen Gründen ist Fürsorge bezüglich aus-

giebiger, passender, gesunder Körperübung der Schüler in jener Zeit sehr wünschenswert.

Während in den Großstädten der Genuss so manches Beneficiums während des Schuljahres wegen großer Entfernung einfach unmöglich ist, werden derlei Vortheile in den Ferien für Schüler, deren Eltern keinen Landaufenthalt nehmen, von höchstem Wert; dies gilt z. B. von den großen entfernten Bädern (Communalbad, Militärschwimmschule in Wien).

Eine Anzahl armer Wiener Studenten findet alljährlich in dem bereits seit längerem bestehenden Ferienhort zu Steg Unterkunft sammt unentgeltlicher Beförderung von und nach Wien. Für einen oder den anderen Schüler bestreitet auch der Unterstützungsfonds der Anstalt die Kosten. In diesem an einem unserer schönen Alpenseen (Hallstättersee) gelegenen Eldorado armer Gymnasiasten genießen die Studenten das Seebad, betreiben Jugendspiele, Rudern, machen größere Ausflüge und — werden gut gefüttert (panem et circenses), was gewiss nicht wenig zur Erzielung ihres blühenden Aussehens und der mitunter verblüffenden Gewichtszunahme beiträgt.

Zahlreiche Abiturienten machen von den Vergünstigungen des deutschen und österreichischen Alpenvereines (Studentenherbergen) ausgiebigen Gebrauch: so in den letzten Ferien von den 26 Abiturienten einer Anstalt (CRG VI Wien) 25. Brünner Studenten haben das Glück, in der Feriencolonie Reitendorf des mährisch-schlesischen Sudetengebirgsvereines Aufnahme zu finden, die böhmisch-mährischen Studenten benützen besonders die Studentenherbergen im Böhmerwald, den Sudeten etc., und zwar auch Studenten aus kleinen Städten (Komotau, Saaz). Die Wiener Studenten zieht es wohl mehr in die Alpen als nach Böhmen, obwohl auch dort von den Herbergen Gebrauch gemacht wird. An einer Stelle (St G Reichenau, Böhmen) machten 56 Schüler unter Führung eines Lehrers einen fünftägigen Ausflug nach Prag.

Der Turnverein in Brünn hat für die Studenten einen Turn- und Spielcurs in den Ferien abgehalten.

Das Elternhaus bringt im allgemeinen große Opfer, um den Kindern die Möglichkeit eines Ferienaufenthaltes auf dem Lande zu bieten; wenn die Eltern nicht selbst Landaufenthalt nehmen können, so trachten sie wenigstens, die Kinder bei befreundeten oder verwandten Landbewohnern unterzubringen.

[illegible]

[illegible]

[illegible] Zeitschriften, Verhandlungsberichten, und [illegible]

[illegible] Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben [illegible] Bechtel und Glöser, Wien, Hölder.

[illegible] 1891

[illegible] Wien [illegible] Beitrag zur Durchführung des h. [illegible] betreffend.

[illegible] Schulspiele.

Fechter Karl, Turnlehrer, und Guttmann Max, Hilfsturnlehrer: Turn- und Spielbetrieb an der k. k. Staats-Unterrealschule im II. Bezirke Wiens.

Schmidt Jul., Turnlehrer in Laibach: Die Förderung der körperlichen Ausbildung der Jugend.

Guttmann Max, Turnlehrer in Wien: Zur körperlichen Erziehung durch das Turnen und das Jugendspiel mit besonderer Berücksichtigung der österreichischen Verhältnisse.

Burgerstein, Dr. Leo in Wien: Schulhygienische Mittheilungen vom VII. internationalen Congress f. Hygiene und Demographie in London 1891.

Im XVII. Bd. 1892:

Wilhelm Franz, Prof. in Pilsen: Das Turnen und die Turnspiele in der königl. Stadt Hannover.

Burgerstein, Dr. Leo in Wien: Die Generalversammlung des Centralausschusses zur Förderung der Jugend- und Volksspiele in Deutschland. (Berlin, 14. Februar 1892.)

Österreichische Mittelschule, Wien, Hölder.

Im V. Jahrg. 1891:

Fetter Joh., Dir., und Huemer, Dr. Joh., Dir. (seither Landesschulinspector) in Wien: Lehrpläne und Jugendspiele.

Burgerstein, Dr. Leo in Wien: Die hygienische Revision der Mittelschule.

Lang F., Prof. in Graz: Zur Frage der Jugendspiele.

Im VI. Jahrg. 1892:

Böhm Adalb., Turnlehrer a. d. CR VI, Wien: Die Leibesübungen als nothwendiger Bestandtheil einer ebenmäßigen Erziehung.

Dupky H., Prof. in Freistadt (seither Wien): Vorschläge zur Durchführung der Jugendspiele.

Gratzy, Dr. Oskar in Laibach: Vorschläge zur Durchführung der Jugendspiele.

Überdies wurde in dieser Zeitschrift über Debatten (Mittelschultage und Mittelschulvereine) referiert.

Wiener klinische Wochenschrift. Organ der k. k. Gesellschaft der Ärzte, redigiert von Dr. G. Riehl. Wien, Hölder 1890:

Burgerstein, Dr. Leo: Über hygienische Untersuchung der Schulverhältnisse.

Pädagogium, herausgegeben von Dr. F. Dittes, Leipzig, J. Klinkhardt.

XIV. Jahrg. 1891/92:

Burgerstein, Dr. Leo: Die Schulgesundheitspflege auf d. VII. internationalen Congress f. Hygiene u. Demogr. in London 1891.

Transactions of the VII. intern. Congr. of Hyg. and Demogr. London 1891. Vol. IV.

Burgerstein, Dr. Leo: The working curve of an hour: an experiment concerning overpressure of brain.

In Jahresberichten [illegible] Programmen [illegible] Mittelschulen:

[illegible] Nachrichten, welche der citierte Ministerialerlass [illegible]

Für 1890/91:

[illegible] Karl, Prof.: Herbert Spencer. Die Erziehung [illegible] und leiblicher Hinsicht. St.G. Klagenfurt.

[illegible], Dr. G.: Die Jugendspiele [illegible]

[illegible] Hans, Director: Über die Nothwendigkeit [illegible] pflege. [illegible] Teschen.

[illegible] Gesundheitspflege der Schüler. Ebenda. [illegible]

[illegible], Turnlehrer: Schulreform, [illegible] körperliche Erziehung. [illegible] VII. Wien.

[illegible], Prof.: Werthschätzung der Gymnastik [illegible] Griechen und [illegible] der körperlichen Ausbildung der Jugend [illegible] Zeit. [illegible] Wien.

Für 1891/92:

[illegible] Karl: Die Einführung der Jugendspiele [illegible] II. Bezirke in Wien. [illegible] Der Görlitzer [illegible] II. Wien.

[illegible], Turnlehrer: Wie erhalten wir unsere Jugend gesund. [illegible] III. Wien.

[illegible]: Die Gesundheitspflege der Schüler. [illegible] Teschen [illegible]

[illegible], Prof.: Werthschätzung der Gymnastik [illegible] den Griechen und [illegible] der körperlichen Ausbildung der Jugend [illegible] Zeit. [illegible] Wien. ([illegible] folgt.)

Das Verständnis für die Wohlthat einer gesunden Körpererziehung wird nunmehr in unseren Mittelschulen allmählich [illegible] ist fortschreitend und für die Jugend aller [illegible] zu erwarten, wenn einst die jetzigen Schüler als Mitglieder von Vertretungskörpern, öffentliche Beamte, wohl[illegible] Private geneigt sein werden, in jenem Sinne dazu beizutragen. [illegible] ist der Segen einer guten That, dass sie fort[illegible] [illegible] gebären.











